

二次流れを伴う管内層流の相似法則

石垣 博* 田村 洋*
山田 仁* 望月 宗和*

Similarity in Laminar Pipe Flows with Secondary Flows

by

Hiroshi ISHIGAKI, Hiroshi TAMURA,
Hitoshi YAMADA and Munekazu MOCHIZUKI
*Kokuda Research Center
National Aerospace Laboratory*

ABSTRACT

Similarity in the fully developed laminar flows in curved pipe and orthogonally rotating pipe is discussed. Non-dimensional parameters are obtained selected properly for each flows. it is shown that friction factors for these two flows are correlated by a single formula.

1. ま え が き

遠心力, コリオリ力, 浮力などの体積力が作用する管路内の流れは非常に多くの実用機器に用いられている。たとえばガスタービン動翼や大型発電機ロータなど, 回転機械の冷却問題はこの3つの力が同時に作用する流動伝熱場の典型的なものである。

一般に断面内に体積力が作用する管路内の流れは二次流れを有し, 矩形管などの場合にはさらに流体力学的不安定による渦の発生も加わって, 複雑な三次元流動になる。この種の流れに関する従来の研究は曲管(遠心力), 回転管(コリオリ力など), 水平加熱管(浮力)などの内部流として個別の分野として扱われており, 流動伝熱特性を表示する無次元数も相互の関連を考慮しないばらばらのものであった。

著者らはこのような体積力が作用する管内の流動伝熱場を統一的に記述し, また2種以上の力が

同時に作用する更に複雑な流れ場の理解を深めるべく, これまで円管と矩形管内層流について, 曲管^{1,2)}, 直交回転管^{3,4)}, 水平加熱管^{5,6)}, 平行回転管⁷⁾などの流動伝熱場を数値解析によりしらべてきた。本研究の目標はこれら流れ場の相似性に着目して共通の特性パラメータを選定し, 流れごとに個別に求められている従来の実験や解析の結果を統一的に解釈, 整理しようとするものである。本報告では曲円管および直交回転円管内の完全に発達した層流場の相似性について議論する。

2. 基礎式と数値解法

円管流の基礎式を示す。座標は図1(a), (b)に示すようなトロイダルあるいは円筒座標系(r, θ, z)をとる。速度成分を(u, v, w)とし, 管内の流れが定常, 非圧縮性の層流であり, かつ流れが完全に発達しているとするれば, 連続式および Navier-Stokes 式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial \theta}(v) = 0 \quad (1)$$

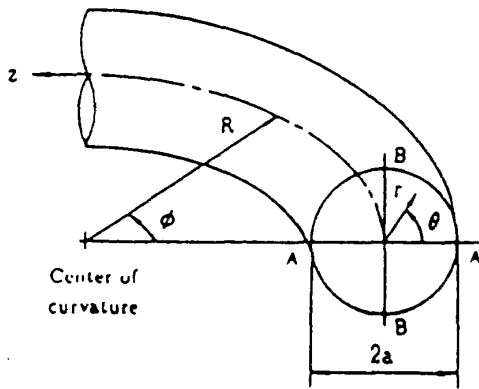


図 1(a) 曲円管の座標系

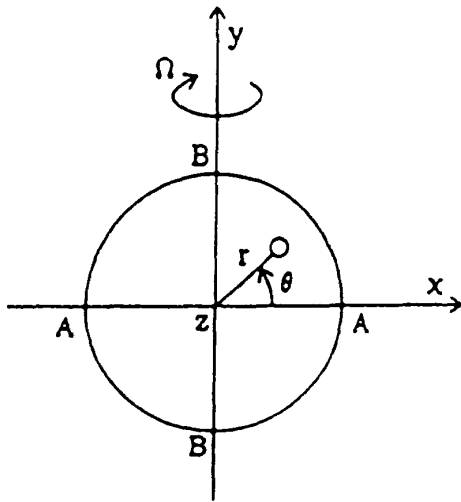


図 1(b) 直交回転円管の座標系

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta + \nu \left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + F_z + \nu \nabla^2 w \quad (4)$$

ここに

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (5)$$

体積力の項は次のようになる。

曲円管 :

$$F_r = w^2 \cos \theta / R, \quad F_\theta = -w^2 \sin \theta / R, \quad F_z = 0 \quad (6a)$$

直交回転円管 :

$$F_r = 2\Omega w \cos \theta, \quad F_\theta = -2\Omega w \sin \theta, \quad F_z = -2\Omega (u \cos \theta - v \sin \theta) \quad (6b)$$

これらの基礎式に入っている仮定は曲円管については λ が大きいこと ($\lambda = R/d > 8$) である。直交回転円管についての仮定は特にはないが、この場合の圧力 p は遠心力効果を含めた換算圧力になる (文献 3 参照)。

計算に用いたプログラムは Patankar の著書⁸⁾ を参考にして作成したもので、有限体積法、スタガード格子、べき乗スキーム、SIMPLE 法によっている。格子点は壁近傍で密な不等間隔にとり、計算は流れの対称性を仮定して半断面について行った (格子点数は r 方向 21, 周方向 17)。

3. 曲円管内層流の相似性

相似法則を求めるには相似変数 (特性数) を正しく選定することが決定的に重要である。二次流れをともなう管内流のうちで最も議論が進んでいる曲円管内層流については次のようにまとめることができる。

「曲円管内完全発達層流の特性は Dean 数 K_{LC} と曲率比 λ の 2 つのパラメータによって完全に表示することができる。そして λ が大きくなると特性は λ には無関係になり、 K_{LC} のみにより表示できる」

式(1)は λ が大きい場合の式であり、すでに λ の影響は除かれている。 λ の影響が入っている有限曲率の曲円管流の基礎式はきわめて煩雑なので、ここでは $\lambda > 8$ で成立する式(1)~(6a)から出発する。

二次流れの速度スケールを考慮した次の変換を考える。

$$\bar{u} = \frac{u}{w_m} \sqrt{\lambda}, \quad \bar{v} = \frac{v}{w_m} \sqrt{\lambda}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_m}, \quad \bar{p} = \frac{\bar{p}}{\rho w_m^2}, \quad \bar{p} = \frac{p\lambda}{\rho w_m^2}, \quad \bar{r} = \frac{r}{d}, \quad \bar{z} = \frac{z}{d\sqrt{\lambda}} \quad (7)$$

この変換をほどこすと、式(2)~(4)は次のようになる (式(1)は形が変わらない)。

$$u \frac{\partial \bar{u}}{\bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \bar{w}^2 \cos \theta$$

$$+ \frac{1}{K_{LC}} \left(\bar{r}^2 \bar{u} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right) \quad (8)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{r}} = -\frac{2}{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} - \bar{w}^2 \sin \theta$$

$$+ \frac{1}{K_{LC}} \left(\bar{r}^2 \bar{v} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right) \quad (9)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{K_{LC}} \bar{r}^2 \bar{w} \quad (10)$$

すなわち λ が大きいときの曲円管内層流の特性は Dean 数 K_{LC} のみによって決まること、また直円管におけるレイノルズ数の役割をはたすものは K_{LC} であるから、流れの性格として K_{LC} が小さいときには粘性流型、 K_{LC} が大きいときには境界層型となることなどがわかる。ちなみに式(7)からわかるように二次流れ成分の速度スケールは $U_s = w_m / \sqrt{\lambda}$ であるから、Dean 数は $K_{LC} = U_s d / \nu$ すなわち二次流れの代表速度を用いたレイノルズ数である。

4. 直交回転円管内層流の相似性

この流れは回転効果を含むため、考えうるパラメータが多くあるので、流れ特性を表示するに際してこれまでいろいろな無次元数が使われてきた。たとえば1パラメータ表示としては Trefethen⁹⁾ による K_I 、森・中山¹⁰⁾ による N/χ (ここに N は K_I と同義、 χ は R_0 の関数)、2パラメータ表示では K_I と R_0 を用いた Ito-Nanbu¹¹⁾、 $R_0 G$ と R_0 を用いた Lei-Hsu¹²⁾ (G は軸方向圧力この配を用いた Reynolds 数)、 R_0 と R_0 を用いた Hart¹³⁾ と Khesghi-Scriven¹⁴⁾、 Re と R_0 を用いた Speziale¹⁵⁾ などがある。

石垣・田村³⁾ は曲管での Dean 数に対応するパラメータとして $K_{LR} (= Re / \sqrt{R_0})$ を求め、第2無次元数として Rossby 数 R_0 を選定して、 K_{LR} と R_0 により円管と正方形管の特性を表示した。誘導の詳細とその有効性は文献3), 4) を参照して頂きたいが結局、変換

$$\bar{u} = \frac{u}{w_m} \sqrt{R_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{w_m} \sqrt{R_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_m},$$

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}}{\rho w_m^2}, \quad \bar{p} = \frac{p R_0}{\rho w_m^2}, \quad \bar{r} = \frac{r}{d}, \quad \bar{z} = \frac{z}{d \sqrt{R_0}} \quad (11)$$

を行ったときに式(2)~(4)は次のようになる。

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + 2\bar{w} \cos \theta$$

$$+ \frac{1}{K_{LR}} \left(\bar{r}^2 \bar{u} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right) \quad (12)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{r}} = -\frac{1}{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} - 2\bar{w} \sin \theta$$

$$+ \frac{1}{K_{LR}} \left(\bar{r}^2 \bar{v} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right) \quad (13)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \frac{2}{R_0} (\bar{u} \cos \theta - \bar{v} \sin \theta)$$

$$+ \frac{1}{K_{LR}} \bar{r}^2 \bar{w} \quad (14)$$

上式より無次元数は $K_{LR} = Re / \sqrt{R_0}$ と R_0 の二つであること、静止直管における Re あるいは曲管における K_{LC} の役割をもつものは K_{LR} であること、 R_0 が大きいときには特性は K_{LR} のみによって決まること、逆に R_0 が小さいときには二次流れによるコリオリの力によって軸速度が大きな影響をうけること、などがわかる。

さて K_{LR} と K_{LC} の定義式を比較することによっても容易にわかるように、曲管流れの第2特性数 λ に対応するものは R_0 であり、式(12)~(14)で $R_0 \rightarrow \infty$ としたときに特性が K_L のみで決まることは、曲管での $\lambda \rightarrow \infty$ のときに特性が K_{LC} のみで決まることに対応している。そしてこのときに2種の流れ特性の相似性が期待できる。以下、計算結果および実験データによりこの仮説を検討する。

5. 管摩擦係数

K_{LC} と K_{LR} は同じオーダーであるから、比例関係が期待できる。そのときの比例定数の決定にはいくつかの方法が考えられ、著者の以前の研究では正方形管に流体力学的不安定が発生する K_{LC}, K_{LR} の臨界値を計算で求め、これを利用して $K_{LC} \cong 0.92 K_{LR}$ を求めた¹⁶⁾。しかしその後、この臨界値は計算格子の点数や格子点分布などの計算諸条件によってある程度変動して、固定した比定係数と

ならないことがわかったので、本報告では信頼度の高い実験データを用いて比例定数を定めることにする。

これら2種の流れの実験研究のうちで最も信頼性の高いものを選べば、曲管については伊藤¹⁷⁾、直交回転管については Ito-Nanbu¹¹⁾の研究である。 $f_0 = 64/Re$ を静止直管の管摩擦係数として、伊藤は曲管内層流の管摩擦係数 f_c の実験式として

$$\frac{f_c}{f_0} = \frac{21.5K}{(1.56 + \log_{10} K)^{5.73}}, \quad K = Re \sqrt{\frac{a}{R}} \quad (15)$$

を与えた。 a は円管半径であるから、 K は $K = K_{LC}/\sqrt{2}$ である。また直交回転管内層流の管摩擦係数の実験式として Ito-Nanbu は

$$\frac{f_R}{f_0} = 0.083K_l^{1/4} (1 + 11.2K_l^{-0.325}), \quad K_l = ReR_0 \quad (16)$$

を与えた。 K_l と本研究とは $K_l = K_{LR}^2$ の関係にある。

さてこれら2つの実験式をそれぞれ K_{LC} 、 K_{LR} に書きなおして比較したところ、図2に示すように K_L の小さなところでの最大2%程度のちがいを除けば、両曲線はほとんど重なった。また著者の数値計算結果同士は全域でよく一致し、2つの実験式との一致度も良好である。このことから、体積力項が曲管は w^2 、回転管は w に比例するという相違にもかかわらず、特性数を K_{LC} と K_{LR} に選べば、管摩擦係数は λ 、 R_0 が大きいときに単一の式となることがわかる。このことから比例定数は1.0として論をすすめる。

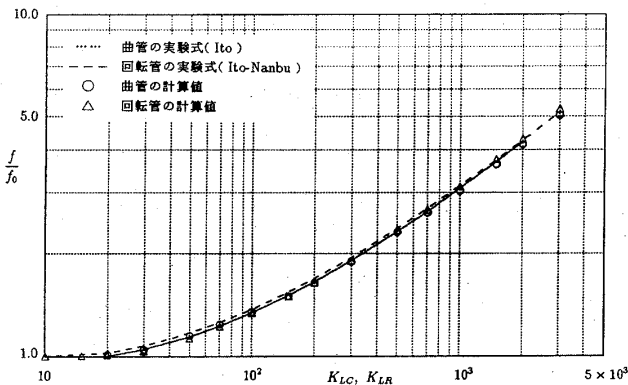


図2 曲円管および回転円管の管摩擦係数比 ($f_0 = 64/Re$ は静止直管の値)

6. 平均熱伝達率

つぎに2つの流れの平均熱伝達率も同じ値になることを示す。その例として示した図3は等温壁円管の $P_r = 5.0$ (流体は水)の場合の平均ヌセルト数である。 λ と R_0 が大きいとき、特性数を K_{LC} と K_{LR} にとれば曲管と直交回転管の N_u はほとんど一致することがわかる。

参考のために図3には各種の熱伝達ハンドブック(たとえば文献18), 19)などに載っている推奨式を線で示してある。 P_r が大きいときの従来の公式同士には2倍程度のちがいがあることがわがり、より信頼性の高い実用公式の作成が必要である。

7. 流れのパターン

図4は無次元化した軸速度と二次流線の等高線を示したものである($\lambda = R_0 = 20$)。上半部の曲円管と下半部の直交回転円管の分布がきわめて類似している。流れの性格が $K_L = 30$ は粘性流型、 $K_L = 1000$ は境界層型であることが見てとれる。

7.1 流れの特性

ここでは流れを特徴づける諸量を式(6)および(10)の相似変換にもとづいて表示したときに、その変化の仕方がどのようになるかを見る。以下の図は $\lambda = R_0 = 100$ とした計算結果である。

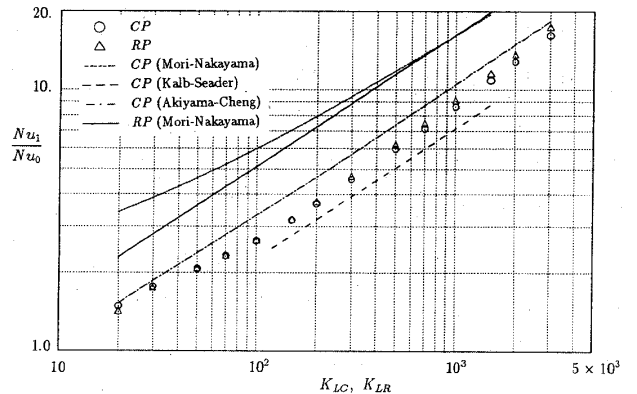


図3 等温壁の場合の平均ヌセルト数比 ($P_r = 5.0$) (CPは曲管, RPは直交回転管)

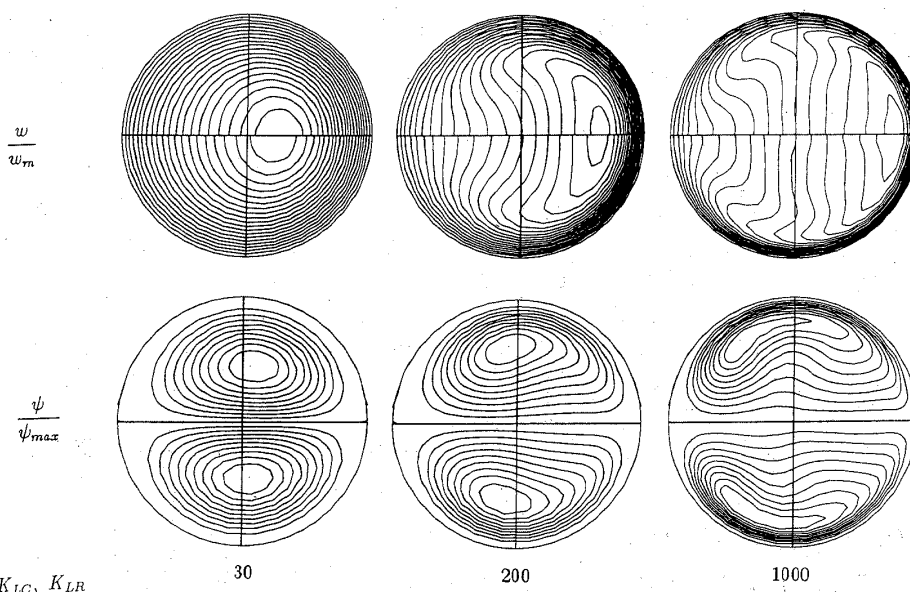


図4 軸速度，二次流線の等高線（上半部は曲円管，下半部は直交回転円管）

7.2 最大軸速度の変化

λ, R_0 が大きいときには K_{LC}, K_{LR} が増加するにつれて w_{max} の位置は中心点から x 軸上を x の増加する方向に移動する(図4)。図5はこの w_{max} の大きさが K_L によってどのように変化するかを示したものである。 K_L が小さいときはほぼ同じ変化をし、 $K_L \cong 150$ で分かれて別々の値に漸近するが、全体としてよく似た挙動をする。

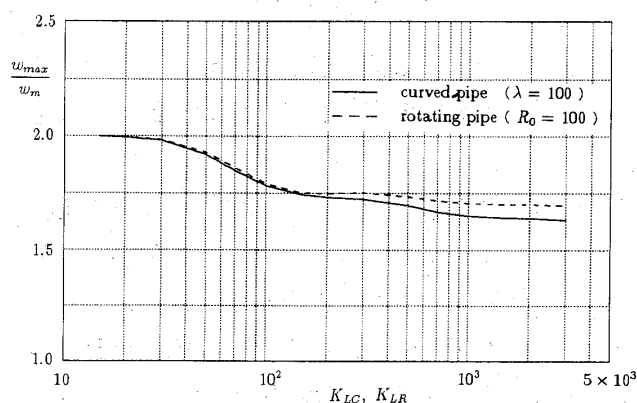


図5 K_L による最大軸速度の変化

7.3 断面内圧力変化

図1(a), (b)の $\theta = 180^\circ$ 壁面上圧力を基準値にとったとき，断面内圧力変化 p の無次元分布は両者とも大略 y 軸に平行な直線群になる(図省略)。この圧力差の最大値 p_{max} は $\theta = 0$ と 180° との壁圧差になるが，この変化の様子を図6に示す p_{max} は基本的には圧力勾配項と体積力項との均合いで決まり，これは曲管の場合には w^2 ，回転管の場合には $2w$ に比例するので，量的には異なる。また直交回転管の p は遠心力効果を差引いた換算圧力であるから，同じ量とはいえないが，それにもかかわらず両者がよく似た変化をすることがわかる。

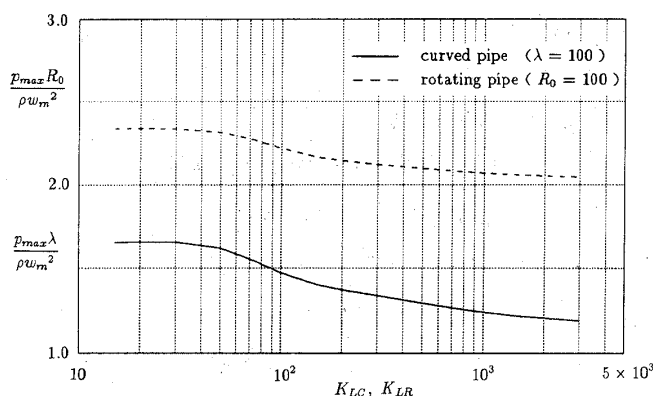
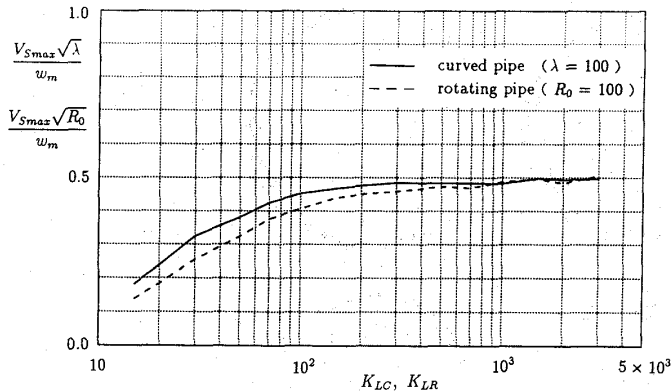
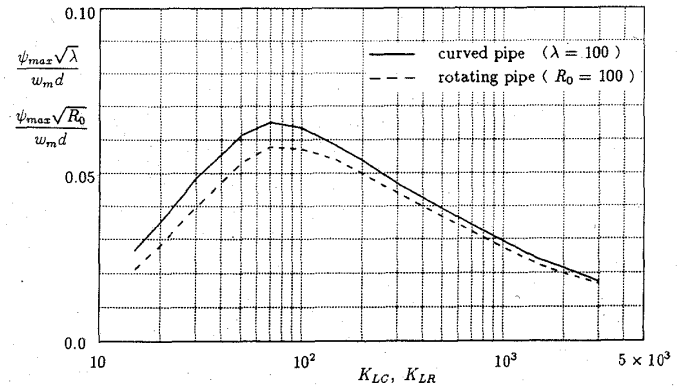


図6 K_L による断面内最大圧力差の変化

7.4 二次流れの速度と流線関数

二次流れの流速 $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ は y 軸近くの壁面近くで最大値をとる。この最大値 V_{max} が K_L によ

り変化する様子を図7に示す。また流線関数の最大値 ψ_{max} の位置は二次流れによる渦の中心にあるが(図4)この ψ_{max} の K_L による変化の様子を図8に示す。図7，図8とも2つの流れにおける

図7 K_L による二次流速最大値 V_s の変化図8 K_L による二次流線関数最大値の変化

V_{max} , ψ_{max} が式(6), (10)の相似変換にもとづいて表示したときに, 同傾向の近接する曲線として表わされることを示している。

8. あとがき

遠心力が作用する曲円管とコリオリ力が作用する直交回転円管内の完全発達層流の相似性を論じた。

流れの特性を記述する各2つの無次元数を定め, 第2の無次元数 λ , R_0 が大きいときに管摩擦係数が単一の式で表わされることを示した。さらに2つの流れの軸速度や二次流線の等高線, 流れの特性をあらわす諸量が K_L の変化に対してよく似た挙動を示すことを明らかにした。

主な記号

d = 円管直径

w_m = 平均軸速度

f_0 = 静止直円管層流の管摩擦係数

$Re = w_m d / \nu$ (レイノルズ数)

Pr = プラントル数

$K_L = K_{LC}, K_{LR}$ の総称

曲管: $K_{LC} = Re / \sqrt{\lambda}$ (デイン数)

$\lambda = R/d$

直交回転管:

$K_{LR} = Re / \sqrt{R_0}$

$R_0 = w_m / \Omega d$ (ロスビー数)

Ω = 回転数

$R_0 = \Omega d^2 / \nu$ (回転レイノルズ数)

引用文献

- 1) Ishigaki and Ueda (1989) Int. Symp. on CFD-Nagoya, p.867.
- 2) 石垣, 山田, 望月(1989)第26回伝熱シンポジウム講演集, p.346.
- 3) 石垣, 田村(1991)日本機械学会論文集, 57-540, p.2523.
- 4) 田村, 石垣(1990)第27回伝熱シンポジウム講演集, p.1030.
- 5) 石垣, 望月(1990)機械学会講演集, 900-59, p.258.
- 6) 望月, 石垣(1991)本論文集.
- 7) 石垣, 望月(1991)日本機械学会講演論文集, 910-17, p.151.
- 8) Patanker, S. V. (1980) Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere.
- 9) Trefethen, L. (1957) General Elet. Company, Rep., No.55 GL350-A, p.1.
- 10) 森・中山(1967)日本機械学会論文集, 33-254, p.1669.
- 11) Ito, H. and Nanbu, K. (1971) J. Basic Engng Trans ASME, ser, D. Vol.93, p.383-394.
- 12) Lei, U. and Hsu, C. H. (1990) Phys. Fluids, A-2, p.63.
- 13) Hart J. E. (1971) J. Fluid Mech., 45, p.341.
- 14) Khesghi, H. S. and Scriven, L. E. (1985) Phys. Fluids, 28, p.2968.
- 15) Speziale, C. G. (1982) J. Fluid Me h., 122, p.251.

- 16) 石垣(1991)日本機械学会講演論文集, 910-17, p. p.54, p.242.
- 17) 日本機械学会(編)管路・ダクトの流体抵抗, p.69. 19) Rosenow, W. M. et al (編) Handbook of Heat Transfer Fundamentals, p.7-128, p.7-154.
- 18) 日本機械学会(編)伝熱工学資料(改訂第4版),

