NAL TM-103

UDC 534.1
624.072.2

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-103

結合梁の振動について

築地恒夫・林　洋一

1967年 3 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既　刊　資　料

TM-40	国産中型輸送機 YS-11 胴体疲労試験（I）	1964年9月	竹内和之，川島矩郎
TM-41	抵抗線歪ゲージのゲージ率測定	1964年10月	田畑浄治，大坪孔治 滝沢実
TM-42	実在着氷条件の測定について	1964年10月	古関昌次，田寺木一 泉日出夫
TM-44	高負荷燃焼器（アニュラ模型）の実験結果	1964年12月	大塚貞吉，鈴木邦男 松本宏，石井浅五郎 広木強，山中国雍
TM-46	翼胴結合金具の疲労特性	1964年12月	竹内和之，藤枝郭俊
TM-47	ローター後流中のヘリコプター胴体の抵抗について	1965年1月	幸尾治朗，岡遠一
TM-48	極超音速風胴用ペブル加熱器の予備実験	1965年2月	平木一，橋本登 林二識，吉永崇 山口富夫
TM-49	Queen-Air 機の失速特性について	1965年2月	幸尾治朗，岡遠一 照井祐之，鎌田幸男
TM-50	LS-A 型ロケットの曲げ剛性および振動試験について	1965年5月	中井暎一，塙武敏 泉日出夫
TM-51	超音速風胴空力データ表示記録装置	1965年5月	谷喬，高島一明 原亘利，近藤洋史
TM-53	ベクトルのノルムと行列のノルム —数値解法の収束条件その他への応用—	1965年5月	板垣芳雄
TM-54	熱衝撃試験用風胴整備試験	1965年5月	武藤洋治郎，池田為治 坂元思無邪，光山敏雄
TM-55	ロケット模型風胴試験における超音速相似則の応用	1965年5月	河崎俊夫，谷喬
TM-56	2024-T4アルミニウム合金平滑丸棒の常温回転曲げ疲労試験	1965年7月	石田誠，河野哲雄
TM-57	極超音速における軸対称物体の前面抵抗	1965年7月	曽我国男
TM-58	試験用飛しょう体の超音速風胴実験	1965年8月	斎藤秀夫，木村友昭
TM-59	ジェットリフトエンジン空気取入口の実験（I）	1965年9月	近藤博，増田惣平
TM-60	吹出式超音速風胴における実験データの処理方式について（II）	1965年9月	原亘利，高島一明 関根英夫，中正夫 戸川保子
TM-61	クインエア機の風胴試験	1965年9月	広末健一，矢沢健司 塚野雄吉，田村征一 佐野四郎，能村実 別府信宏
TM-62	高温歪ゲージの温度特性試験	1965年10月	江川幸一
TM-63	2024-T3アルミニウム合金の有孔補強平板の軸荷重による疲労特性	1965年10月	飯田宗四郎
TM-64	応力集中による材料の疲れ強さに関する一実験（I）	1965年10月	池田為治，坂元思無邪 光山敏雄
TM-65	ジェットエンジンの翼の固有振動に関する実験	1965年11月	武内澄夫，宮地敏雄 星谷昌二
TM-69	質量分析計による水蒸気を含む試料のガス分析	1965年12月	斎藤隆，堀内正司 中村浩子
TM-71	可動アイアンバードの構造および機能	1965年12月	機体第一部，計測部 原動機部
TM-72	地上付近の風の影響による小型ロケットの姿勢角変化	1965年12月	戸川隼人，石黒登美子
TM-73	固定端を有する薄肉円筒殻の自由振動について	1966年1月	田寺木一，泉日出夫
TM-74	回転振動試験装置の計画，構造および特性	1966年2月	武内澄夫，宮地敏雄 星谷昌二
TM-75	高マッハ数風胴の消音装置について	1966年2月	牛田健二，清水福寿 吉永崇
TM-76	コーティングの断熱効果のアナログシミュレイション	1966年2月	小川鉱一
TM-77	テレメータ電波の偏波面の回転を利用したロケットのスピン測定について	1966年3月	田畑浄治，桜井善雄 三浦雅男
TM-78	昇降舵の操舵力特性に関するシミュレータ解析	1966年3月	堀川勇壮，森幹彦 中野佳直
TM-79	テレメータ機上装置の小型化の研究	1966年3月	新田慶治
TM-80	安定制御のための一計算法	1966年3月	楢崎哲二
TM-81	吹出式超音速風胴の起動時および停止時における過負荷防止装置	1966年3月	石原久蔵，斎藤秀夫 外立政隆，榊原盛三 宗美均
TM-82	ピトー管による境界層速度分布測定について	1966年4月	長洲秀夫，柏原登喜子

結合梁の振動について*

築地恒夫**・林　洋一**

On the Vibration of Connected Beams

By Tsuneo TSUIJI and Yoichi HAYASHI

The vibration of a connected beam, which consists of beams with different rigidities, dimensions and materials, is presented. The analysis is carried out by means of the Rayleigh-Ritz method with a approximated deflection or torsional angle function. Good results can be obtained by using of a power series of the coordinate representing the deflection and torsional angle of a beam. The reductions of the characteristic values are large for a beam connected with by relatively weak springs, especially for bending vibrations.

1. 緒　言

多段ロケットの振動解析は，近似的には各段で剛性，長さ，質量の異なる梁が結合された段付き梁(Stepped Beam)として取り扱われ，このような段付き梁の曲げ振動解析はすでに何人かの研究者によって行なわれている[1)2)]。しかし，実際のロケット構造は各段の切り放しなどの必要性から，結合部分は剛でなく，むしろ弾性的に結合された状態に近いものと思われる。この点を考慮して，ここで取り扱う結合梁は，剛性，長さ，質量の異なる梁をスプリンブで結合したものである。

ロケットの振動として一般には曲げ振動が問題であり，捩れ振動は無視されているが，ロケットに人為的にスピンを与える場合など多少とも捩れ振動が問題となると思われるので，ここでは捩れ振動も取り扱う。

解析法としては，梁の問題であるから，微分方程式と境界条件より結合梁の振動方程式は困難なく導かれるが，実際の数値計算を考えると，この振動方程式を数値的に解くよりも，振動系の全エネルギーを直接法で解くのが便利である。したがって，ここでは Rayleigh-Ritz 法による直接解法を使用する。

* 昭和42年3月4日受付

** 機体第二部

2. 解　析

図1に示すような，曲げおよび捩れ剛性，各断面の形状，寸法および長さ，材質の異なる梁が捩れ角度および曲げの回転角度に比例した拘束力を生じるバネで結合され，しかも両端の境界条件は自由であるような振動系を考える。

2.1 捩れ振動

捩れ振動における梁の歪エネルギー，運動エネルギは各々

$$U_T=\sum_{i=1}^{n}\frac{(GC)_i}{2}\int_0^{L_i}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\right)^2dx_i \qquad (1)$$

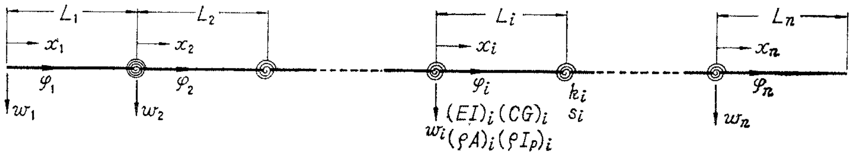
$$U_{KT}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\rho I_p)_i}{2}\int_0^{L_i}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right)^2dx_i \qquad (2)$$

また，単位捩れ角度を生ずるに必要なモーメントで，捩れに対するバネの大きさを規定すると，捩れ振動の際にバネに貯えられるエネルギーは

$$U_s=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{2}\left[(\varphi_{i+1})_{x_{i+1}=0}-(\varphi_i)_{x_i=L_i}\right]^2 \qquad (3)$$

となる。

定常振動を考えると，$\varphi_i=\varphi_i(x_i)\sin\omega t$, $(i=1,\cdots\cdots,n)$とおいて，全ポテンシャルエネルギーに Hamilton の原理を適用すると，最終的に結合梁の捩れ振動に対する汎関数として，



w_i ： i 番目の梁のたわみ　　$(EI)_i$ ： i 番目の梁の曲げ剛性

φ_i ： i 番目の梁のねじれ角　　$(CG)_i$ ： i 番目の梁のねじれ剛性

L_i ： i 番目の梁の長さ　　$(\rho A)_i$ ： i 番目の梁の単位長さの質量

k_i ： i 番目のバネの曲げ弾性常数　　$(\rho I_p)_i$ ： i 番目の梁の単位長さ当りの慣性モーメント

s_i ： i 番目のバネのねじれ弾性常数

図1　結合梁振動系

$$\Pi_T=\sum_{i=1}^{n}\frac{(GC)_i}{2}\int_0^{L_i}\left(\frac{d\varphi_i}{dx_i}\right)^2dx_i+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{2}\times$$
$$[(\varphi_{i+1})_{x_{i+1}=0}-(\varphi_i)_{x_i=L_i}]^2$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\rho I_p)_i}{2}\omega_t^2\int_0^{L_i}(\varphi_i)^2dx_i \qquad (4)$$

を得る。

ここに，ω_t は捩れ振動の場合の角振動数である。

Π_T を最小にする φ_i を求めるために，φ_i の近似関数として種々の形が考えられるが，ここでは x_i のベキ級数を用いることにする。

すなわち，

$$\varphi_i=\sum_{p_i=0}^{\infty}(a_i)_{p_i}\left(\frac{x_i}{L_i}\right)^{p_i}(i=1,\cdots\cdots,n) \qquad (5)$$

(5)式を(4)式に代入すると，全ポテンシャルエネルギーは次のようになる。

$$\Pi_T=\sum_{i=1}^{n}\frac{(GC)_i}{2L_i}\sum_{p_i=0}^{\infty}\sum_{q_i=0}^{\infty}\frac{p_iq_i}{p_i+q_i-1}(a_i)_{p_i}(a_i)_{q_i}$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S_i}{2}[(a_{i+1})_{p_{i+1}=0}-\sum_{p_i=0}^{\infty}(a_i)_{p_i}]^2$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\rho I_p)_i}{2}\omega_t^2L_i\sum_{p_i=0}^{\infty}\sum_{q_i=0}^{\infty}\frac{1}{p_i+q_i+1}\times$$
$$(a_i)_{p_i}(a_i)_{q_i} \qquad (6)$$

Π_T の $(a_i)_{p_i}$ に関する停留条件より

$$\sum_{q_i=0}^{\infty}\left[\beta_i\frac{p_iq_i}{p_i+q_i-1}+T_i\alpha_i-\lambda_t^2\alpha_i^2\theta_i\frac{1}{p_i+q_i+1}\right](a_i)_{q_i}$$
$$-T_i\alpha_i\sum_{q_{i+1}=0}^{\infty}\delta_{q_{i+1}0}(a_{i+1})_{q_{i+1}}=0$$
$$\begin{pmatrix}i=1,\cdots\cdots,n-1\\ p_i=0,\cdots\cdots\end{pmatrix}$$
$$-T_{n-1}\alpha_{n-1}\sum_{q_{n-1}=0}^{\infty}\delta_{p_n0}(a_{n-1})_{q_{n-1}} \qquad (7)$$
$$+\sum_{q_n=0}^{\infty}\left[\beta_n\frac{p_nq_n}{p_n+q_n-1}+T_{n-1}\alpha_{n-1}\delta_{p_n0}\delta_{q_n0}\right.$$
$$\left.-\lambda_t^2\alpha_n^2\theta_n\frac{1}{p_n+q_n+1}\right](a_n)_{q_n}=0$$
$$\begin{pmatrix}i=n\\ p_n=0,\cdots\cdots\end{pmatrix}$$

ここに，

$$\alpha_i=\frac{L_i}{L_1},\quad \beta_i=\frac{(GC)_i}{(GC)_1},\quad \theta_i=\frac{(\rho I_p)_i}{(\rho I_p)_1},$$
$$(i=1,\cdots\cdots n)$$
$$T_i=\frac{S_iL_1}{(GC)_1},\quad (i=1,\cdots\cdots,n-1) \qquad (8)$$
$$\lambda_t^2=\frac{(\rho I_p)_1}{(GC)_1}\omega_t^2L_1^2 \qquad \delta_{pq}=\begin{cases}0 & p\neq q\\ 1 & p=q\end{cases}$$

である。

(7)式は未知係数 $(a_i)_{qi}(i=1,\cdots\cdots,n)$ に関する斉一次連立方程式であり，求める振動方程式は(7)式の係数よりなる行列式の値が零となる条件より，

$$\begin{vmatrix}Ap_iq_i & Bp_{i+1}q_{i+1}\\ \bar{A}p_{n-1}q_{n-1} & \bar{B}p_nq_n\end{vmatrix}=0\quad\begin{pmatrix}i=1,\ \cdots\cdots,n-1\\ p_i=0,\cdots\cdots\\ q_i=0,\cdots\cdots\end{pmatrix} \qquad (9)$$

ここに，

$$Ap_iq_i=\beta_i\frac{p_iq_i}{p_i+q_i-1}+T_i\alpha_i-\lambda_t^2\alpha_i^2\theta_i\frac{1}{p_i+q_i+1}$$
$$\bar{A}p_{n-1}q_{n-1}=-T_{n-1}\alpha_{n-1}\delta_{p_n0}$$
$$Bp_{i+1}q_{i+1}=-T_i\alpha_i\delta_{q_{i+1}0} \qquad (10)$$
$$\bar{B}p_nq_n=\beta_n\frac{p_nq_n}{p_n+q_n-1}+T_{n-1}\alpha_{n-1}\delta_{p_n0}\delta_{q_n0}$$
$$-\lambda_t^2\alpha_n^2\theta_n\frac{1}{p_n+q_n+1}$$

である。

振動方程式(9)には各梁の長さの比 α_i，捩り剛性の比 β_i，慣性モーメントの比 θ_i，および結合バネの弾性常数 T_i が変数として含まれている。したがっ

て，これらの種々な組み合せにより，各種の結合梁の捩り振動の解析ができる。

2.2 曲げ振動

図1の振動系の梁の曲げ歪エネルギー，運動エネルギーは次式のようになる。

$$U_B=\sum_{i=1}^{n}\frac{(EI)_i}{2}\int_0^{L_i}\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}\right)^2 dx_i$$

$$U_{KB}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(\rho A)_i}{2}\int_0^{L_i}\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)^2 dx_i \tag{11}$$

梁を結合しているバネに貯えられるエネルギーは，バネの大きさを単位回転角を生ずるに必要な曲げモーメントの大きさで規定すると，梁の結合部分で，両梁の曲げによって生じた傾斜の差の二乗に比例するから

$$U_K=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{K_i}{2}\left[\left(\frac{\partial w_{i+1}}{\partial x_{i+1}}\right)_{x_{i+1}=0}-\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\right)_{x_i=L_i}\right]^2 \tag{12}$$

さらに，曲げの場合には結合点での変位の連続条件が必要である。

$$(w_{i+1})_{x_{i+1}=0}=(w_i)_{x_i=L_i}\quad (i=1,\cdots\cdots,n-1) \tag{13}$$

Hamilton の原理から，結合梁の曲げ振動解析に必要な汎関数は，

$$\Pi_B=\sum_{i=1}^{n}\frac{(EI)_i}{2}\int_0^{L_i}\left(\frac{d^2 w_i}{dx_i^2}\right)^2 dx_i$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{K_i}{2}\left[\left(\frac{dw_{i+1}}{dx_{i+1}}\right)_{x_{i+1}=0}-\left(\frac{dw_i}{dx_i}\right)_{x_i=L_i}\right]^2$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\rho A)_i}{2}\omega_b^2\int_0^{L_i} w_b^2 dx_i \tag{14}$$

ここに，ω_b は曲げ振動の角振動数である。

全ポテンシャルエネルギー Π_B を最小にする w_i を求める問題であるが，捩れ振動の場合と異なるのは，(13)式の拘束条件が加わり，多少計算が複雑になることである。拘束条件の扱い方としては，Lagrange の乗数法があり，点拘束に関して十分その実用性も確認されている[3][4]が，ここでは計算の都合上消去法により拘束条件を消去する方法をとる。

梁の撓み関数として x_i のベキ級数を用いる。

$$\frac{w_i}{L_i}=\sum_{p_i=0}^{\infty}(b_i)_{p_i}\left(\frac{x_i}{L_i}\right)^{p_i} \tag{15}$$

(15)式を(14)式に代入すると，

$$\Pi_B=\sum_{i=1}^{n}\frac{(EI)_i}{2L_i}\sum_{p_i=0}^{\infty}\sum_{q_i=0}^{\infty}\frac{p_i(p_i-1)q_i(q_i-1)}{p_i+q_i-3}\times$$

$$(b_i)_{p_i}(b_i)_{q_i}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{K_i}{2}\left[\sum_{p_{i+1}=0}^{\infty}p_{i+1}\,\delta_{p_{i+1}1}(b_{i+1})_{p_{i+1}}\right.$$

$$\left.-\sum_{p_i=0}^{\infty}p_i(b_i)_{p_i}\right]^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{(A\rho)_i}{2}\omega_b^2 L_i^3\sum_{p_i=0}^{\infty}\sum_{q_i=0}^{\infty}$$

$$\frac{1}{p_i+q_i+1}(b_i)_{p_i}(b_i)_{q_i} \tag{16}$$

拘束条件は

$$(b_{i+1})_{p_{i+1}=0}=\sum_{p_i=0}^{\infty}(b_i)_{p_i}=\sum_{p_1=0}^{\infty}(b_1)_{p_1}$$

$$+\sum_{l=2}^{i}\sum_{p_e=1}^{\infty}(b_e)_{p_e}(i=1,\cdots\cdots,n-1) \tag{17}$$

となる。

Π_B の $(b_i)_{p_i}$ に関する停留値を求めるには，拘束条件(17)を考慮して(16)式を微分する必要がある。

結局，

$$\sum_{q_s=0}^{\infty}\left[\beta_s\frac{p_s(p_s-1)q_s(q_s-1)}{p_s+q_s-3}+K_s\alpha_s p_s q_s\right](b_s)_{q_s}$$

$$-K_s\alpha_s\sum_{q_{s+1}=0}^{\infty}p_s\,q_{s+1}\,\delta_{q_{s+1}1}(b_{s+1})_{q_{s+1}}$$

$$-\lambda^2{}_b\sum_{i=1}^{n}\alpha_i{}^4\theta_i\sum_{q_1=0}^{\infty}\left\{(\delta_{s1}+H)I\right.$$

$$\left.+\frac{\delta_{si}}{p_i+q_i\delta_{i1}+1}\right\}(b_1)_{q_1}-\lambda_b{}^2\sum_{i=2}^{n}\alpha_i{}^4\theta_i\sum_{l=2}^{i}\sum_{q_e=1}^{\infty}$$

$$\left\{\frac{\delta_{s1}+H}{q_e\delta_{ei}+1}+\frac{\delta_{si}}{p_i+q_e\delta_{ei}+1}\right\}(b_e)_{q_e}=0$$

$$\begin{pmatrix}s=1,\cdots\cdots,n-1\\ p_s=0,\cdots\cdots\end{pmatrix}$$

$$-K_{n-1}\alpha_{n-1}\sum_{q_{n-1}=0}^{\infty}p_n q_{n-1}\delta_{p_n 1}(b_{n-1})_{q_{n-1}} \tag{18}$$

$$+\sum_{q_n=0}^{\infty}\left[\beta_n\frac{p_n(p_n-1)q_n(q_n-1)}{p_n+q_n-3}\right.$$

$$\left.+K_{n-1}\,\alpha_{n-1}\,p_n q_n\,\delta_{p_n 1}\,\delta_{q_n 1}\right](b_n)_{q_n}$$

$$-\lambda_b{}^2\alpha_n{}^4\theta_n\left[\frac{1}{p_n+1}\sum_{q_1=0}^{\infty}(b_1)_{q_1}+\sum_{l=2}^{n}\sum_{q_e=1}^{\infty}\right.$$

$$\left.\frac{1}{p_n+q_n\delta_{en}+1}(b_e)_{q_e}\right]=0\quad\begin{pmatrix}s=n\\ p_s=0,\cdots\cdots\end{pmatrix}$$

ここに，

$$\alpha_s=\frac{L_s}{L_1},\quad \beta_s=\frac{(EI)_s}{(EI)_1},\quad \theta_s=\frac{(\rho A)_s}{(\rho A)_1},$$

$$(s=1,\cdots\cdots,n)$$

$$K_s=\frac{K_sL_1}{(EI)_1} \quad (s=1, \cdots\cdots, n-1)$$

$$\lambda_b{}^2=\frac{(\rho A)_1}{(EI)_1}w_b{}^2L_1{}^4 \tag{19}$$

$$H=\begin{cases}0 & s=1\\ 1 & s\geq 2\end{cases}, \qquad I=\begin{cases}0 & i=1\\ 1 & i\geq 2\end{cases}$$

である。

(18)式より捩れ振動の場合と同様に，曲げ振動に関する振動方程式が得られ，パラメータ α_s, β_s, θ_s, K_s の値を与えることにより，各種の結合梁の曲げ振動解析ができる。

3. 解析例

ここでは，梁の結合部分の状態，すなわち T および K の大きさが結合梁の捩れまたは曲げ振動に与える影響について吟味する。

数値解析例として，2本の梁をバネで結合した2段の結合梁で，α, β, θ を一定として，T または K のみをパラメータとして変化させた状態での解析を行なう。

3.1 捩れ振動

捩れ角の試験関数を次のように近似する。

$$\varphi_i=\sum_{p_i=0}^{4}(a_i)_{p_i}\left(\frac{x_i}{L_i}\right)^{p_i}, \quad i=1,2 \tag{20}$$

振動方程式（9）はこの場合

$$\begin{vmatrix} Ap_1q_1 & Bp_2q_2 \\ \bar{A}p_1q_1 & \bar{B}p_2q_2 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{pmatrix} p_1, q_1=0, \cdots\cdots, 4 \\ p_2, q_2=0, \cdots\cdots, 4 \end{pmatrix} \tag{21}$$

ここに，

$$Ap_1q_1=\beta_1\frac{p_1q_1}{p_1+q_1-1}+T_1\alpha_1 -\lambda_t{}^2\alpha_1\theta_1\frac{1}{p_1+q_1+1}$$

$$\bar{A}p_1q_1=-T_1\alpha_1\delta_{p_20}$$

$$Bp_2q_2=-T_1\alpha_1\delta_{q_20} \tag{22}$$

$$\bar{B}p_2q_2=\beta_2\frac{p_2q_2}{p_2+q_2-1}+T_1\alpha_1\delta_{p_20}\delta_{q_20} -\lambda_t{}^2\alpha_2{}^2\theta_2\frac{1}{p_2+q_2+1}$$

実験に使用した，矩形断面 50mm×4mm, 30mm×4mm の等長のアルミニウム合金梁からなる二段の結合梁について数値解析を行なう。

計算に必要なパラメータ α, β, θ は次のとおりである。

$\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$

$\beta_1=1$, $\beta_2=0.6$

$\theta_1=1$, $\theta_2=0.218$

T_1 の種々な値に対する解析結果を表1に示す。

表 1 結合梁の捩れ振動固有値（解析値）

T_1 ＼ 次数	1	2	3	4
0	0	3.142*	5.182*	6.283*
0.05	0.517	3.16	5.25	6.31
0.5	1.37	3.27	5.58	6.41
1.0	1.66	3.35	5.79	6.57
1.97	1.88	3.44	5.95	6.88
5.0	2.06	3.53	6.05	7.38
10.0	2.12	3.57	6.07	7.65
50.0	2.17	3.61	6.09	7.90
∞	2.187+	3.618+	6.077+	7.827+

* は厳密解：文献[5] による

\+ は微分方程式より得られた振動方程式からニュートン法により求めた値

またグラフにしたのが図2である。いずれも捩れ振動の固有値は λ_t で表わされている。

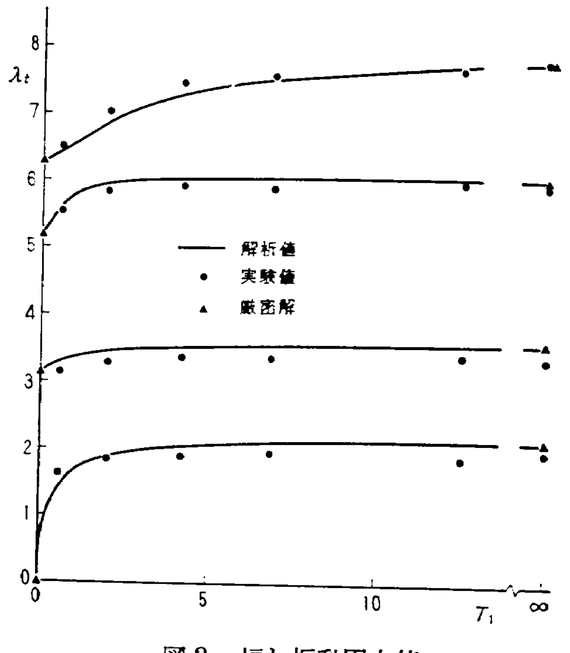


図2 捩れ振動固有値

$T_1=0$ の場合の第3固有値は$\frac{\Pi}{\beta_2}$として求めた値である。また $T_1=\infty$ に対する固有値は，梁の捩れ振動の微分方程式と境界条件より得られる，2本の梁を剛に結合した段付き梁の振動方程式 (23) をニュートン法で解いた値である。

段付き梁の捩れ振動方程式：

$$\sin\lambda_t \cos\sqrt{\frac{\theta_2}{\beta_2}}\alpha_2\lambda_t+\sqrt{\theta_2\beta_2}\cos\lambda_t \sin\sqrt{\frac{\theta_2}{\beta_2}}\alpha_2\lambda_t=0 \tag{23}$$

図2からわかるように，比較的小さい T_1 の場合の固有値は，$T_1=\infty$ の固有値より低い値を示している。この低下の様子を T_1 の大きさと対比して示したのが図3である。第1固有値の低下は第2，第3の固有値の低下よりかなり大きいことがわかる。

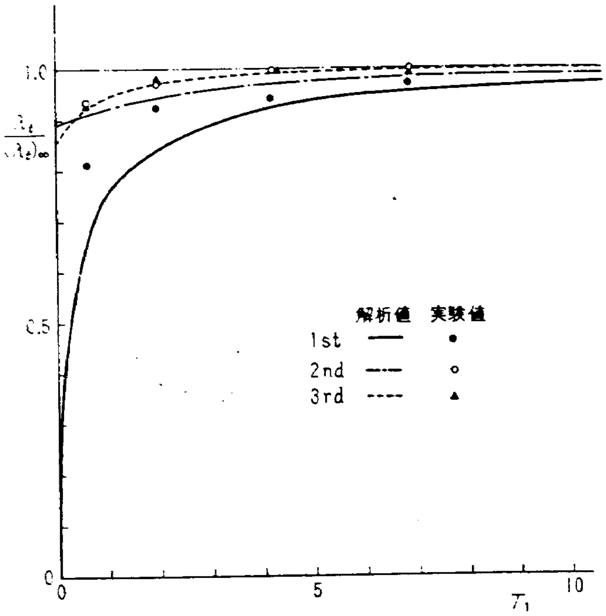


図3　T_1の変化による捩れ振動固有値の低下の様子

捩れ振動モードへの T_1 の影響を示したのが図4である。T_1 が小さいと当然結合点（図4では点B）での2本の梁の捩れ角度の差が大きくなっている。$T_1=0.05$の振動モードは，2本の梁が各々独立に振動するモードとなり，$T_1=0$ での振動状態が推定でき，その結果 $T_1=0$ での第3固有値を $\frac{\Pi}{\beta_2}$ とすることの根拠ともなる。$T_1=50$ の振動モードをみると，結合点での捩れ角度の差がほとんどなく，$T_1=\infty$ に近い状態にあることがわかる。このことは表1の固有値からもいえる。

3.2　曲げ振動

曲げの撓みを次のような近似関数で表わす。

$$\frac{w_1}{L_1}=\sum_{p_1=0}^{4}(b_1)_{p_1}\left(\frac{x_1}{L_1}\right)^{p_1},$$

$$\frac{w_2}{L_2}=\sum_{p_2=0}^{5}(b_2)_{p_2}\left(\frac{x_2}{L_2}\right)^{p_2} \tag{24}$$

(18) 式からできる曲げ振動の振動方程式は

$$\begin{vmatrix} A_{p_1q_1} & B_{p_2q_2} \\ \overline{A}_{p_1q_1} & \overline{B}_{p_2q_2} \end{vmatrix}=0 \quad \begin{pmatrix} p_1, q_1=0, \cdots\cdots, 4 \\ p_2, q_2=1, \cdots\cdots, 5 \end{pmatrix} \tag{25}$$

ここに，

$$A_{p_1q_1}=\beta_1\frac{p_1(p_1-1)q_1(q_1-1)}{p_1+q_1-3}+K_1\alpha_1p_1q_1 -\lambda_b{}^2\left(\alpha_1{}^4\theta_1\frac{1}{p_1+q_1+1}+\alpha_2{}^4\theta_2\right)$$

$$\overline{A}_{p_1q_1}=-K_1\alpha_1q_1p_2\delta_{p_21}-\lambda_b{}^2\alpha_2{}^4\theta_2\frac{1}{p_2+1} \tag{26}$$

$$B_{p_2q_2}=-K_1\alpha_1p_1q_2\delta_{q_21}-\lambda_b{}^2\alpha_2{}^4\theta_2\frac{1}{q_2+1}$$

$$\overline{B}_{p_2q_2}=\beta_2\frac{p_2(p_2-1)q_2(q_2-1)}{p_2+q_2-3}+K_1\alpha_1p_2q_2\delta_{p_21}\delta_{q_21} -\lambda_b{}^2\alpha_2{}^4\theta_2\frac{1}{p_2+q_2+1}$$

となる。

パラメーター α，β，θ は次の値を用いる。

$\alpha_1=1$，$\alpha_2=1$

$\beta_1=1$，$\beta_2=1$

$\theta_1=1$，$\theta_2=1$

解析結果を表2と図5に示す。第2，第4固有値が

表 2　結合梁の曲げ振動固有値（解析値）

K_1 ＼ 次数	1	2	3	4
0	—	15.42*	22.37*	49.97*
0.001	0.155	15.5	22.6	54.6
0.11	1.57	15.5	23.0	54.7
0.46	2.86	15.5	24.1	54.8
1.68	4.22	15.5	26.3	55.1
2.55	4.57	15.5	27.2	55.3
86.3	5.58	15.4	30.9	55.6
∞	5.593*	15.42*	30.23*	49.97*

＊は厳密解：文献[5]による

K_1 の値に関係せずほぼ一定値となっているのは，上記 α，β，θ のパラメータが示すように，2本の等質，等寸法の梁を結合した場合の解析であるために，節の位置が結合点にある振動では，K_1 の影響がほとんどあらわれないからである。

K_1 の値による固有値の低下は，捩れ振動の場合より大きく，しかもそれが一次のみでなく高次の固有値にまでおよんでいる。図6にこの低下の様子を示す。

曲げ振動モードは K_1 の値により図7のように変化

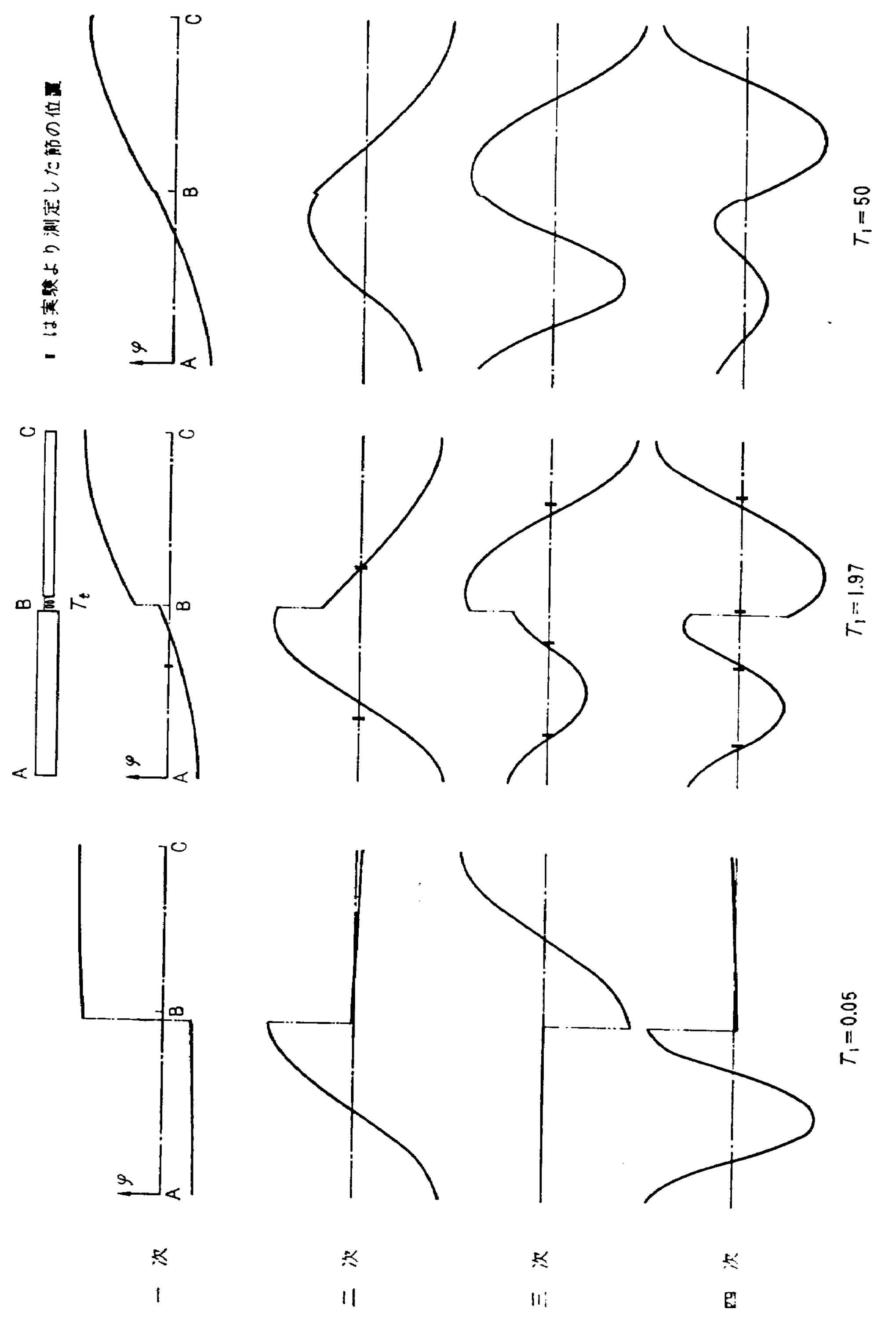


図4 結合梁の捩れ振動モード

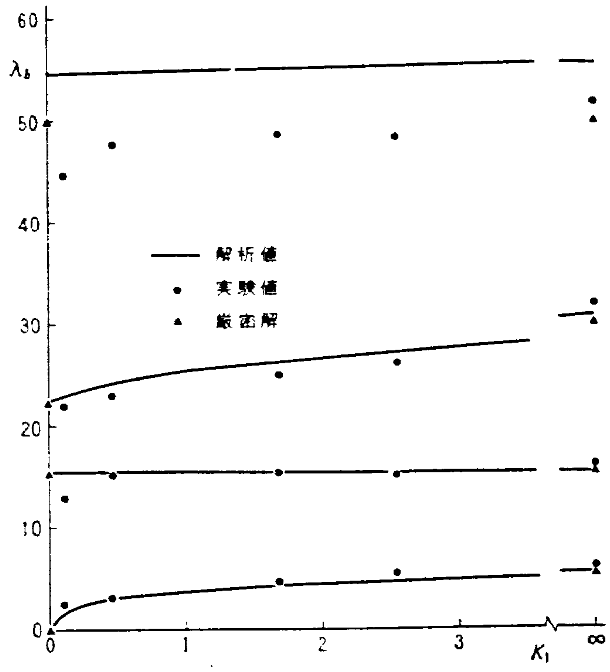


図5　曲げ振動固有値

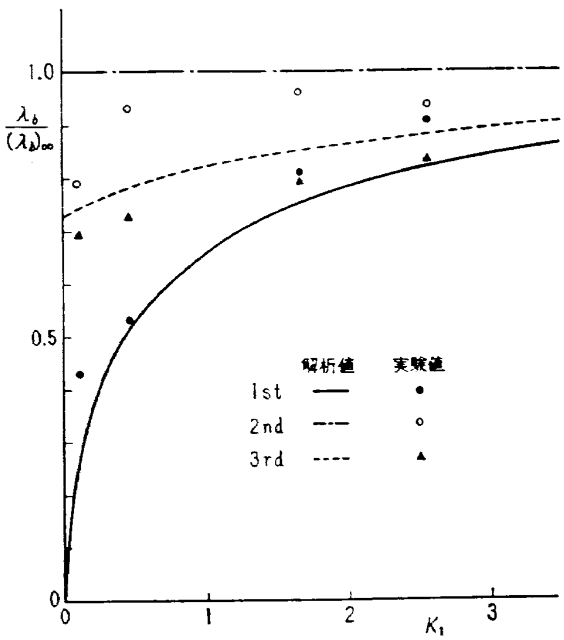


図6　K_1の変化による曲げ振動固有値の低下の様子

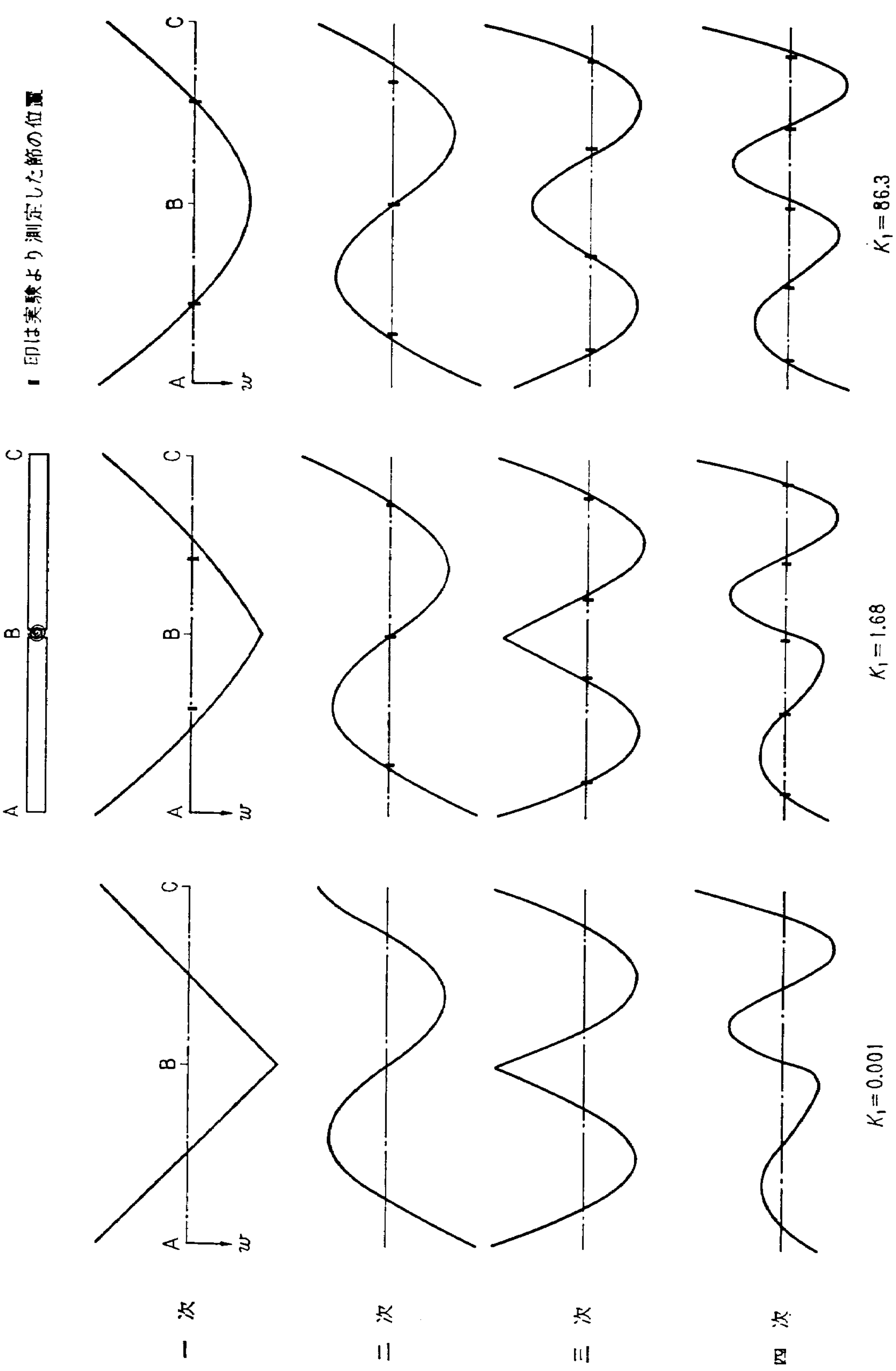


図 7　結合梁の曲げ振動モード

する。すなわち，$K_1=0.001$ の場合は結合バネが非常に弱くほとんど $K_1=0$（2本の梁が点 B でピン結合されている状態）の場合の振動モードに近く，$K_1=86.3$の場合は $K_1=\infty$ の結合梁の振動モードと一致している。このことは表2の固有値で，それぞれ $K_1=0$，$K_1=\infty$ の場合の固有値に非常に近い値を示していることとあわせて，解析値がかなり信頼できる値であることを示している。高次（第4固有値以上）になると，撓み関数の近似が悪く，固有値も高めになり，振動モードも形がくずれている。

4. 実験結果および解析値との比較

4.1 捩れ振動

試験片は 50mm×4mm長さ500mmと30mm×4mm長さ 500mm の 17 *s* 材の矩形断面梁を一枚の板バネで結合したものである。板バネは幅 30mm で厚さ $h_t=1$〜2mm の 17 *s* 材で，長さ $l_t=3$〜20mm に変化させて，捩れ弾性常数に変化を与えた。

試験片は図8に示すように，両自由端の図心をピンで支持して固定台に取り付けた。

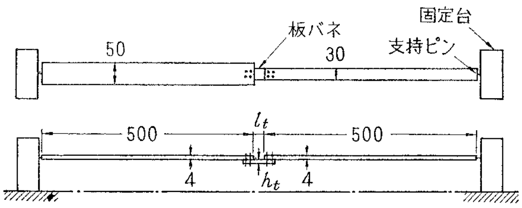


図8　捩れ振動試験片寸法および取付け状態

板バネの捩れ弾性常数は，一端を固定された矩形断面の梁の自由端に捩りモーメントを加え，その点での捩れ角度と捩りモーメントの比で表わすことにする。いま板バネの捩り剛性を $(GC)_t$，長さを l_t とすると，捩り弾性常数は

$$T_1=\frac{(GC)_t}{(GC)_1}\frac{L_1}{l_t} \qquad (27)$$

となる。

実験結果を（27）式で算出した T_1 で整理して表3に示す。また解析値と比較のために図2に・印で示す。実験値が解析値より高くなっている箇所もあるが，一般に低く，解析値との差は最大10%程度である。

$T_1=1.97$ の場合，実験より測定した節の位置を解析結果と比較のために，図4に┃印で示してある。振動モードも解析と実験とかなり良く一致していることがわかる。

表 3　実験より得られた捩れ振動固有値

T_1 ＼ 次数	1	2	3	4
0.59	1.61	3.14	5.52	6.49
1.97	1.84	3.26	5.83	7.01
4.17	1.87	3.35	5.91	7.48
6.82	1.93	3.39	5.88	7.56
12.5	1.90	3.34	5.98	7.71
∞	1.99	3.36	5.94	7.81

4.2 曲げ振動

試験片は 50mm×4mm長さ500mm，材質 17 *s* の2本の梁を2枚の板バネで結合したものを使用した。板バネは幅13mm，長さ30mmのバネ鋼製で，板厚を変えて曲げ弾性常数を変化させた。

試験片を図9に示すように，2本の張られたゴムテームの上に置いて，両自由端の境界条件を近似した。

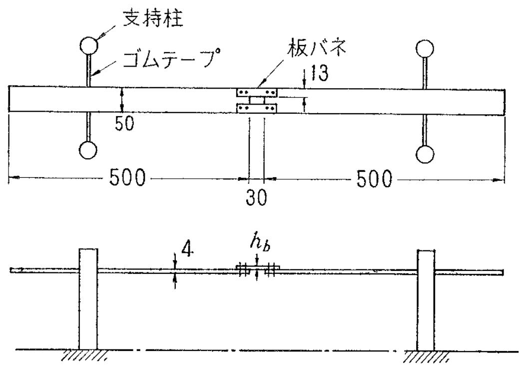


図9　曲げ振動試験片寸法および取付け状態

板バネの曲げ弾性常数を，一端固定した梁の自由端に作用する曲げモーメントと，その点での梁の傾斜角との比で表わすことにすると，板バネの曲げ剛性を $(EI)_b$，長さを l_b として，曲げ弾性常数は

$$K_1=\frac{(EI)_b}{(EI)_1}\frac{L_1}{l_b} \qquad (28)$$

で表わされる。

実験結果を表4に示す。また解析結果と比較して図5に・印で示す。

表 4　実験より得られた捩れ振動固有値

K_1 ＼ 次数	1	2	3	4
0.11	2.56	12.9	21.9	44.8
0.46	3.16	15.1	22.9	47.5
1.68	4.84	15.6	25.1	48.6
2.55	5.41	15.1	26.2	48.3
∞	5.96	16.2	31.5	51.7

K_1 が小さい場合は共振点の判定が非常に困難で，そのために実験より得られた固有値にはかなりの誤差が含まれている。その他の K_1 の値に対しては解析値と比較的良く一致している。

$K_1=1.68$, $K_1=86.3$ の場合について実験で実測した節の位置を｜印で図7に示してある。解析結果と良く一致している。第4モードを見ると，固有値は解析値が実験値よりかなり高い値を示しているにもかかわらず，振動モードはほとんど一致している。

5. 結　論

弾性的に結合された梁の捩れ，曲げ振動の解析法を示したが，結論として，

(1) 低次の振動解析には，捩れ角または撓みの試験関数としてベキ級数を用い，しかも最初の数項で十分な精度の結果が得られる。しかし剛性の極端に異なる梁からなる結合梁の場合には，試験関数の項数を予想される振動モードを考慮して決めることが，少ない項数で良い結果を得るのに必要である。

(2) 結合しているバネの弾性常数が比較的小さい場合，捩れおよび曲げ振動の固有値は，結合が剛な結合梁の固有値に比して小さく，特に曲げ振動の場合にその低下が大きい。

ここでは，梁の各段では剛性，質量が一定な結合梁について振動解析を行なったが，実際のロケットでは各段内で剛性も質量も変化している。したがってより実際的な結合梁の振動解析として，1本の梁の内で剛性および質量が変化している結合梁についての振動解析を考慮中である。

最後に，本研究にあたって終始ご指導くださった構造研究室長の塙　武敏技官に感謝の意を表します。

文　献

1) N. J. Taleb, E. W. Suppieger; Vibration of Stepped Beams, Jour. Aerospace Sciences, Vol. 28 1961

2) F. Buckens; Eigenfrequencies of Nonuniform Beams, AIAA Jour. Vol. 1, 1963

3) 塙　武敏，越出慎一，泉日出夫；点支持束縛のある板の振動解析，第6回構造強度に関する講演会講演集，(昭和39年)

4) 塙　武敏，泉日出夫，多田保夫，越出慎一；点束縛のある板の振動解析；第43期機械学会全国大会前刷（昭和40年）

5) 高橋利衛；機械振動とその防止，オーム社

TM-83	ジェットリフトエンジン空気取入口の実験（II）	1966月4月	近藤　博，増田惣平
TM-84	二段ロケットの低速風胴試験	1966年7月	毛利　浩，田村敦宏 佐野四郎，能村　実
TM-85	航空機の滑走路走行時の振動に関する実験的研究	1966年8月	小野幸一
TM-87	極小型超音速機用姿勢制御装置の特性解析	1966年8月	池谷光栄，畑山茂樹
TM-88	プロペラ後流偏向型ＳＴＯＬ機の風胴試験（Ｉ）	1966年9月	犬丸矩夫，岡部祐二郎 北村清美，川幡長勝 木村友昭
TM-89	有孔板の振動について	1966年9月	川井忠彦，泉　日出夫
TM-90	地上付近の横風の影響による小型ロケットの方位角変化	1966年9月	戸川隼人，石黒登美子
TM-91	高速タービン翼列二次元試験	1966年10月	近藤　博，養田光弘 山崎紀雄
TM-92	リフトジェットエンジン試験設備（Ｉ）—台上運転設備—	1966年10月	大山耕一，吉田　晃 中山　晋，菅原　昇 五味光男
TM-94	Ｊ-3ジェットエンジン用タービン動翼の固有振動特性	1966年11月	武内澄夫，田中俊男 宮地敏雄，星谷昌二
TM-95	超軽量軸流圧縮機動翼の固有振動特性	1966年11月	武内澄夫，宮地敏雄 星谷昌二
TM-96	2024-T4および7075-T6有孔平板の曲げ疲労試験と2024-T4平滑丸棒の軸荷重疲労試験	1966年11月	佐野政明，孤岡一洋
TM-97	高マッハ数風胴について（II）	1967年1月	吉永　崇，井上建二 広田正行，楯　篤志
TM-98	40kWプラズマ発生装置の諸特性	1967年1月	野村茂昭，相原康彦
TM-99	搭載機器用環境試験装置の特性	1967年2月	大月正男
TM-100	二連型リフトエンジンの吸込抵抗	1967年3月	近藤　博，大城章一郎
TM-101	低圧環境下における固体ロケットモータの性能	1967年3月	望月　昌，五代富文 湯沢克宜，斎藤　信 伊藤克彌
TM-102	弾性支持片持板の振動	1967年3月	塙　武敏，簗地恒夫 越出慎一，林　洋一

注：欠番は配布先を限定したもの

航空宇宙技術研究所資料103号

昭和42年3月発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表)

印刷所　奥村印刷株式会社
東京都千代田区西神田1-1-4

Printed in Japan