

UDC 512.3
518.1

航空宇宙技術研究所資料

TM-80

安定制御のための一計算法

檜崎 哲二

1966年3月

航空宇宙技術研究所

既 刊 資 料

TM- 1	高マッハ数風洞について (I)	1961年11月	平橋 木本 一, 清水 福寿 樋口 登雄, 戸川 隼人 三好 甫力, 高橋 利之 能美 良秀, 海洲 三夫, 板垣 芳雄 長洲 良秀, 細川 巖登, 藤田 幸雄
TM- 2	航空技術研究所計数型電子計算機設備 プログラムライブラリー (I)	1962年 2月	甲藤 好郎, 小出 勉 高橋 利之
TM- 4	18cm×20cm 超音速風洞について	1962年 5月	永井 文雄, 小川 鉦一 井中 幸彦, 小原 瑛 林 洋一, 中井 暎一
TM- 5	遷音速流の線型理論	1962年 8月	
TM- 6	18cm×18cm 遷音速風洞整備試験	1962年 8月	
TM- 7	慣性力形疲労試験機	1962年 8月	
TM- 8	アルミ合金の前歴が疲れ寿命におよぼ す実験的研究	1962年 9月	
TM- 9	方向性次元解析と相似解に関する覚書	1963年 2月	
TM-10	DATATRON 205 用 ALGOL 58 使用法について	1963年 2月	
TM-11	光弾性による高速車盤の縞模様	1963年 2月	
TM-12	コーティングの断熱効果に関する実験	1963年 3月	
TM-13	遷音速における 45° 後退角翼の予備的 フラッタ実験	1963年 3月	
TM-14	変断面片持梁固有振動数の一計算方法 について	1963年 3月	
TM-16	フラッタ試験設備測定部変換ノズルの 予備試験	1963年 4月	
TM-17	VTOL 機用 Jet Lift Engine に関す る一考察	1963年 6月	
TM-18	ヘリコプター振動のパワースペクトル 解析	1963年 6月	
TM-19	吹出式超音速風洞による実験データの 処理方式について (I)	1963年 6月	
TM-20	1 m×1 m吹出式超音速風洞における AGARD 標準模型 B 三分力試験	1963年 7月	
TM-21	国産中型輸送機 Y S-11 主翼疲労試験 (第 I 報)	1963年 9月	
TM-24	円輪と薄肉円筒の回転強度の関係	1963年11月	
TM-25	DATATRON 205 用 ALGOL 58 の Procedures ライブラリー	1964年 1月	
TM-26	吹出式風洞の圧力制御 (フラッタ試験 設備の場合)	1964年 1月	
TM-28	一段式観測ロケットの超音速風洞試験	1964年 1月	
TM-29	遷音速フラッタ試験設備の改造および 整備試験	1964年 2月	
TM-30	二段式ロケット飛しょう体の揚力およ び圧力中心推定法	1964年 3月	
TM-31	亜音速ジェット輸送機の遷音速風洞に おける試験	1964年 3月	
TM-32	遷音速風洞の防音	1964年 4月	
TM-33	非定常境界層の遷移の研究に使用され た定温度型熱線風速計について	1964年 4月	
TM-34	極超音速風洞ノズルの境界層補正につ いて	1964年 5月	
TM-37	気体の不完全性を考慮した極超音速風 洞ノズルの設計計算法	1964年 5月	
TM-38	AGARD-A 標準模型の超音速三分力 試験	1964年 6月	
TM-39	相似極超音速流におかれた半球面上の 境界層の遷移に及ぼす粗さと冷却の 結合影響	1964年 7月	
TM-40	国産中型輸送機 Y S-11 胴体疲労試験 (I)	1964年 9月	
TM-41	抵抗線歪ゲージのゲージ率測定	1964年10月	
TM-42	実在着氷条件の測定について	1964年10月	
TM-44	高負荷燃焼器 (アニューラ模型) の実験 結果	1964年12月	
TM-46	翼洞結合金具の疲労特性	1964年12月	
TM-47	ローター後流中のヘリコプター胴体の 抵抗について	1965年 1月	

安定制御のための一計算法*

楯崎 哲二**

まえがき

制御要素を含む飛しょう体の運動を制御するためには、まず制御系そのものが安定でなければならない。制御系が安定であるためには、その系の伝達関数の特性方程式、すなわち、代数方程式のすべての根がある一定領域内に存在しなければならない。制御系における増幅器の利得、機械の armratio、回転比などはパラメータとして、特性方程式の係数に含まれるが、これらのパラメータに数値が与えられると、方程式の根は一義的に定まり、飛しょう体の運動が決定される。したがって、系が不安定もしくは不安定に近く、望ましい運動状態でない場合には、不適当な根を変化させ、系が安定であるような根の値に近づけることが必要である。

このことを別の立場からいえば、安定な制御系を設計するためには、初めに方程式の根の近似値として望ましい値を与え、この値が一定の変動範囲内で方程式の根となるようにパラメータの数値を選定することが必要なのである。

ここでは、与えられた代数方程式の根のいくつかが望ましくない領域にある場合、根を望ましい領域内にまで移動し、そこで根に収束させる一近似計算法すなわち、すべての根が特定の領域内に存在するように、係数に含まれる助変数の値を求める方法について述べる。

1. 実係数の代数方程式が実根を持つ場合

1.1 基礎式

特性方程式 $f(x)=0$ の係数 C_i が K_i を助変数とする一次式で表わされると

$$f(x) = \sum_{i=0}^n C_i x^{n-i} = f(x, K_1, K_2, \dots, K_p) = 0 \quad (1.1)$$

* 昭和41年3月3日受付

** ロケット部

ただし

$$C_i = D_{i0} + \sum_{t=1}^P D_{it} K_t \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$C_0 = 1$$

$$D_{it} \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, n \\ t=1, 2, \dots, P \end{matrix} \right) : \text{定数}$$

ここで $K_t (t=1, 2, \dots, P)$ に任意の実数を与えると (1.1) 式の根 $\alpha'_i (i=1, 2, \dots, n)$ が求まる。これらの根のうち一つの根、たとえば α'_T が望ましくない値であるとする、すなわち $\alpha'_T > 0$ の場合には制御系が不安定となるので、 α'_T を望ましい領域 $\overline{\alpha'_T}$ に近づけることを考える。このためには助変数 K_1, K_2, \dots, K_P を適当に変え、これらに対する (1.1) 式の根を求め試行錯誤法により α'_T を $\overline{\alpha'_T}$ に近づけることは可能であるが、この場合 α'_T 以外の根も付随的に変化し、望ましくない領域に落ちる可能性がある。

そこで α'_T 以外の根はなるべく動かさないで α'_T を $\overline{\alpha'_T}$ に近づけるには、 K_1, K_2, \dots, K_P をいかにすればよいかの計算法を以下に述べる。

(1.1) 式の根の符号を変換すると

$$\alpha_i = -\alpha'_i \tag{1.2}$$

$$f(x) = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \cdots (x + \alpha_i) \cdots (x + \alpha_n) = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \tag{1.3}$$

と書けるから、根と係数の関係より

$$C_i(K_1, K_2, \dots, K_P) = \pi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \tag{1.4}$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

ただし、 $\pi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ は n 個の $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ の中から任意の i 個を取り出し、その積の総和である。

(1.4) 式において、 $P=n$ の場合には $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ に任意の定数を与えることにより K_1, K_2, \dots, K_P を一義的に決定することができる。しかし前に述べたように一般に $P < n$ であるので、 K_1, K_2, \dots, K_P を未知数と見なせば方程式の根が n 個あるので、 K_1, K_2, \dots, K_P を最小自乗法を用いて決める必要がある。

ここでは K_1, K_2, \dots, K_P 以外に $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-P}$ の $(n-P)$ 個の根を未知数と考え、 $\alpha_{n-P+1}, \alpha_{n-P+2}, \dots, \alpha_T, \dots, \alpha_n$ は与えられた定数として (1.4) 式を解くことを考える。ただし、ここで未知数としてどの根を選ぶかは任意である。

(1.4) 式を近似値 ${}_1K_1, {}_1K_2, \dots, {}_1K_P, {}_1\alpha_1, {}_1\alpha_2, \dots, {}_1\alpha_n$ のまわりで展開すると

$$C_i({}_1K_1, {}_1K_2, \dots, {}_1K_P) + \sum_{t=1}^P \frac{\partial C_i}{\partial {}_1K_t} \delta K_t$$

$$= \pi_i(1\alpha_1, 1\alpha_2, \dots, 1\alpha_n) + \sum_{K=1}^n \frac{\partial \pi_i}{\partial 1\alpha_K} 1\delta\alpha_K + 1Q_i \quad (1.5)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

ただし, $1\delta\alpha_K=0$ ($K=n-P+1, n-P+2, \dots, n$)

$$1Q_i = \sum_{K=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial \pi_i}{\partial 1\alpha_K \partial 1\alpha_r} 1\delta\alpha_K \cdot 1\delta\alpha_r + 0(1\delta^3) \dots$$

$1Q_i$ は $1\delta\alpha_K$ に関して2次以上の項であり, これを省略すると (1.5) 式は $1\delta K_t, 1\delta\alpha_K$ の n 個の未知数に関する連立方程式となる。これを解くと

$$\left. \begin{aligned} 1\delta K_t &= \phi_t(1K_1, 1K_2, \dots, 1K_P, 1\alpha_1, 1\alpha_2, \dots, 1\alpha_n) \\ &\quad (t=1, 2, \dots, P) \\ 1\delta\alpha_i &= \phi_{P+i}(1K_1, 1K_2, \dots, K_P, 1\alpha_1, 1\alpha_2, \dots, 1\alpha_n) \\ &\quad (i=1, 2, \dots, n-P) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

なる式で表わされ, K_j, α_K の次の近似値 $2K_j, 2\alpha_K$ は, $1\delta\alpha_i$ の記号を $1\delta_i$ で置き換えると,

$$\left. \begin{aligned} 2K_j &= 1K_j + 1\delta K_j \quad (j=1, 2, \dots, P) \\ 2\alpha_i &= 1\alpha_i + 1\delta_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right) \quad (1.7)$$

ただし $1\delta_i=0$ ($i=n-P+1, n-P+2, \dots, n$)

(1.5) 式または (1.6) 式および (1.7) 式を用いて, いま $1\alpha_i$ の中で望ましくない値の根 $1\alpha_T$ に逐次定数 $j\delta_T$ を加えていくことにより $j\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ の値をあらかじめ決められた望ましい領域内に集めることができる,

さて以上の過程において $1\alpha_T$ を適当にかえ $\overline{\alpha_T}$ にしたとき, 変数である $n-P$ 個の根は必ずしも望ましい領域内に止まるとは限らない。そこで他の $j\alpha_i$ がたとえば $j\alpha_K$ が移動し望ましい領域外に出た場合には, $j\alpha_K$ が領域外に出る前の計算段階で計算を止め, いまままでの計算過程で定数であった α_T 以外の $P-1$ 個の $\alpha_i (i=1, 2, \dots, P-1)$ の中から1個を選び $j\alpha_K$ の代りに変数とし, $j\alpha_K$ は望ましい領域内の定数として計算を再開する。

1.2 (1.5) 式の省略項 Q_i と $f(j\alpha_i, jK_1, jK_2, \dots, jK_P)$ との関係

(1.5) 式の Q_i を省略項として計算した場合, 得られた $j\alpha_i$ および jK_i を (1.1) 式に代入すると0とならずに誤差を生ずる。この誤差は計算の各ステップにおいて省略項 $jQ_i (j=1, 2, \dots)$ によって生ずる誤差の累積したものとは関係なく, j ステップにおける省略項 jQ_i によって生ずる誤差だけのものであることを次に述べる。

さて (1.5) 式および (1.7) 式によって得られた $j+1K_i (t=1, 2, \dots, P)$ および $j+1\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ を (1.1) 式および (1.3) 式に代入した場合の誤差については

$$\begin{aligned}
& f(x, {}_{j+1}K_1, {}_{j+1}K_2, \dots, {}_{j+1}K_P) - f(x, {}_{j+1}\alpha_1, {}_{j+1}\alpha_2, \dots, {}_{j+1}\alpha_n) \\
&= \sum_{i=0}^n {}_{j+1}C_i x^{n-i} - (x + {}_{j+1}\alpha_1)(x + {}_{j+1}\alpha_2) \dots (x + {}_{j+1}\alpha_n) \\
&= \sum_{i=0}^n {}_{j+1}C_i x^{n-i} - \sum_{i=0}^n {}_{j+1}\pi_i x^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^n \{ {}_{j+1}C_i - {}_{j+1}\pi_i \} x^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^n \left\{ {}_j C_i + \sum_{m=1}^P \frac{\partial_j C_i}{\partial_j K_m} {}_j \delta K_m - {}_j \pi_i - \sum_{m=1}^n \frac{\partial_j \pi_i}{\partial_j \alpha_m} {}_j \delta_m \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2_j \pi_i}{\partial_j \alpha_k \partial_j \alpha_r} {}_j \delta_k {}_j \delta_r + 0(\delta^3) \right\} x^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^n \left\{ {}_j C_i + \sum_{m=1}^P \frac{\partial_j C_i}{\partial_j K_m} {}_j \delta K_m - {}_j \pi_i - \sum_{m=1}^n \frac{\partial_j \pi_i}{\partial_j \alpha_m} {}_j \delta_m \right\} x^{n-i} \\
&\quad - \sum_{i=1}^n {}_j Q_i x^{n-i} \tag{1.8}
\end{aligned}$$

(1.8) 式の右辺第1項の係数は (1.5) 式に等しく、0 となるから、誤差項としては第2項のみとなる。

これを ${}_j g$ と定義する。

$${}_j g = \sum_{i=1}^n {}_j Q_i x^{n-i} \tag{1.9}$$

また $-{}_{j+1}\alpha_i$ を x に代入した場合は次のように定義する。

$${}_j g_i = {}_j g(-{}_{j+1}\alpha_i) = \sum_{K=1}^n {}_j Q_{Kj} \alpha_i^{n-K}$$

さて (1.5) 式を解くことは、(1.8) 式の右辺第1項の係数を0として解くことであり (1.8) 式より次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
f(x, {}_{j+1}K_1, \dots, {}_{j+1}K_P) &= \sum_{i=0}^n {}_{j+1}C_i x^{n-i} \\
&= (x + {}_{j+1}\alpha_1)(x + {}_{j+1}\alpha_2) \dots (x + {}_{j+1}\alpha_n) - {}_j g \\
&= f(x, {}_{j+1}\alpha_1, {}_{j+1}\alpha_2, \dots, {}_{j+1}\alpha_n) - {}_j g \tag{1.10}
\end{aligned}$$

すなわち (1.5) 式を解くことは、厳密には (1.10) 式の係数比較の式より ${}_j \delta K_t (t=1, 2, \dots, P)$, ${}_j \delta_i (i=1, 2, \dots, n)$ を求めることである。

上式に $-{}_{j+1}\alpha_i$ を代入すれば

$$f(-{}_{j+1}\alpha_i, {}_{j+1}\alpha_1, {}_{j+1}\alpha_2, \dots, {}_{j+1}\alpha_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

であるから、(1.10) 式は

$$f(-_{j+1}\alpha_i, {}_{j+1}K_1, {}_{j+1}K_P) = {}_jg(-_{j+1}\alpha_i) = {}_jg_i$$

この ${}_jg_i$ によって j 回目の計算における誤差を調べることができる。また $j+1$ 回目の計算では ${}_{j+1}g$ が誤差項になっているが、上の式からわかるように、 j 回目の計算では誤差項であった ${}_jg$ が $j+1$ 回目の計算では計算の中に繰り込まれている。すなわち計算回数の増大に伴って ${}_jg$ の x に $-\alpha_i$ を代入した値 ${}_jg_i$ の絶対値が 0 となれば $-\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ は $f(x, {}_jK_1, \dots, {}_jK_P) = 0$ の根になる。

2. 根 α_i が複素数である場合

2.1 基礎式

根が複素数である場合については、 $j-1$ 回目の計算で得られる ${}_j\alpha_i$ の値を実数部と虚数部とに分けると

$$\begin{aligned} {}_j\alpha_i &= {}_j\alpha_{iR} + j{}_j\alpha_{iI} && \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, n \\ j=1, 2, \dots \end{pmatrix} && (2.1) \\ j^2 &= -1 \end{aligned}$$

${}_j\alpha_{iI}$ は ${}_j\alpha_i$ の虚数部を表わし、 ${}_j\alpha_{iR}$ は実数部を表わすものとする。変数 δ_i も同様に

$$\delta_i = \delta_{iR} + j\delta_{iI} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.2)$$

また、 ${}_j\delta_i (i=1, 2, \dots, n)$ を j 回目の計算で得られた値とすると、

$${}_j\delta_i = {}_j\delta_{iR} + j{}_j\delta_{iI} \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, n \\ j=1, 2, \dots \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

さて根が複素数の場合 (1.5) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} C_i + \frac{\partial C_i}{\partial K} \delta K_1 + \dots, + \frac{\partial C_i}{\partial K_P} \delta K_P \\ = \frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{1I}} \delta_{1I} + \dots, + \frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{nI}} \delta_{nI} + \frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{1R}} \delta_{1R} + \dots, + \frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{nR}} \delta_{nR} + \pi_i \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

()_R および ()_I はそれぞれ () 内の実数部および虚数部を表わすこととし、かつ ()_I は虚数符号を除いた数値を示すものとするれば次のような実数の連立方程式ができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C_i}{\partial K_1} \delta K_1 + \dots, + \frac{\partial C_i}{\partial K_P} \delta K_P - \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{1R}} \right)_R \delta_{1R} \dots, - \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{nR}} \right)_R \delta_{nR} \\ + C_i - (\pi_i)_R + \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{1I}} \right)_I \cdot \delta_{1I} + \dots, + \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{nI}} \right)_I \cdot \delta_{nI} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{1R}} \right)_I \cdot \delta_{1R} + \dots, + \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{nR}} \right)_I \cdot \delta_{nR} + (\pi_i)_I + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_{1I}} \right)_R \cdot \delta_{1I} \dots \\ & \dots, + \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{nI}} \right)_R \cdot \delta_{nI} = 0 \end{aligned} \right\} \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

さて n 個の α_i 中で特定の α_T の実数部または虚数部の値を変化させたい場合、(2.4) 式は実数で表わされるから、実数部であるか虚数部であるかにかかわらずその変化量は実数として (2.4) 式に表わすことができる。その変化量をここでは δ_T とする。

次に (2.4) 式の係数および変数を統一し、 $2n+P$ 個 (付録参照) の変数 $\delta_i (i=1, 2, \dots, 2n+P)$ より、1 個の定数 δ_T と $2n$ 個の変数を選びその他の変数を 0 または定数とすると、(2.4) 式はさらに簡単な式に表わせる。

次式は $2n$ 個の変数を選び、 δ_T を定数とし他を一般性を失うことなく 0 とした場合について示す。

$$\left. \begin{aligned} & a_{1.1} \cdot \delta_1 \dots + a_{1.P} \cdot \delta_P + a_{1.P+1} \cdot \delta_{P+1} \dots + a_{1.2n} \cdot \delta_{2n} + \varepsilon_1 + a_{1.T} \cdot \delta_T = 0 \\ & a_{2.1} \cdot \delta_1 \dots + a_{2.P} \cdot \delta_P + a_{2.P+1} \cdot \delta_{P+1} \dots + a_{2.2n} \cdot \delta_{2n} + \varepsilon_2 + a_{2.T} \cdot \delta_T = 0 \\ & \vdots \\ & a_{n.1} \cdot \delta_1 \dots + a_{n.P} \cdot \delta_P + a_{n.P+1} \cdot \delta_{P+1} \dots + a_{n.2n} \cdot \delta_{2n} + \varepsilon_n + a_{n.T} \cdot \delta_T = 0 \\ & \vdots \\ & a_{n+1.P+1} \cdot \delta_{P+1} \dots + a_{n+1.2n} \cdot \delta_{2n} + \varepsilon_{n+1} + a_{n+1.T} \cdot \delta_T = 0 \\ & \vdots \\ & a_{2n.P+1} \cdot \delta_{P+1} \dots + a_{2n.2n} \cdot \delta_{2n} + \varepsilon_{2n} + a_{2n.T} \cdot \delta_T = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

2.2 誤差項 jg と根の関係

(2.5) 式の計算を繰り返す場合、実数の場合と全く同様にして次のような関係式が得られる。

$$f(x, {}_{j+1}K_1, \dots, {}_{j+1}K_P) = f(x, {}_{j+1}\alpha_1, \dots, {}_{j+1}\alpha_n) - jg \quad (2.6)$$

(2.6) 式に $-{}_{j+1}\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ を代入すると

$$f(-{}_{j+1}\alpha_i, {}_{j+1}\alpha_2, \dots, {}_{j+1}\alpha_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

であるから

$$f(-{}_{j+1}\alpha_i, {}_{j+1}K_1, \dots, {}_{j+1}K_P) = jg({}_{j+1}\alpha_i) \quad (2.7)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} jg(-{}_{j+1}\alpha_i) = 0$$

ならば $\infty\alpha_i$ は方程式 (1.1) 式に $\infty K_t (t=1, 2, \dots, P)$ を代入した場合、その方程式の根となる。

2.3 ${}_j\alpha_i$ が $f(x, {}_jK_1, \dots, {}_jK_P) = 0$ の根であるための条件

(2.5) 式の係数の行列式を $|a_{iK}|$ とすれば

$$|a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n.1} & \cdots & \cdots & a_{2n.2n} \end{vmatrix}$$

また, $|a_{ik}|$ の余因子は

$$\bar{a}_{ik} = (-1)^{i-K} \Delta_{ik}$$

ここで Δ_{ik} は $|a_{ik}|$ の第 i 行および K 列を省いてできる $n-1$ 次の小行列式である。

(2.5) 式より δ_i を求める式は次のように書き換えられる。

$$\delta_i = -\frac{\sum_{j=1}^{2n} \bar{a}_{ji} \cdot a_{jT}}{|a_{ik}|} \delta_T - \frac{\sum_{j=1}^{2n} \bar{a}_{ji} \cdot \varepsilon_j}{|a_{ik}|} \quad (2.8)$$

前に述べたごとく δ_T の値に逐次定数を与えることにより ${}_j\delta_i$ の値を求め, ${}_j\alpha_i$ の値を望ましい領域内の値にするのであるが, すべての ${}_j\alpha_i$ が望ましい領域内にはいった場合には, 次には領域内で ${}_j\alpha_i$ を方程式の根に収束させなければならない。 N 回目の計算ですべての ${}_N\alpha_i$ が望ましい領域内にはいっているとすると $N+1$ 回目からは ${}_{N+1}\delta_T$ に与えられる値は非常に小さな値かまたは 0 でよい。

さて, ${}_j\delta_T = 0$ ($j = N+1, N+2, \dots$) であれば ${}_j\delta_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) は (2.8) 式の第 2 項だけによって決まり, ${}_{j+1}\alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は次のように表わせる。

$${}_{j+1}\alpha_i = {}_j\alpha_i - \frac{\sum_{j=1}^{2n} \bar{a}_{ji} \varepsilon_j}{|a_{ik}|}$$

ここで

$$\phi_i({}_j\alpha_1, {}_j\alpha_2, \dots, {}_j\alpha_n) = {}_j\alpha_i - \frac{\sum_{j=1}^{2n} \bar{a}_{ji} \varepsilon_j}{|a_{ik}|}$$

とし, 領域内に ${}_j\alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) の固定点 ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) すなわち

$$\omega_i = \phi_i(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

があるとすると,

$${}_{j+1}\alpha_i = \omega_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi_i(j\hat{s}_1, j\hat{s}_2, \dots, j\hat{s}_n)}{\partial j\hat{s}_k} ({}_j\alpha_i - \omega_i)$$

ただし $\omega_i < j\hat{s}_i < {}_j\alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$${}_{j+1}\alpha_i - \omega_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi_i(j\hat{s}_1, j\hat{s}_2, \dots, j\hat{s}_n)}{\partial j\hat{s}_k} ({}_j\alpha_i - \omega_i)$$

ここで

$${}_j\Phi_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi_i(j\xi_1, j\xi_2, \dots, j\xi_n)}{\partial j\xi_k}$$

とすれば

$${}_{j+1}\alpha_i - \omega_i = {}_j\Phi_i({}_j\alpha_i - \omega_i)$$

$${}_j\alpha_i - \omega_i = {}_1\Phi_i \cdot {}_2\Phi_i \cdot \dots \cdot {}_j\Phi_i({}_1\alpha_i - \omega_i)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

$|{}_1\Phi_i|, |{}_2\Phi_i|, \dots, |{}_j\Phi_i|$ の最大値を $\Phi_{i \max}$ とし, $\Phi_{i \max} < 1$ ($i=1, 2, \dots, n$)

ならば

$$|{}_j\alpha_i - \omega_i| \leq \Phi_{i \max}^j ({}_1\alpha_i - \omega_i) \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

となり, ${}_j\alpha_i \rightarrow \omega_i$ ($j \rightarrow \infty$) となる。よって ${}_j\alpha_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) が固定点 ω_i に収束するための条件は次のようになる。

$$|{}_1\Phi_i|, |{}_2\Phi_i|, \dots, |{}_j\Phi_i| < 1 \quad (2.9)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

3. 計 算 例

この計算例としては、ロケット飛しょう体のピッチングのみを考えて、その計算法を確かめてみた。

3.1 例 1

重力の場における飛しょう体のピッチング運動の簡単化された伝達関数を示すと、

$$G(s) = \frac{W_{P\delta}(s + W_{L\alpha} + W_g - \frac{W_{P\alpha} \cdot W_{L\delta}}{W_{P\delta}})}{s^3(W_{L\alpha} + W_g + W_{PQ})s^2 + (W_{PQ}W_{L\alpha} + W_{PQ}W_g + W_{P\alpha})s + W_{P\alpha}W_g} \quad (3.1)$$

飛しょう体の安定性はこの特性方程式、すなわち分母によって決まる。

$$s^3 + (W_{L\alpha} + W_g + W_{PQ})s^2 + (W_{PQ}W_{L\alpha} + W_{PQ}W_g + W_{P\alpha})s + W_{P\alpha}W_g \quad (3.2)$$

ただし

$$W_{L\alpha} = \frac{K_{L\alpha} + T}{mV} \quad K_{L\alpha} = C_{L\alpha}qA$$

$$W_{PQ} = \frac{K_{mq}}{I_y} \quad K_{mq} = -C_{mq}qAL \left(\frac{L}{2V} \right)$$

$$W_{P\alpha} = \frac{K_{m\alpha}}{I_y} \quad K_{m\alpha} = C_{m\alpha}qAL$$

$$W_0 = -\frac{g}{V}$$

(3.2) 式で $W_{L\alpha}$ を助変数として W_{PQ} , W_{Pa} , W_0 を定数とし、式を簡単化すると

$$S^3 + (K + C_1)S^2 + (W_{PQ}K + C_2)S + C_3$$

さらに $W_{PQ} = 1/2$, $C_1 = C_2 = -0.26$, $C_3 = 0.0013$ とすると代数方程式として次のように表わされる。

$$f(x) = x^3 + (-0.26 + K)x^2 + (-0.26 + \frac{1}{2}K)x + 0.0013 \quad (3.3)$$

ここで ${}_0K = 0.6$ とすると、この近似根は ${}_0\alpha'_1 = -0.10$, ${}_0\alpha'_2 = -0.11$, ${}_0\alpha'_3 = -0.12$ である。

この近似根はアナログ計算機で簡単に求めることができる。

(a) この計算の目的は前に述べた計算方法により、 ${}_j\delta_i (j=1, 2, \dots)$ に逐次、定数を与え ${}_j\alpha_3$ の値を一定区間 $\bar{\alpha}_i$ 内に变化させ、 $0.12 < {}_j\alpha_3 < 0.133$ とすることであり、さらに計算回数 j の増大とともに ${}_j\alpha_i (i=1, 2, 3)$ を方程式の真の根に近づけることである。

${}_j\delta_3 (j=1, 2, \dots)$ として次の数値を逐次与える。

${}_j\delta_3 (j=1, 2, \dots) : 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-4}, 0, 0, 0, \dots$

${}_0\alpha_i (i=1, 2, 3)$ および ${}_j\delta_3$ の値を用いて、デジタル計算機で計算した結果は図 1 (a) に示すごとくである。

ここで、 ${}_jg_i$ は $-{}_j\alpha_i$ および ${}_jK$ を (1.1) 式の $f(x)$ に代入した場合の値であり誤差を意味する。この図では、 ${}_j\alpha_i$, ${}_j\delta_i$ および ${}_jK$ の値は絶対値を示してある。 δ_1 , δ_2 および δK は計算回数の増加に従って小さくなり、 10^{-8} ぐらいになっている。これに伴って、 ${}_jg_1$, ${}_jg_2$, ${}_jg_3$ も小さくなり $10^{-10} \sim 10^{-11}$ になっている。計算回数 $j=6$ 以後では α_i は一定値に収束し、 $j=8$ では ${}_8\alpha_1 = 8.5227496 \times 10^{-2}$, ${}_8\alpha_2 = 1.1625986 \times 10^{-1}$, ${}_8\alpha_3 = 1.3120000 \times 10^{-1}$ となっている。

${}_j\delta_1$ は十分に小さな値であるが、0 に収束しないのは (2.8) 式の右辺第 2 項の収束性によるものであると考えられる。

(b) ${}_0\alpha_i (i=1, 2, 3)$ の値として (a) に比べてやや真の値とは離れた値を与える。すなわち ${}_0g_i$ の値を (a) におけるよりも大きな値とした場合の ${}_jg_i$ の 0 への収束性を (a) の場合と比べる。 ${}_0\alpha_i (i=1, 2, 3)$ および ${}_0K$ として次の値を与える。

$${}_0\alpha_1 = 0.25, \quad {}_0\alpha_2 = 0.24, \quad {}_0\alpha_3 = 0.23, \quad {}_0K = 0.6$$

${}_j\delta_3$ としては逐次、次の値を与える。

${}_j\delta_3 (j=1, 2, \dots) : 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-4}, 0, 0, 0, 0$

図 1 (b) に見られるごとく、 j とともに ${}_jg_i$ は十分小さな値にならず、 ${}_j\alpha_i$ は一定値に収束しない。

(c) ${}_0\alpha_i (i=1, 2, 3)$ の値を (a) の値よりも小さな値を与え ${}_0g_i$ の値を大きくした。 ${}_0\alpha_i (i=1,$

2, 3) および ${}_j\delta_3(j=1, 2, \dots)$ の値を次のように与える。

$${}_0\alpha_1=0.050, \quad {}_0\alpha_2=0.051, \quad {}_0\alpha_3=0.052, \quad {}_0K=0.6$$

$${}_j\delta_3(j=1, 2, \dots): 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 0, 0, 0, 0$$

この結果は図 1(c)に示すごとく, ${}_jg_1, {}_jg_2$ が十分小さな値とならず ${}_j\alpha_i$ は一定値に収束しない。

(d) ${}_j\alpha_i$ の収束性を良くするために各計算段階で δ_i の絶対値の減小の傾向を調べながら計算を行なった。 ${}_0\alpha_i$ として次の値を与える

$${}_0\alpha_1=0.10, \quad {}_0\alpha_2=0.11, \quad {}_0\alpha_3=0.12, \quad {}_0K=0.6$$

${}_j\delta_3$ としては逐次, 数値を次のように与えた。

$${}_j\delta_3(j=1, 2, \dots): \pm 10^{-2}, \pm 10^{-2}, \pm 10^{-3}, 10^{-4}, \pm 10^{-4}, \pm 10^{-4}, 0, 0, 0$$

ここで±の符号のいずれを選ぶかは, まず両方の符号について計算し, (2.8) 式の右辺第 2 項の値を求める。その値を A_j および B_j とすると,

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{2n} -\bar{a}_{i, j+P} \cdot \varepsilon_i}{|a_{i, k}|} \right| = \begin{cases} A_j(j=1, 2) & +\delta_3 \text{ の場合} \\ B_j(j=1, 2) & -\delta_3 \text{ の場合} \end{cases}$$

$A_j(j=1, 2)$ の最大値を A_{max} とし, $B_j(j=1, 2)$ の最大値を B_{max} として, A_{max} と B_{max} を比較し A_{max} が小さければ $+\delta_3$ を, B_{max} が小さければ $-\delta_3$ を選び前節と同様に計算を繰り返す ${}_j\alpha_i(i=1, 2, 3), (j=1, 2, \dots)$ を求める。この結果を図 2(a)に示す。

(e) ${}_0\alpha_i$ および ${}_0K$ には (a) と同じ値を与え, ${}_j\delta_3$ の数値を次のように逐次与え, ${}_j\alpha_3$ の最終値 ${}_j\alpha_3$ を変えて(d)に比べ変化分を大きくし(d)と同じ計算を行なった。その結果を図 2(b)に示す。

$${}_j\delta_3(j=1, 2, \dots): \pm 10^{-2}, \pm 10^{-2}, 10^{-3}, \pm 10^{-3}, \pm 10^{-4}, \pm 10^{-4}, \pm 10^{-5}, \pm 10^{-5}, \pm 10^{-5}, 0, 0$$

(f) ${}_j\alpha_3$ の最終値 ${}_j\alpha_3$ をさらに変えて, 変化分を大きくし(d)と同様の計算を行なったその結果を図 2(c)に示す。 ${}_j\delta_3$ としては次のような値を与えた。

$${}_j\delta_3(j=1, 2, \dots): \pm 10^{-2}, \pm 10^{-2}, \pm 10^{-2}, \pm 10^{-3}, \pm 10^{-3}, \pm 10^{-3}, \pm 10^{-4}, 10^{-4}, \\ \pm 10^{-5}, \pm 10^{-5}$$

以上の結果から次のことが言える。(a), (d), (e), および(f)のおのおのでは, 最初に与える近似値 ${}_0\alpha_i(i=1, 2, 3)$ および ${}_0K$ は (1.1) 式 $f(x)=0$ を満足する値に近く, したがって ${}_jg_i$ の値は小さくなり ${}_j\alpha_i$ は j の増大に伴って一定値に収束している。このことは最初に与える ${}_0\alpha_i(i=1, 2, 3)$ および ${}_0K$ は $f(x)=0$ を満足する値の近似値であること, すなわち ${}_0g_i$ が十分小さな値であることが要求される。

計算過程において ${}_j\alpha_i$ の収束性が良くない場合には (d), (e), (f) におけるごとく, ±の両符号について計算し, ${}_jg_i$ が常に減小の傾向になる計算をすることができる。

3.2 例 2

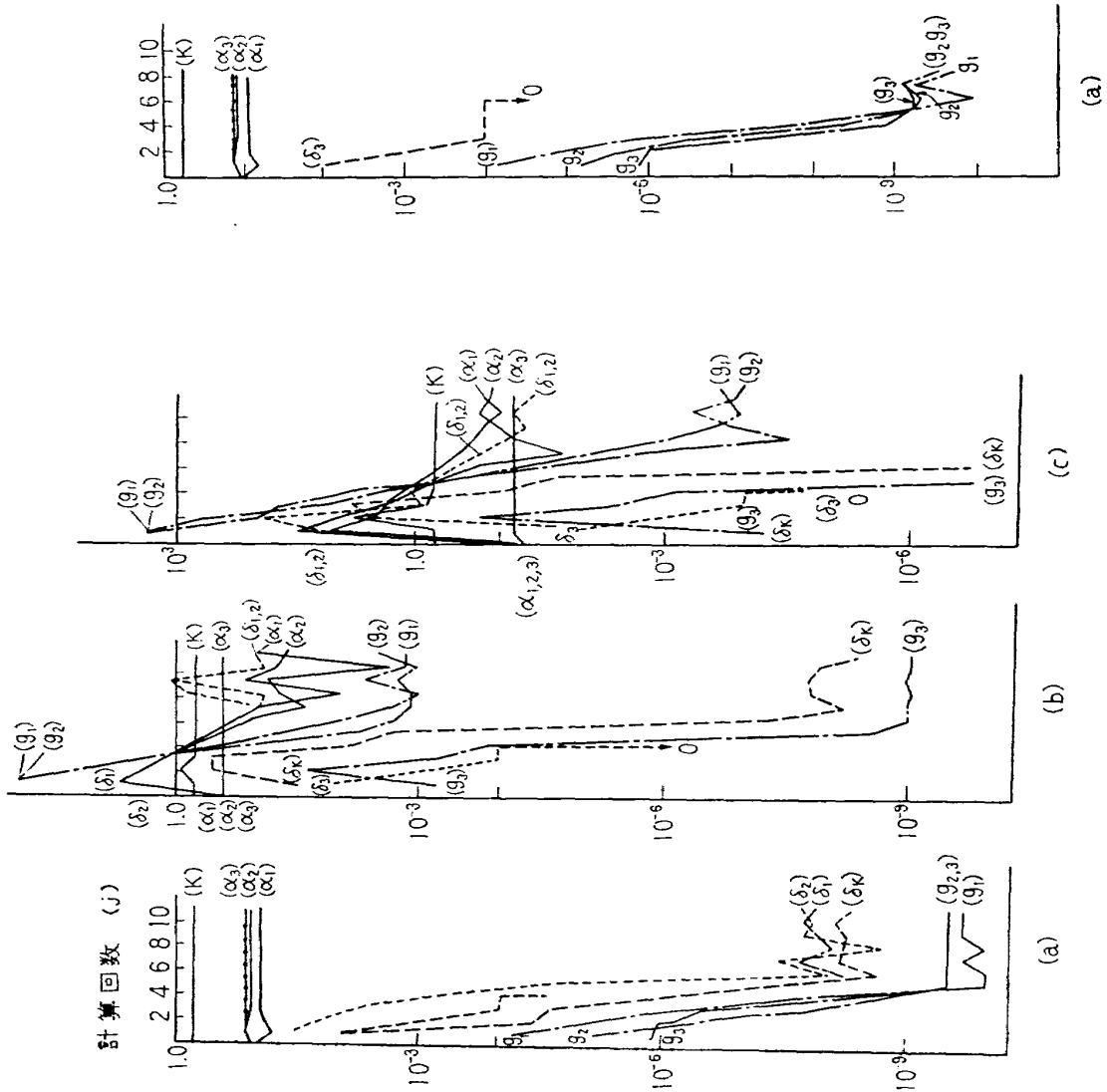


図 1

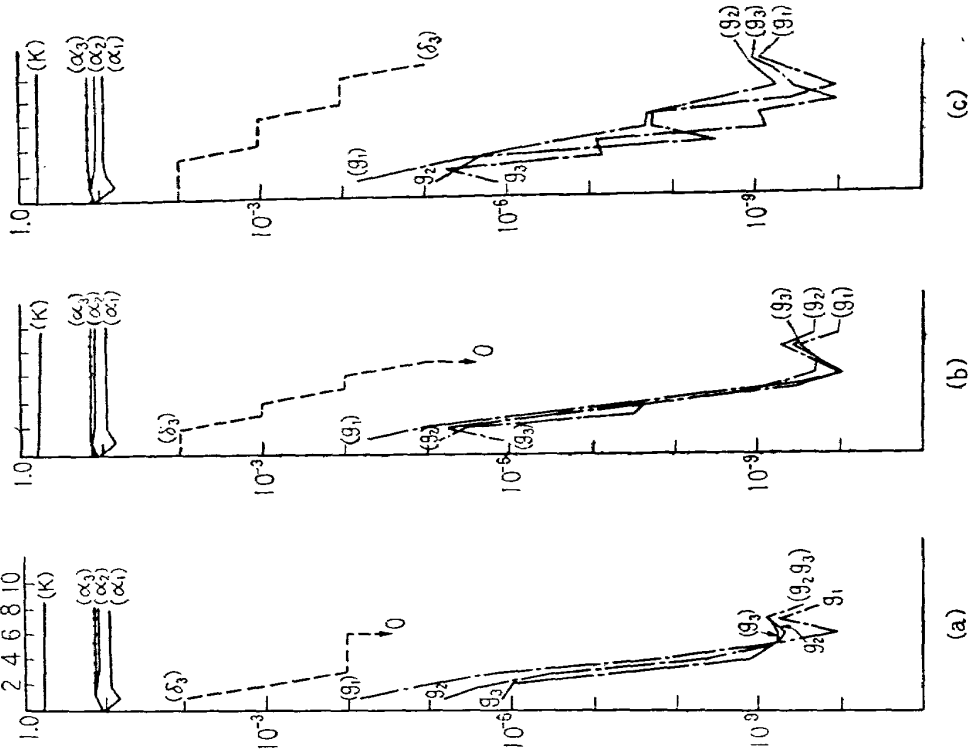


図 2

根が複素数であり、2個の助変数を含む3次の代数方程式が次式で与えられるとすると、

$$f(x) = x^3 + (2 + \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2)x^2 + (3 + \frac{1}{2}K_1 + K_2)x + 0.021 \quad (3.5)$$

上式の根を $-\alpha_A$, $-\alpha_B$, $-\alpha_C$ とし

$$\left. \begin{aligned} \alpha_A &= \alpha_1 + j \cdot \alpha_4 \\ \alpha_B &= \alpha_2 + j \cdot \alpha_5 \\ \alpha_C &= \alpha_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

ただし、 α_1 , α_2 , α_3 は実数部

α_4 , α_5 は虚数部

初めの値として ${}_0\alpha_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$, K_1 , K_2 にそれぞれ次の値を与える。

$${}_0\alpha_1 = 0.100 \quad {}_0K_1 = -0.88$$

$${}_0\alpha_2 = 0.101 \quad {}_0K_2 = -2.57$$

$${}_0\alpha_3 = 0.102$$

$${}_0\alpha_4 = 0.103$$

$${}_0\alpha_5 = -0.104$$

さらに ${}_j\delta_1$ に次のように順次、定数を与え、他の ${}_j\delta_i$ を求める。

$${}_1\delta_1 = 0.01$$

$${}_2\delta_1 = 0.001$$

⋮

$${}_j\delta_i = 10^{-(j+1)}$$

各計算段階において得られた ${}_j\alpha_A$, ${}_j\alpha_B$, ${}_j\alpha_C$ および K_1 , K_2 を (4.5) 式に代入し、得られる値を誤差とする。

$$f(-\alpha_A) = g_{AR} + g_{AI}$$

$$f(-\alpha_B) = g_{BR} + g_{BI}$$

$$f(-\alpha_C) = g_{CR} + g_{CI}$$

R は実数部を表わし、 I は虚数部を表わす。

計算回数を横軸に取り、縦軸に誤差 g の絶対値を取り、計算回数とともに ${}_jg$ の減少する状態を計算し図3に示した。

3.3 計算の結果

${}_j\delta_1$ は j の増加とともに小さな値となり $\lim_{j \rightarrow \infty} {}_jg \rightarrow 0$ となったが、 δK_i の変動が比較的大きな値を示し、得られた根 $-\alpha_i$ および ${}_jK_i$ を $f(x)=0$ に代入したときの誤差は ${}_j\delta K_i$ の大きさに影響されている。 $f(x)=0$ の誤差をさらに小さくするためには方程式の根 α_i について変換して最初に与える ${}_0\alpha_i$ をさらに小さなものとして与えなければならない。

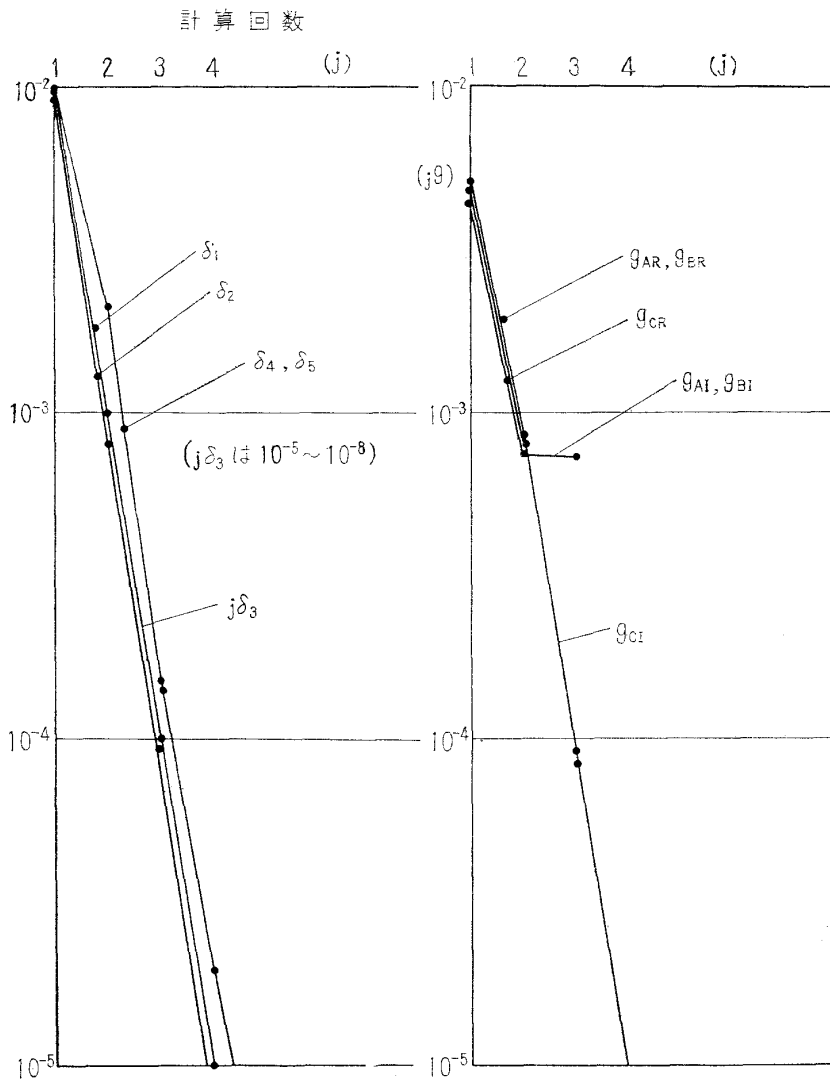


図 3

む す び

この論文で述べた近似計算法は代数方程式の根またはその近似値を与えられた一定区間内に変化させ、それが方程式の根となるように方程式の係数の助変数を求めるものである。この場合、 n 次の方程式の各係数に含まれる助変数が n 個以上である場合には、根の値を任意に定めて係数比較の連立方程式より助変数の値を求めることができる。しかし、制御系においては助変数の数 P は n より少ない場合が多い。また助変数が 2 個以上の場合には係数比較の式から、 n 次の代数方程式を導き、いくつかの助変数の値を変えながら同時に任意の根の値を変化させ、他のすべての根を求める方法もある。しかし、このように代数方程式を繰り返して解く方法に比べれば、本論文の近似法により解くほうがよりすぐれた方法である。

この方法を制御系の安定問題に適用すれば制御系の安定性が良くなるように助変数の値を定める

ことができる。

最後に長い期間ご指導下さった東京大学地震研究所の吉山教授，当所計測部樋口部長，ロケット部黒田部長に深く感謝の意を表す。

文 献

- 1) Booth, A. D : Numerical Methods (1955) pp. 142~159 Butter woaths, London
- 2) Tsien. H. S : Engineering Cybernetice (1954) pp. 7~11 Mc Graw-Hill
- 3) 日本数学会：数学辞典（昭和36） pp. 44. 46. 47 岩波書店
- 4) 遠藤宏二：ロケット工学（昭和35年） pp. 516~520 日刊工業新聞社

付 録

(2.4) 式の係数についてそれぞれ次のように置き換える。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_i}{\partial K_j}\right) &= a_{ij} & (i=1, 2, \dots, n) \\ & & (j=1, 2, \dots, P) \\ -\left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{jR}}\right)_R &= a_{i, j+P} & (i=1, 2, \dots, n) \\ & & (j=1, 2, \dots, n) \\ \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{jI}}\right)_I &= a_{i, j+P+n} & (i=1, 2, \dots, n) \\ & & (j=1, 2, \dots, n) \\ \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{jR}}\right)_I &= a_{i+n, j+P} & (i=1, 2, \dots, n) \\ & & (j=1, 2, \dots, n) \\ \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial \alpha_{jI}}\right)_R &= a_{i+n, j+P+n} & (i=1, 2, \dots, n) \\ & & (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

変数 δK_i , δ_{iI} , δ_{iR} については，

$$\begin{aligned} \delta K_i \ (i=1, 2, \dots, P) &\longrightarrow \delta_i \quad (i=1, 2, \dots, P) \\ \delta_{iR} \ (i=1, 2, \dots, n) &\longrightarrow \delta_{i+P} \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \delta_{iI} \ (i=1, 2, \dots, n) &\longrightarrow \delta_{i+P+n} \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

とし， $2n+P$ 個の変数 $\delta_i (i=1, 2, \dots, 2n+P)$ に書き換える。 ε_i を次のようにする。

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= C_i - (\pi_i)_R & (i=1, 2, \dots, n) \\ \varepsilon_{n+i} &= (\pi_i)_I & (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

<p>I. 植崎哲二 II. NAL TM-80 III. 512. 3 518. 1</p>	<p>NA L T M-80 航空宇宙技術研究所 安定制御のための一計算法 1966年3月 14ページ</p>	<p>制御系が望ましい安定状態であるためにはこの制御系の特性方程式の根が一定区間に存在しなければならぬ。そこで方程式の係数に関する式として根および係数に含まれる助変数を変数とする連立方程式を導き、これを反復計算し、根を一定区間に存在させるようにする。これを近似計算で行なった。</p>	<p>I. 植崎哲二 II. NAL TM-80 III. 512. 3 518. 1</p>
<p>I. 植崎哲二 II. NAL TM-80 III. 512. 3 518. 1</p>	<p>NA L T M-80 航空宇宙技術研究所 安定制御のための一計算法 1966年3月 14ページ</p>	<p>制御系が望ましい安定状態であるためにはこの制御系の特性方程式の根が一定区間に存在しなければならぬ。そこで方程式の係数に関する式として根および係数に含まれる助変数を変数とする連立方程式を導き、これを反復計算し、根を一定区間に存在させるようにする。これを近似計算で行なった。</p>	<p>I. 植崎哲二 II. NAL TM-80 III. 512. 3 518. 1</p>

TM-48	極超音速風洞用ペブル加熱器の予備実験	1965年2月	平林山一, 橋本登, 林二, 吉永, 山口富夫, 岡遠, 幸尾治朗, 鎌田一, 照中祐之, 井井一, 田幸, 井井一, 高島, 泉谷日出夫, 高島, 原巨利, 板垣芳雄, 近藤
TM-49	Queen-Air 機の失速特性について	1965年2月	武藤洋治郎, 池田為治, 坂元思無邪, 光山敏, 河崎俊夫, 谷
TM-50	LS-A 型ロケットの曲げ剛性および振動試験について	1965年5月	石田誠, 河野哲雄
TM-51	超音速風洞空力データ表示記録装置	1965年5月	曾我 国男
TM-53	ベクトルのノルムと行列のノルム —数値解法の収束条件その他への応用—	1965年5月	斎藤秀夫, 木村友昭, 近藤博, 増田惣平
TM-54	熱衝撃試験用風洞整備試験	1965年5月	原 巨利, 高島一, 関根英夫, 中 正, 戸川保子, 矢沢健司, 広末健一, 吉田征, 塚野雄四郎, 能村一, 佐野別府信宏, 江川幸一
TM-55	ロケット模型風洞試験における超音速相似則の応用	1965年5月	飯田宗四郎
TM-56	2024-T4アルミニウム合金平滑丸棒の常温回転曲げ疲労試験	1965年7月	池田為治, 坂元思無邪, 光山敏雄, 宮地敏雄, 武内澄夫, 二, 星谷昌隆, 堀内正司, 斎藤浩子, 計測部, 中村浩子, 機体第一部, 原動機部, 戸川隼人, 石黒登美子
TM-57	極超音速における軸対称物体の前面抵抗	1965年7月	田寺木一, 泉日出夫
TM-58	試験用飛しょう体の超音速風洞試験	1965年8月	武内澄夫, 宮地敏雄, 星谷昌隆, 清水福寿, 牛田健二, 吉永崇, 小川 鈺一
TM-59	ジェットリフトエンジン空気取入口の実験 (I)	1965年9月	田畑浄治, 桜井善雄, 三浦雅男, 森 幹彦, 堀川勇壮, 中野佳直, 新田慶治
TM-60	吹出式超音速風洞における実験データの処理方式について (II)	1965年9月	新田慶治
TM-61	クインエア機の風洞試験	1965年9月	
TM-62	高温歪ゲージの温度特性試験	1965年10月	
TM-63	2024-T3アルミニウム合金の有孔補強平板の軸荷重による疲労特性	1965年10月	
TM-64	応力集中による材料の疲れ強さに関する一実験 (I)	1965年10月	
TM-65	ジェットエンジンの翼の固有振動に関する実験	1965年11月	
TM-69	質量分析計による水蒸気を含む試料のガス分析	1965年12月	
TM-71	可動アイアンバードの構造および機能	1965年12月	
TM-72	地上付近の風の影響による小型ロケットの姿勢角変化	1965年12月	
TM-73	固定端を有する薄肉円筒殻の自由振動について	1966年1月	
TM-74	回転振動試験装置の計画, 構造および特性	1966年2月	
TM-75	高マッハ数風洞の消音装置について	1966年2月	
TM-76	コーティングの断熱効果のアナログシミュレーション	1966年2月	
TM-77	テレメータ電波の偏波面の回転を利用したロケットのスピン測定について	1966年3月	
TM-78	昇降舵の操舵力特性に関するシミュレータ解析	1966年3月	
TM-79	テレメータ機上装置の小型化の研究	1966年3月	

注：欠番は配布先を限定したもの

航空宇宙技術研究所資料 80 号

昭和 41 年 3 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話 武蔵野三鷹 (0422)44-9171(代表)

印刷所 奥村印刷株式会社
東京都千代田区西神田 1-10