

## 非構造格子空カシミュレーションのための第2制限関数

北村圭一, 嶋英志

宇宙航空研究開発機構 情報・計算工学センター

## Simple Second Slope Limiter for Unstructured Grid Aerodynamic Simulations

by

Keiichi Kitamura and Eiji Shima

JAXA/JEDI

## ABSTRACT

The proposed method is a simple and parameter-free second slope limiter for unstructured grids, which is designed for use after any existing (first) limiters to stabilize the solution at subsonic speeds. The present second limiting is such that the first limiter is activated near the shock and supersonic regions, while turned off elsewhere in a very smooth manner, by using only local Mach number information. Numerical results demonstrated that the proposed second limiter retains the formal second-order accuracy, and also that it dramatically improved convergence at subsonic speeds on unstructured grids. In spite of these, the proposed formulation is simpler than existing second limiters, with only 1% additional cost requirement.

## 1. はじめに

非構造格子系<sup>1-12)</sup>において圧縮性ソルバーを用いる際、(第1)勾配制限関数<sup>13,14)</sup>は亜音速域でしばしば空間的・時間的振動を引き起こしてしまうことが知られている。この原因の一つに、構造格子用の制限関数<sup>15-17)</sup>と異なり、非構造格子で利用される制限関数は周囲の全てのセル情報を必要とする事が挙げられる。このため、周囲のセルで生じるわずかな物理量やセルサイズの変化が、制限関数を不必要に機能させ、解の収束性を劣化させたり、更には解そのものを乱したりする。

こうした問題は、特に直交格子タイプの格子で起こりやすい。セルの変化が2倍(もしくはそれ以上)のサイズ比で起こるためである(後述する第5図参照)。そしてこの程度のサイズ変化は、他のタイプの非構造格子でも起こりうる。

亜音速域における振動を回避する一つの方法は、亜音速域では制限関数を用いない事である。この方法は有効であるが、亜音速である事があらかじめ分かっている領域にのみ適用可能である。予期せぬ位置で超音速となり衝撃波などの不連続面が発生すると、途端に計算は不安定となってしまう。そこで文献18)では、超音速と亜音速の状態を自動的に判別する事で(第1)制限関数の採否を切り替える方法が提案されている。こうした付加的な制限関数は第2制限関数(Second Slope Limiter)と呼ばれ、いくつかの方法が提案されている。ただし文献18)の方法は定式化が複雑である上、今のところ Euler 方程式においてのみ検証が行われている段階である。また、こうした方法は商用コード等<sup>19,20)</sup>ではノウハウの形で導入されているが、その有効性が十分に調べられているかどうかは疑問である。

複雑形状周りの空カシミュレーションでは依然、有限体積法(FVM)による空間2次精度の非構造格子を用いた解析が主流である<sup>21-24)</sup>。本研究ではこの枠組みの中で、幅広い問題に簡単に利用でき、ユーザ指定パラメータを要しない新しい第2制限関数を提案する。

## 2. 数値計算法

## 2.1 支配方程式

本解析における流体の支配方程式は、下記の3次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式である(下添字  $k, l, m, n$  には、1, 2, 3 が代入される)。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathbf{Fv}_k}{\partial x_k} \quad (1a)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_l \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_l u_k + p \delta_{lk} \\ \rho u_k H \end{bmatrix}, \quad (1b)$$

$$\mathbf{Fv}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{lk} \\ u_m \tau_{mk} + (\kappa + \kappa_l) \frac{\partial T}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

$$\tau_{lk} = (\mu + \mu_l) \left[ \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \delta_{lk} \right] \quad (1c)$$

ここで、 $\rho$  は密度、 $u_i$  は速度成分 ( $i = 1, 2, 3$  はそれぞれ  $u, v, w$  に対応)、 $E$  は全エネルギー、 $p$  は圧力、 $H$  は全エンタルピー ( $H = E + (p/\rho)$ )、そして  $T$  は温度である。気体は完全気体の空気(比熱比  $\gamma = 1.4$ )、プラントル数は  $Pr = 0.72$  である。分子粘性  $\mu$  は一定とし、熱伝導係数  $\kappa$  とは  $\kappa = c_p \mu / Pr$  の関係がある ( $c_p$  は定圧比熱)。更に、乱流粘性  $\mu_l$  と乱流プラントル数 ( $Pr_l = 0.89$ ) から  $\kappa_l = c_p \mu_l / Pr_l$  の関係がある。一方で、非粘性計算(Euler方程式)の場合は  $\mu_l = 0$  である。

本研究では、式(1)をセル中心有限体積法(Cell-Centered FVM)で離散化する。

## 2.2 数値計算法

計算には、JAXA/JEDIの任意多面体非構造格子CFDコード“LS-FLOW”<sup>24-26)</sup>を用いる。特に断らない限り、次の方法で式(1)を解く。

空間再構築には Green-Gauss(G-G)法<sup>12)</sup>を採用する。勾配制限関数については次節で後述する。セル中心における物理量とその勾配を用いてセル界面の値を内挿し、これを用いて非粘性数値流束を SLAU<sup>27)</sup>、粘性項を Wang<sup>28)</sup>の方法で計算し、定常問題は LU-SGS<sup>29)</sup>、非定常問題は Shu の 2次精度 TVD Runge-Kutta 法<sup>30)</sup>を用いて時間発展を行う。乱流計算を行う場合は Spalart-Allmaras (S-A)モデル<sup>31)</sup>(Tripping Term 無し<sup>32)</sup>)を用いて  $\mu_l$  を求める。

### 3. 非構造格子における勾配制限関数

セル中心有限体積法ではセル中心における物理量  $q_i$ , これらの勾配  $\nabla q_i$ , セル中心  $\mathbf{r}_i$  からセル界面  $\mathbf{r}_{i,j}$  までの距離, そして勾配制限関数  $\phi$  を用いてセル界面における物理量  $q_{i,j}$  を次のように求める (図1参照) .

$$q_{i,j} = q_i + \phi \nabla q_i \cdot (\mathbf{r}_{i,j} - \mathbf{r}_i) \quad (2)$$

制限関数  $\phi$  は密度  $\rho$  と圧力  $p$  について一旦それぞれ求め, これらの小さい方を全ての物理量 (基本量, すなわち三次元では  $\rho, u, v, w, p$ ) に対し適用する事で計算を安定化させる.

#### 3.1 Barth&Jespersen の第1制限関数<sup>13)</sup>

Barth&Jespersen の (第1) 制限関数<sup>13)</sup> は, Wang の表記<sup>28)</sup> で下記のように与えられる.

$$\phi_{-BJ} = \min \left[ 1, \left( \frac{\max_j |q_j - q_i|}{\max_j |q_{i,j} - q_i|} \right), \left( \frac{\min_j |q_j - q_i|}{\min_j |q_{i,j} - q_i|} \right) \right] \quad (3)$$

この表記は Barth&Jespersen のオリジナルの論文からやや異なるが, これは式(3)ではセル中心およびセル界面の値のみ用いるのに対し, オリジナルの Barth らの方法ではセル頂点の値も利用するためである.

この制限関数は任意形状のセルから成る非構造格子系に適用可能だが, 微分不可能であるため解が収束しにくい事が知られている.

#### 3.2 Venkatakrishnan の第1制限関数<sup>14)</sup>

Venkatakrishnan<sup>14)</sup> は, Barth&Jespersen の (第1) 制限関数に小さな正数  $\varepsilon$  を導入し, 微分可能とする事で, 構造格子系における Van Albada の制限関数<sup>16)</sup> に近い形へと改良した.

$$\phi_{1-V} = \frac{1}{\Delta_-} \left[ \frac{(\Delta_-^2 + \varepsilon^2) \Delta_- + 2\Delta_-^2 \Delta_+}{\Delta_+^2 + 2\Delta_-^2 + \Delta_+ \Delta_- + \varepsilon^2} \right] \quad (4a)$$

$$\Delta_- = q_{i,j} - q_i,$$

$$\Delta_+ = \begin{cases} q_{\max} - q_i & \text{if } \Delta_- > 0 \\ q_{\min} - q_i & \text{if } \Delta_- < 0 \end{cases} \quad (4b)$$

ここで  $q_{\max}$  と  $q_{\min}$  はセル  $i$  に隣接するセル  $j$  全てにおける最大値および最小値を意味する. 正数  $\varepsilon$  は,

$$\varepsilon^2 = (K\Delta x)^3 \quad (4c)$$

で与えられ,  $K$  は定数であり通常 0.3,  $\Delta x$  はセルサイズである. もしくは, Wang の修正<sup>33)</sup> によれば  $\varepsilon$  は下記で与えられる.

$$\varepsilon = \varepsilon' (q^{\max} - q^{\min}) \quad (4d)$$

ここで  $\varepsilon' = 0.05$ ,  $q^{\max}$  と  $q^{\min}$  は計算領域全体における最大値および最小値である. 本研究では Wang の方法を採用する. いずれにしても, この制限関数は Barth&Jespersen の制限関数に比べ一般に収束性が良い. それでも, いくつかの理由により解の収束が妨げられる事がある. 例えば, 格子サイズが急激に変化する際に低速でも制限関数が働いたり, 上記の  $K$  や  $\varepsilon'$  といったパラメタが適切な値に選択されていないかたりする場合である.

#### 3.3 Michalak&Ollivier-Gooch の第2制限関数<sup>18)</sup>

Michalak&Ollivier-Gooch<sup>18)</sup> は (第1) 制限関数の次のような実装方法を提案し, 収束性の改善を試みた.

$$\phi'_{2-MO} = \tilde{\sigma}_i + (1 - \tilde{\sigma}_i) \phi_{1-BJ}; \quad (5a)$$

$$\tilde{\sigma}_i = \begin{cases} 1; & (\Delta q)^2 \leq (K\Delta x)^3 \\ s \left( \frac{(\Delta q)^2 - (K\Delta x)^3}{(K\Delta x)^3} \right); & (K\Delta x)^3 < (\Delta q)^2 < 2(K\Delta x)^3 \\ 0; & (\Delta q)^2 \geq 2(K\Delta x)^3 \end{cases} \quad (5b)$$

$$\Delta q = (\Delta q)_i^{\max} - (\Delta q)_i^{\min} < (K\Delta x)^{1.5},$$

$$(\Delta q)_i^{\max} = \max(q_j - q_i), \quad (5c)$$

$$(\Delta q)_i^{\min} = \min(q_j - q_i)$$

$$s(y) = 2y^3 - 3y^2 + 1 \quad (5d)$$

ここで,  $\phi_{1-BJ}$  は Barth&Jespersen のオリジナルの制限関数により求めた値である.

この方法は滑らかな領域で制限関数を機能させない事に成功しているが, ユーザ指定パラメタ  $K$  (Venkatakrishnan の制限関数から借用, 式 4c) が残っている. 更に, 超音速の場合の淀み点を正確に捉えるために, ユーザ指定マッハ数 2 つ ( $M_1=0.8, M_2=0.85$ ) を含む下記の修正が加えられる.

$$\phi_{2-MO} = \hat{\sigma}_i + (1 - \hat{\sigma}_i) \phi'_{2-MO}; \quad (6a)$$

$$\hat{\sigma}_i = \begin{cases} 1; & M_{i,\max} \leq M_1 \\ s \left( \frac{M_{i,\max} - M_1}{M_2 - M_1} \right); & M_1 < M_{i,\max} < M_2 \\ 0; & M_{i,\max} \geq M_2 \end{cases} \quad (6b)$$

ここで  $M_{i,\max}$  は検査体積  $i$  を構成する要素点の持つ最大値としてのマッハ数である. よって最終的な制限関数の形は複雑であり, 複数のユーザ指定パラメタが含まれる.

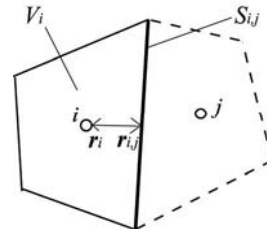


図1 セル形状や記号の模式図

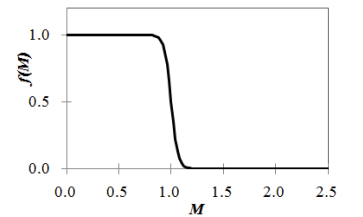


図2 関数  $f(M)$  へのマッハ数  $M$  の影響

#### 3.4 新しい第2制限関数

本研究の目的は, ユーザ指定パラメタ無しに, 衝撃波不連続でのみ制限関数を働かせ, 亜音速域では機能させない ( $\phi=1$ ) 方法の提案である. そこで, 既存の (第1) 制限関数で求めた  $\phi_1$  に対し下記の修正を提案する.

$$\phi_{2-new} = \max[\phi_1, f(M_{max})], \tag{7a}$$

$$M_{max} = \max_j(M, M_j) \tag{7b}$$

ここで  $j$  はセル  $i$  の隣接セルであり、式(7b)はセル  $i$  でのマッハ数  $M$  と全ての隣接セル  $j$  のマッハ数のうち最大値を与える。そして関数  $f(M)$  は次の性質を満たす必要がある。

- i) 0 以上 1 以下の値を取る。
  - ii) 亜音速では 1 であり (つまり、 $\phi_1$  の代わりに  $f(M)=1$  が使われる)、それ以外ではほぼ 0 (つまり、元の制限関数  $\phi_1$  が使われる)。
  - iii) ( $M=1$  においても) 連続かつ微分可能である。
- これらの要求全てを満たすために、本稿では下記の式を採用することにした。

$$f(M) = 0.5\{1 - \tanh(5\pi(M - 1))\} \tag{8}$$

この関数  $f(M)$  のマッハ数  $M$  に対する振る舞いは図 2 に示す通りである。本研究における最終的な第 1 制限関数への修正法 (第 2 制限関数) は、

$$\phi_{2-new} = \max[\phi_1, 0.5\{1 - \tanh(5\pi(M_{max} - 1))\}] \tag{9a}$$

$$M_{max} = \max_j(M, M_j) \tag{9b}$$

となる。

この修正は、通常の (第 1) 制限関数  $\phi_1$  の計算の直後に行えば良いため、既存のいかなる制限関数に対しても適用可能である。本手法は式の形が簡単であり、我々の計算コードにはわずか 10 行の追加で実装可能であった。更にユーザ指定パラメタが全く入らないため、幅広い適用性が期待される。そして後に示すように、本手法では本来の 2 次精度が保持される。

#### 4. 計算結果例

ここでは、本研究で紹介する新しい第 2 制限関数を Barth&Jespersen または Venkatakrisnan の第 1 制限関数に適用した数値計算例を示す。以降、これらをそれぞれ “Venkatakrisnan (Mod.)” および “Barth&Jespersen (Mod.)” と呼び、第 2 制限関数を用いない場合 (“Venkatakrisnan (original)” および “Barth&Jespersen (original)”) と比較する。なお、計算格子は構造格子もしくは非構造格子を用いるが、いずれもデータは非構造格子フォーマットで扱う。

##### 4. 1 精度検証：渦の保存 (直交格子, 非定常)

まず初めに、静止もしくは移流する渦の保存問題<sup>30,34)</sup>を解く。これは、Euler 方程式ソルバーの代表的なベンチマークテストの一つであり、空間精度の検証に用いられる。こ

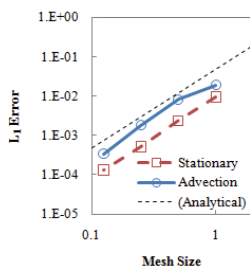


図 3 静止(stationary)および移流(advection)渦の計算結果と厳密解の差 ( $t=2.0$ )

ここでは、Euler 方程式を次の方法で解く：Venkatakrisnan の第 1 制限関数に新しい第 2 制限関数を適用し、Green-Gauss 法により空間 2 次精度再構築；SLAU (非粘性流束)；Shu の TVD Runge-Kutta 法<sup>30)</sup>による 2 次精度時間積分。計算条件は文献 34) と同一である。

- 平均流： $(\rho, u, v, w, p) = (1, U_\infty, 0, U_\infty, 1)$
- ここで静止渦については  $U_\infty=0$ 、移流渦は  $U_\infty=1$ 。
- 等エントロピー渦を示す擾乱：

$$\left. \begin{aligned} (\delta u, \delta v, \delta w) &= \frac{\beta}{2\pi} e^{0.5(1-r^2)} (-z, 0, x), \\ \delta T &= -\frac{(\gamma-1)\beta^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2}, \quad \delta S = 0, \\ r^2 &= (x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

ここで、計算領域  $[0, 10] \times [-0.5, 0.5] \times [0, 10]$  のうち渦中心の初期位置は  $(x_0, y_0, z_0) = (5, 0, 5)$  である。

渦移流の場合、渦は  $x$  および  $z$  の方向にそれぞれ  $U_\infty=1$  の速度で  $x-z$  平面上を斜めに動く。

境界条件としては、厳密解を全ての仮想セルに毎ステップで課した (これは文献 34) では特性境界と呼ばれる)。等間隔の直交格子を用い、用いる格子間隔に応じて時間刻み  $\Delta t$  を変化される事で、異なるケースに対してクーラン数をほぼ一定に保つ。各ケースのセル数と時間刻み  $\Delta t$  を表 1, 2 に示す。

表 1 静止渦の Grid Refinement Study

Grid	$(\Delta t) \times (\text{time steps})$	$L_1$ error	$L_1$ order
10 × 10	0.2 × 10	9.56E-03	-
20 × 20	0.1 × 20	2.38E-03	2.01
40 × 40	0.05 × 40	5.18E-04	2.20
80 × 80	0.025 × 80	1.31E-04	1.98

表 2 移流渦の Grid Refinement Study

Grid	$(\Delta t) \times (\text{time steps})$	$L_1$ error	$L_1$ order
10 × 10	0.2 × 10	1.92E-02	-
20 × 20	0.1 × 20	8.25E-03	1.22
40 × 40	0.05 × 40	1.83E-03	2.17
80 × 80	0.025 × 80	3.39E-04	2.43

計算は  $t=2.0$  まで行い、このとき移流渦中心の厳密解は (7, 0, 7) となる。表 1, 2, そして図 3 には計算結果と厳密解の密度差の  $L_1$  ノルムを示す。これより、本来の精度である空間 2 次精度が達成されている事がわかる。

なお、第 2 制限関数を導入する事による計算コストの増加は高々 1% であった。これは、第 1 制限関数が占める 2% に対して少ない。

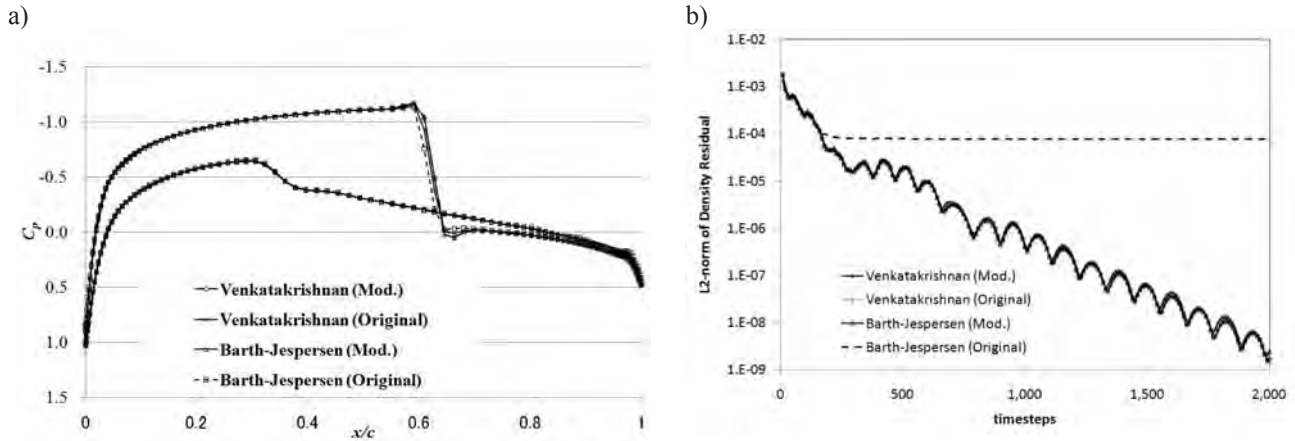


図4 NACA0012翼周りの計算結果, (a) Venkatakrishnan (Mod.)の計算結果可視化例 (0.28<M<1.24), (b) Cp分布, (c) 残差履歴 (制限関数の影響)

4. 2 NACA0012翼周りの遷音速, 非粘性流れ (構造格子)

この数値例は NACA0012翼を過ぎる遷音速, 非粘性流れ (一様流マッハ数 0.8, 迎角 1.25 度) であり, 風下側で流れはマッハ数 1.2 まで加速された後, 衝撃波を形成して減速される. この風下側の衝撃波を含むテストケースも数値計算法の性能を調べるために広く利用されている<sup>14,35,36</sup>.

計算格子は図 5 に示す 2 次元の O 型構造格子である. 200 セルが周方向, 30 セルが壁垂直方向に配置され, 最小格子幅は翼弦長の 0.01 倍である. 格子間隔は壁垂直方向に約 1.2 倍で拡がりながら, 翼弦長の 50 倍離れた位置にある遠方境界に達する. 計算はクーラン数 20 で 2,000 ステップ, 局所時間刻み法を用いて行った. 制限関数は次のいずれかを用いた: i) Venkatakrishnan (Mod.), ii) Barth&Jespersen (Mod.), iii) Venkatakrishnan (original), iv) Barth&Jespersen (original).

図 4 の計算結果によれば, 新しい第 2 制限関数は Venkatakrishnan の第 1 制限関数を用いた場合の収束性を損なわず, Barth&Jespersen の第 1 制限関数については収束性の改善も見られる. これは, 衝撃波背後の亜音速域において第 1 制限関数が無効にされたためであろう. 表 3 に示した抵抗係数 Cd および揚力係数 Cl によれば, 第 2 制限関数を用いる事で, 非常に細かい計算格子 (1,680 万セル) を用いた文献 36) の値にやや近づいた.

4. 3 衝撃波管問題 (1 次元等間隔格子, 非定常)

表 3 NACA0012翼周り計算の抵抗係数および揚力係数 (制限関数の影響)

Limiter	Drag Coefficient, Cd	Lift Coefficient, Cl
Venkatakrishnan (Mod.)	0.0241	0.3195
Venkatakrishnan (Original)	0.0256	0.3181
Barth-Jespersen (Mod )	0.0239	0.3163
Barth-Jespersen (Original)	0.0270	0.3114
Vassberg and Jameson (Very Fine Mesh) <sup>36)</sup>	0.0227	0.3562

3 つ目のケースとして, 'Sod の問題' として知られる衝撃波管問題を扱う. これは 1 次元衝撃波管の中で起こる Riemann 問題であり, 衝撃波, 接触面, 膨張波が伝播する. 計算格子は 1 次元等間隔の 100 セルから成る構造格子であり, 初期条件は文献 35) と同じく

- $(\rho_L, u_L, v_L, w_L, p_L) = (1, 0, 0, 0, 1)$  for  $i \leq 50$
- $(\rho_R, u_R, v_R, w_R, p_R) = (0.125, 0, 0, 0, 0.1)$  for  $i > 50$

である. Euler 方程式を次の方法で解く. 空間再構築は Green-Gauss 法と次のいずれかを用いる: i) Venkatakrishnan (Mod.), ii) Barth&Jespersen (Mod.), iii) Venkatakrishnan (original), iv) Barth&Jespersen (original). 非粘性流束は SLAU, 時間積分には Shu の TVD Runge-Kutta 法 (2 次精度)<sup>30)</sup> を用いる. 計算は時間刻み  $\Delta t = 0.2$  (CFL  $\approx 0.4$ ) で各ケース 100 ステップ行う.

図 5 はケース i), iii) の 100 ステップ時点の密度分布を示す. 両者はほぼ同一であり, 非定常な衝撃波, 接触面, 膨張波の伝播においても第 2 制限関数の (予期せぬ) 悪影響は見られなかったと言える. なおケース ii), iv) を比較しても同様の結果が得られたため, これらの結果は省略する.

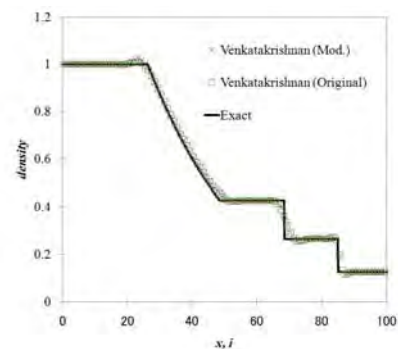


図 5 衝撃波管問題における密度分布 (100 ステップ)

4. 4 球周り亜音速, 粘性流れ (物体適合・直交ハイブリッド非構造格子)

次のケースは球周りの流れ (一様流マッハ数 0.1, レイノルズ数 118, 迎角無し) である. この例も, 文献に収束解<sup>37)</sup> や実験結果<sup>38)</sup> があり, しばしばベンチマーク問題として利用されている. ここでは, 物体適合・直交ハイブリッド非構造格子 (約 16 万セル, 物体適合格子は 15 層) を JAXA/JEDI の非構造格子生成ツール "LS-GRID"<sup>39)</sup> で作成した. 近年, これに類する計算格子は複雑形状を有する機体

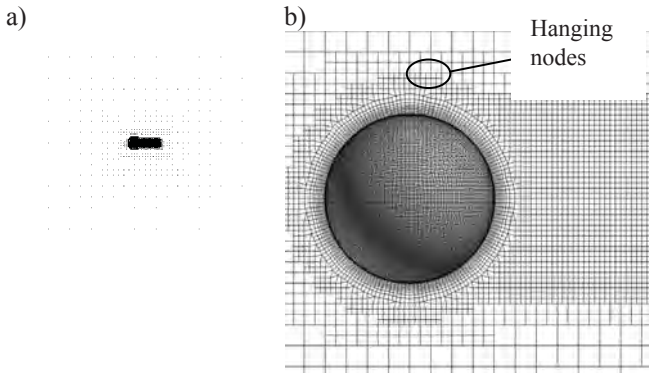


図6 球周り流れの計算格子, (a) 全体図, (b) 拡大図

の空力シミュレーションにしばしば用いられており<sup>23,11)</sup>, 我々の新しい第2制限関数の効果をこうした格子で調べる事は重要である. 計算領域は半裁とし ( $y \leq 0$ ), 球の直径を1としたときの最小格子幅は  $1.e-3$ , 壁近傍から遠方境界(直径の20倍の位置とした)に向かい約1.3倍の比で格子幅を伸ばした(図6).

計算はクーラン数1,000で5,000ステップ(ニュートン反復3回<sup>40)</sup>)行った. 図7に可視化結果を, 対応する実験結果<sup>38)</sup>と共に示した. これらの図より, 新しい第2制限関数を用いたケースは実験の後流の様子を良く捉えており, 球の周囲の圧力分布も滑らかである事が分かる. 一方で, 第2制限関数を用いず, Barth&Jespersenの第1制限関数のみを用いた場合(図7c), 斑点が出るおかしな圧力分布となってしまう.

図8は密度残差および抵抗係数  $C_D$  の履歴を示す. Venkatakrisnan (Mod.), Barth&Jespersen (Mod.), そして制

限関数を用いない場合 (no limiter) については違いが判別不可能であったため, Venkatakrisnan (Mod.)の結果のみ示している. 図より, これら3ケースでは  $C_D$  に振動が見られず, 残差が収束に向かって下がった事が確認できる. 一方で, オリジナルの Venkatakrisnan 制限関数では残差が4桁下がった時点でそれ以上の収束が見られず,  $C_D$  がやや振動し続けた. オリジナルの Barth&Jespersen の場合は更に悪く, 残差の低下はわずか2桁であり,  $C_D$  の振動は大きいまま残った.

これらより, 本研究の第2制限関数による亜音速域での解および収束性向上の効果が確認できた.

4. 5 亜音速流れにおける平板乱流境界層(構造格子)

最後に構造格子(ただし格子データは非構造格子フォーマット)を用いて亜音速流れにおける平板乱流境界層を解き, 問題が生じない事を確認する.

このベンチマークテストはNASAのNPARCアーカイブスサイト<sup>41)</sup>に掲載されており, 計算条件はこれに合わせて一様流マッハ数0.2, レイノルズ数  $6.18e+5$ , 迎角無しとした.

計算はクーラン数10で15万ステップ行い, 局所時間刻み法を用いた. 乱流モデルには Tripping Term の無い S-A モデルを用い, 制限関数については Venkatakrisnan (Mod.), Venkatakrisnan (original), 制限関数無し<sup>3)</sup>の3通りに変えて計算を行った.

計算格子も文献41)にて提供されているものをフォーマット変換して用いた. これは流れ方向に110セル(壁は11番目から開始), 壁垂直方向に80セルからなる2次元構造格子であり,  $-1.0 \leq x \leq 16.7$ ,  $0 \leq z \leq 3.0$  の領域を持つ. 最小格子幅は乱流領域で  $z^+ \approx 1$  を満たすように設定しており, 格子幅は壁垂直方向に1.2の比率で大きくなる.

境界条件は滑り無しの断熱壁(bottom,  $x \geq 0$ ), 流入(left),

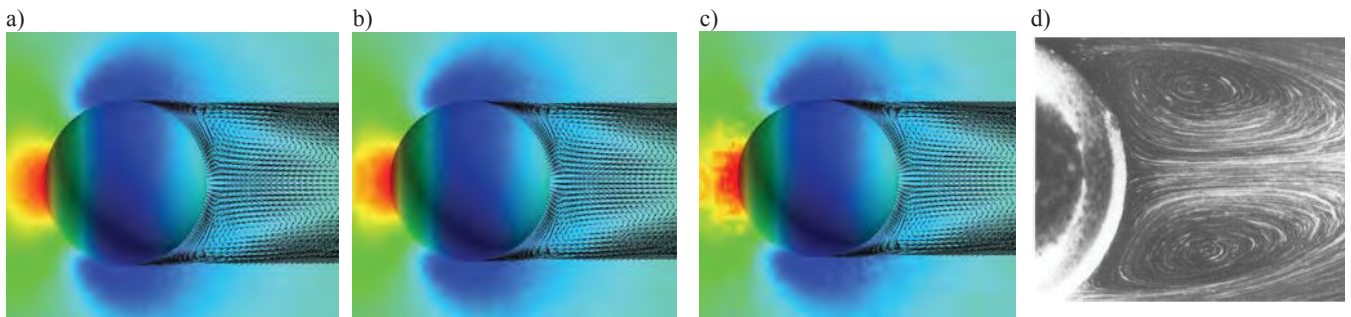


図7 球周り流れの計算結果 ( $-0.5 < C_p < 1.0$ ) (a) Venkatakrisnan (Mod.), (b) Venkatakrisnan (original), (c) Barth&Jespersen (original), (d) 実験結果(参考)<sup>38)</sup>

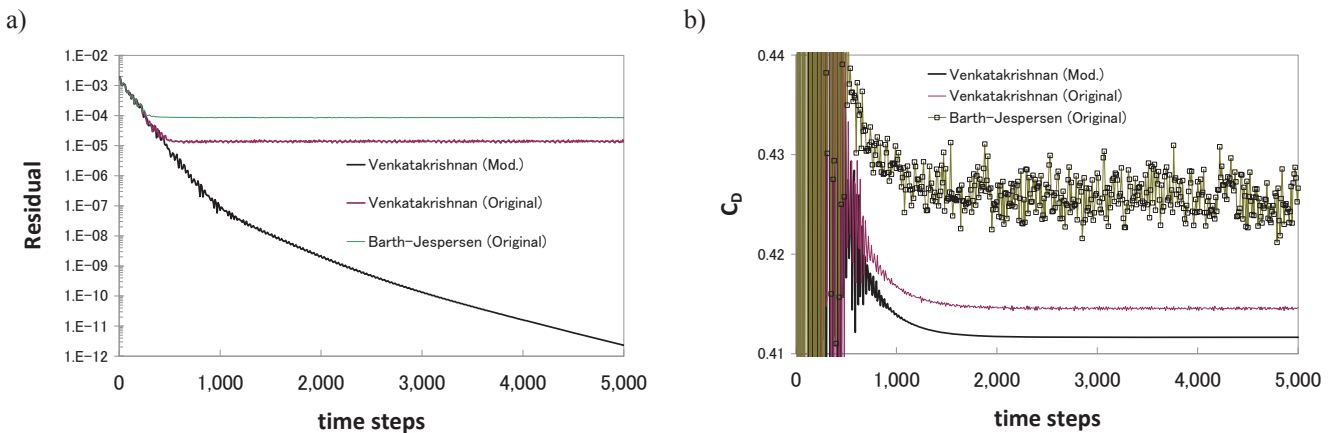


図8 球周り流れの計算結果, (a) 残差履歴(密度のL2ノルム), (b) 抵抗履歴

流出（圧力固定）(right and top), 対称（滑り壁）(bottom,  $x < 0$ ) を与えた。

図 9 は平板表面の摩擦係数  $c_f$  を局所レイノルズ数  $Re_x$  で整理したものである。3 ケースとも理論や実験<sup>42)</sup>に合致する結果を与え、今回の第 2 制限関数の有無によらず（第 1）制限関数は働かないことが分かった。従って本研究の第 2 制限関数は、構造格子系での乱流計算において悪影響を及ぼさない事が確認された。

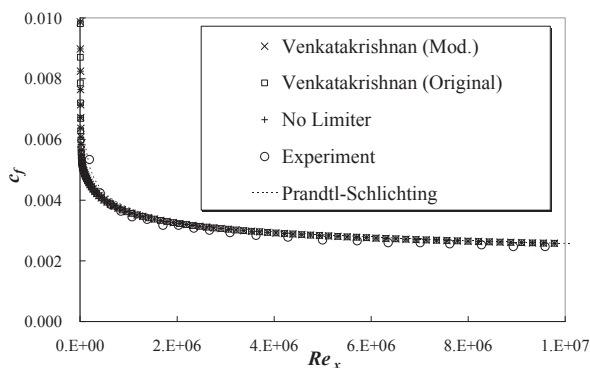


図 9 平板乱流境界層上の摩擦係数とレイノルズ数

## 5. 結論

非構造格子で利用できる新しい第 2 勾配制限関数を提案した。この方法は簡単で、ユーザ指定パラメタが無く、既存のいかなる（第 1）制限関数とも併用できる幅広い適用性を持つ。本研究で提案した第 2 制限関数は、局所マッハ数のみを指標とし、第 1 制限関数を衝撃波付近もしくは超音速域でのみ機能させ、それ以外の場所では利用しないように滑らかに切り替える。数値計算例により、本手法は空間 2 次精度を保持し、亜音速域における収束性を大きく向上させる事が分かった。更に、今回調べた範囲では構造格子/非構造格子、定常/非定常流れ、衝撃波/接触面/膨張波、非粘性流れ/粘性流れ/乱流のいずれにも問題無く利用できる。なお、この第 2 制限関数の利用によるコスト増加は高々 1% である。

## 謝辞

NASA Langley 研究所附属機関 NIA の Hiroaki Nishikawa 博士には貴重なご意見をいただいた。本研究で用いた非構造格子生成ツール LS-GRID および非構造格子ソルバー LS-FLOW は、JAXA/JEDI センターにおいて藤本圭一郎博士、葛生和人博士と著者らが共同で開発したものである。このとき、アイオワ州立大学 Z.J. Wang 教授、(株)計算力学研究センターの青野淳也氏にご協力をいただいている。Wang 教授には精度検証のご提案もいただいた。更に、本研究の一部は日本学術振興会よりご支援をいただいている。ご協力いただいた皆様に感謝の意を表す。

## 参考文献

- 1) Hirsch, C., "Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume 1, Second Edition: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics," Butterworth-Heinemann, Burlington, 2007.
- 2) Luo, H., Spiegel, S., and Lohner, R., *AIAA J.*, Vol.48 (2010), pp. 2639-2647.
- 3) Kidron, Y., Mor-Yossef, Y., and Levy, Y., *AIAA J.*, Vol.48 (2010), pp. 1130-1140.
- 4) Spiegel, S.C. et al., AIAA Paper 2010-1083, 2010.
- 5) Nakahashi, K., Computational Fluid Dynamics 2002, Eds., Armfield. S., Morgan, R., Srinivas, K., Springer, 2003, pp.77-81.

- 6) Aftosmis, M.J., Berger, M.J., and Alonso, J.J., AIAA Paper 2006-0652, 2006.
- 7) Lahur, P.R., AIAA Paper 2004-4958, 2004.
- 8) Kamatsuchi, T., AIAA Paper 2007-1459, 2007.
- 9) Kallinderis, Y., Khawaja, A., and McMorris, H., AIAA Paper 1995-0210, 1995.
- 10) Ochi, A., Ibrahim, M.K., and Nakamura, Y., *J. Aircraft*, Vol. 47 (2010), pp. 441-449.
- 11) Wang, Z.J., and Chen, R.F., *AIAA J.*, Vol. 40 (2002), pp.1969-1978.
- 12) Mavriplis, D.J., AIAA Paper 2003-3986, 2003.
- 13) Barth, T.J., and Jespersen, D.C., AIAA Paper 89-0366, 1989.
- 14) Venkatakrisnan, V., *J. Comput. Phys.*, Vol. 118 (1995), pp.120-130.
- 15) Van Leer, B., *J. Comput. Phys.*, Vol. 32 (1979), pp.101-136.
- 16) Van Albada, G.D., Van Leer, B. and Roberts, Jr., W.W., *Astron. Astrophys.*, Vol. 108 (1982), pp.76-84.
- 17) Harten, A., *J. Comput. Phys.*, Vol. 49 (1983), pp. 357-393.
- 18) Michalak, C., and Ollivier-Gooch, C., *J. Comput. Phys.*, Vol. 228 (2009), pp. 8693-8711.
- 19) Gnoffo, P.A., AIAA Paper 2006-1090, 2006.
- 20) CFL3D Version 6 Home Page, <http://cfl3d.larc.nasa.gov/>, retrieved on Feb. 2011.
- 21) Gnoffo, P. et al., AIAA Paper 2006-3771, 2006.
- 22) Pandya, S. et al., NAS Technical Report, NAS-06-005, 2006.
- 23) Bigarella, E.D.V., Azevedo, J.L.F. and Scalabrin, L.C., *J. Spacecraft and Rockets*, Vol. 44 (2007), pp.52-65.
- 24) 北村圭一他, 航空宇宙技術, Vol. 10 (2011), pp.1-10.
- 25) Kitamura, K. et al., *Trans. Jpn. Soc. Aeronaut. Space Sci.*, Vol. 53 (2011), pp.311-319.
- 26) Kitamura, K. et al., *Commun. Comput. Phys.*, Vol.10 (2011), pp.90-119.
- 27) Shima, E. and Kitamura, K., "Parameter-Free Simple Low-dissipation AUSM-family Scheme for All Speeds," *AIAA J.*, Vol. 49 (2011), pp.1693-1709.
- 28) Wang, Z.J., *Computers and Fluids*, Vol. 27 (1998), pp. 529-549.
- 29) Jameson, A. and Turkel, E., *Mathematics of Computation*, Vol. 37 (1981), pp. 385-397.
- 30) Shu, C.W. and Osher, S., *J. Comput. Phys.*, Vol. 77 (1988), pp. 439-471.
- 31) Spalart, P.R. and Allmaras, S.R., AIAA Paper 92-0439, 1992.
- 32) Rumsey, C.L., *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 28 (2007), pp. 1460-1471.
- 33) Wang, Z.J., *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 33 (2000), pp.657-680.
- 34) Wang, Z.J., Zhang, L., and Liu, Y., *J. Comput. Phys.*, Vol. 194 (2004), pp.716-741.
- 35) Park, J.S., Yoon, S.H., and Kim, C., *J. Comput. Phys.*, Vol. 229 (2010), pp.788-812.
- 36) Vassberg, J.C., and Jameson, A., AIAA Paper 2009-4114, 2009.
- 37) Sun, Y., Wang, Z.J. and Liu, Y., *Commun. Comput. Phys.*, Vol. 2 (2009), pp. 310-333.
- 38) Taneda, S., *J. Physical Society of Japan*, Vol. 11 (1956), pp.1104-1108.
- 39) Fujimoto, K., Fujii, K., Wang, Z.J. and Kitamura, K., IMECE2008-67110, ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition, Boston, MA, Nov. 2008.
- 40) Nichols, R., Tramel, R., Buning, P., AIAA Paper 2006-2824, 2006.
- 41) NPARC Alliance Validation Archive, Turbulent Flat Plate, <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/fpturb/fpturb.htm>, retrieved on Oct. 2009.
- 42) Wieghardt, K. and Tillman, W., NACA TM-1314, 1951.