

## FaSTAR を用いた翼周りデータ同化計算の試み

名古屋靖一郎, 木野由也, 平口雪乃  
 アーク情報システム  
 相曾秀昭  
 宇宙航空研究開発機構

## Trials of Data Assimilation Calculation of Flow around Wing Using FaSTAR Code

by

Seiichiro Nagoya, Yuya Kino, Yukino Heiguchi (ARK), and  
 Hideaki Aiso (JAXA)

## ABSTRACT

Data assimilation techniques in the calculation around a wing are attempted using FaSTAR, fast aerodynamics solver. The particle filter is mainly used as data assimilation techniques. The adjoint problem of fluid dynamics equations in FaSTAR code is considered in this article.

## 1. はじめに

3次元翼周り計算を FaSTAR を用いて行い、データ同化手法の一つである粒子フィルタ(cf. 1))を使い、その有効性を検討した。データ同化をする利点としては、数値シミュレーションの精度の向上と、風洞実験の離散的なデータを捕捉できるという点がある。粒子フィルタでは、多数の計算を行うため、高速なソルバ FaSTAR(cf. 2))を利用した。また、風洞実験を補助できる可能性のある有力なもう一つのデータ同化手法としてアジョイント法がある。この手法についての考察も行う。

## 2. FaSTAR による実験計測代替計算

翼周りの計算として、図1に示すメッシュ系を用いて、上流境界での流速分布を与え、定常計算を行った。スパン長 1.2, コード長 0.78~0.44 の翼に対して、計算領域として、 $(-4,5) \times (0,5) \times (-4,4)$  をとり、格子点数 38126 点のメッシュを作成した。図1において格子点が密集する場所に翼がある。図2に、横軸に計算反復回数、縦軸に残差をとったグラフを示す。これによると 1000 回でほぼ定常になっていることが伺える。粒子フィルタを用いる場合の各粒子の計算反復回数は 1000 回とした。流速の上流境界に適当な分布を与え、その計算結果を実験計測代替データとした。

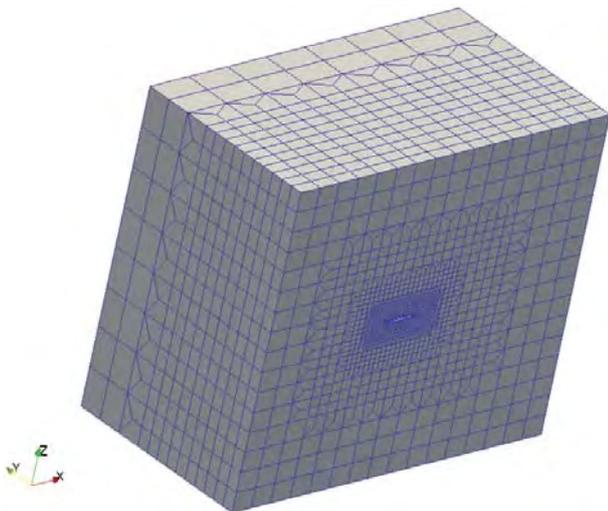


図1. 翼周りのメッシュ系

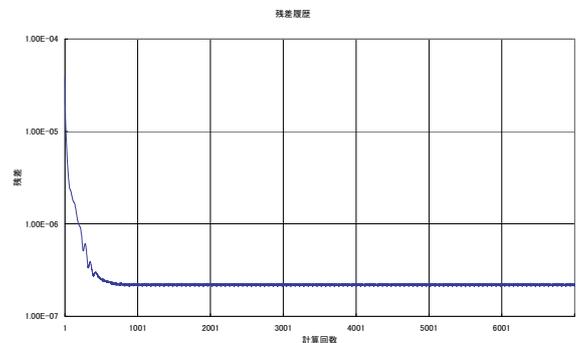


図2. 反復回数の残差

## 3. 翼面圧力によるデータ同化

## 3. 1. 鉛直1次元分布形

上流境界での流速分布として、鉛直方向に分布形をもつ場合を同定できるかを試みた。鉛直分布としては、次の放物線形状

$$f(z) = \begin{cases} -H \frac{(z^2 - L^2)}{L^2} & -L \leq z \leq L \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を考える。 $-L \leq z \leq L$  の範囲の関数として、フーリエ展開すると、

$$f(z) = \frac{2H}{3} - \frac{4H}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos \frac{\pi kz}{L}$$

となる。 $L=2.25\text{m}$ ,  $H=0.04$  とし、フーリエ展開の次数  $k$  の範囲は  $1 \sim 3$  とし、図3に示すようにマッハ 0.8 に分布形を加えて上流境界の正解値を決めた。この分布形を粒子フィルタにより同定できるかを検討した。粒子フィルタにより同定される変数は  $a_0 \sim a_3$  とし、次の分布形を導入した。

$$\tilde{f}(z) = a_0 + \sum_{k=1}^3 a_k \cos \frac{\pi kz}{L}$$

粒子フィルタにより同定する自由度数は 4 となる。

図4に実験計測代替データの圧力分布を示し、図5, 6にそれぞれ流速絶対値分布図と流速ベクトル図を示す。

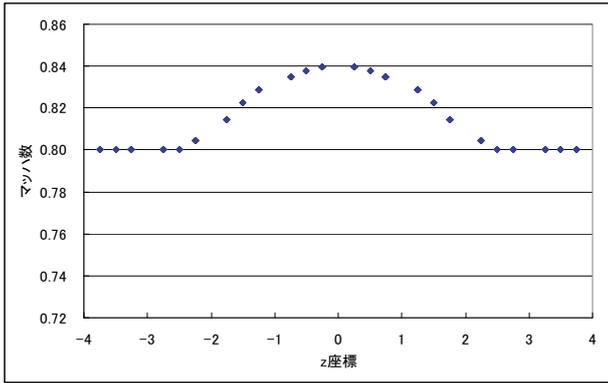


図3. 実験計測代替データの境界流速の分布形

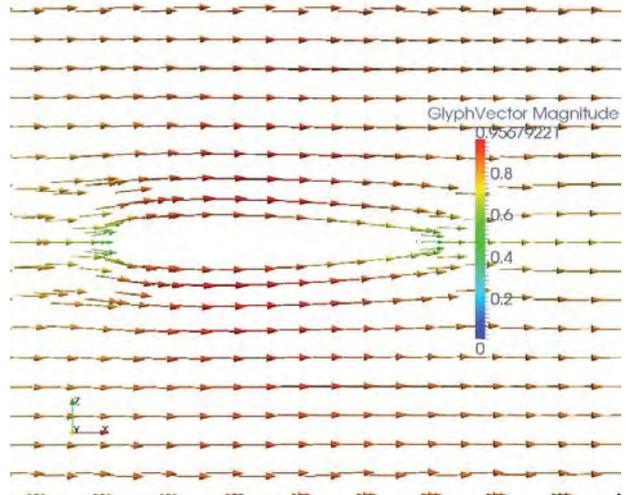


図6. 実験計測代替データの流速ベクトル図

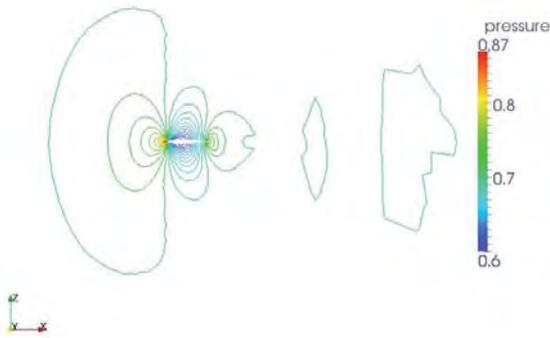


図4. 実験計測代替データの圧力分布図

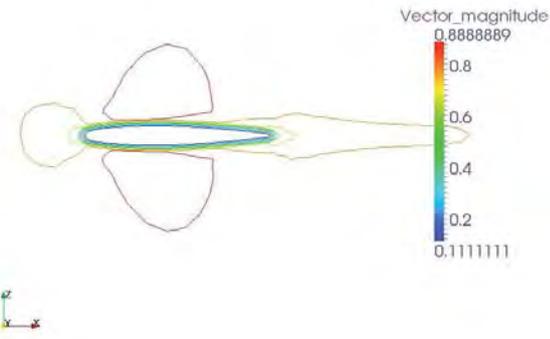


図5. 実験計測代替データの流速絶対値分布図

この実験翼面圧力が与えられているものとし、1粒子毎の尤度  $R^{\text{粒子}}$  として、次の誤差の正規分布を導入した。

$$R^{\text{粒子}} = \exp(-\|p^{\text{粒子}} - p^{\text{実験代替}}\|_L^2)$$

ただし、ノルムは翼面上での積分とする。粒子フィルタのアルゴリズムでは、この尤度の低い粒子は消滅させ、尤度の高い粒子が次の世代の粒子を生成させる。その際のフーリエ係数の変化のさせ方は、

$$a_k^{n+1} := a_k^n + r_k, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

とした。ここで、 $a_k^n$  は  $n$  世代目の尤度が高く、選択された粒子のフーリエ係数であり、 $r_k$  は正規乱数  $N(0,1)$  に  $k$  毎の標準偏差が  $320^{-1} k^{-2}$  になるように変換して発生させた。 $k$  毎に範囲を変化させた理由は、多項式のフーリエ係数について、

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{2l} \cos(kx) dx \approx O(k^{-2})$$

となるからである。

粒子フィルタにより、150世代計算した。図7に粒子フィルタにより同化させた流入流速境界結果を示す。正解としているのが実験計測代替データによる結果であり、計算値が同化させた境界流速である。計算値が正解に近づいている様子が伺える。図8に、粒子フィルタの各世代での、最良の粒子の  $L^2$  誤差の推移を示す。

図9にデータ同化後の圧力の分布図を示す。図4の実験計測代替データの結果と比較してほぼ一致していることが分かる。

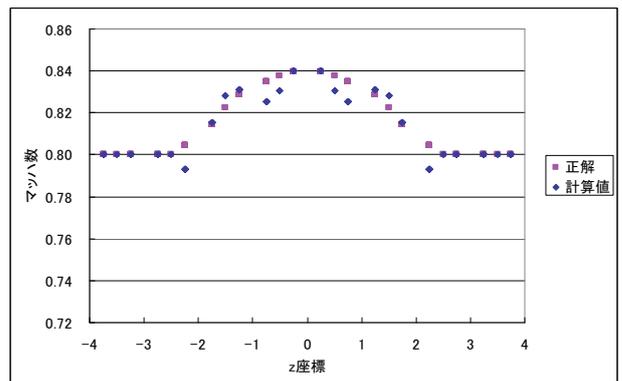


図7. 同化した流入流速

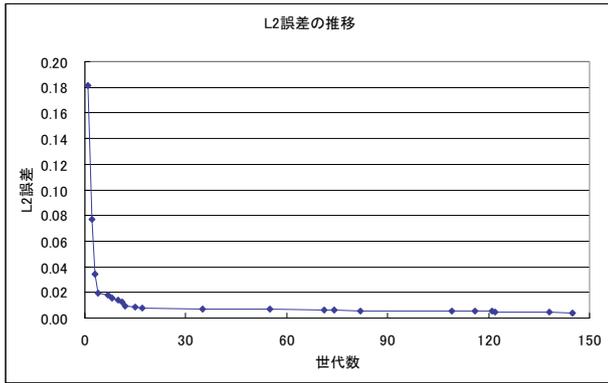


図8. 粒子フィルタの最良粒子の誤差の推移

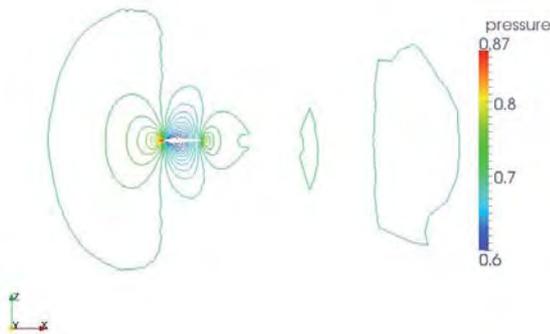


図9. データ同化後の圧力の分布

3. 2. 2次元分布形

上流境界での流速分布として、2次元的な分布をもつ場合のデータ同化を行ってみた。分布形としては、鉛直z方向と翼面に沿う方向のy方向に分布をもつ次の分布形を仮定した。

$$f(y, z) = -H \frac{(y^2 - L_y^2)(z^2 - L_z^2)}{L_y^2 L_z^2}$$

$L_y = 2.2 \text{ m}, L_z = 2.25 \text{ m}, H = 0.04$ とした。この場合のフーリエ級数展開は、

$$f(y, z) = \frac{4H}{9} - \frac{8H}{3} \left( \sum_{k_y=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k_y}}{\pi^2 k_y^2} \cos \frac{\pi k_y y}{L_y} + \sum_{k_z=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k_z}}{\pi^2 k_z^2} \cos \frac{\pi k_z z}{L_z} \right) + \frac{16H}{\pi^4} \sum_{k_y=1}^{\infty} \sum_{k_z=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k_y+k_z}}{k_y^2 k_z^2} \cos \frac{\pi k_y y}{L_y} \cos \frac{\pi k_z z}{L_z}$$

となる。データ同化の自由度は次の関数形の  $a_0, a_1^y, a_2^y, a_1^z, a_2^z, a_{1,1}^{yz}, a_{1,2}^{yz}, a_{2,1}^{yz}, a_{2,2}^{yz}$  の9自由度となる。

$$\tilde{f}(y, z) = a_0 + \sum_{k=1}^2 a_k^y \cos \frac{\pi k y}{L_y} + \sum_{k=1}^2 a_k^z \cos \frac{\pi k z}{L_z} + \sum_{k_y=1}^2 \sum_{k_z=1}^2 a_{k_y, k_z}^{yz} \cos \frac{\pi k_y y}{L_y} \cos \frac{\pi k_z z}{L_z}$$

翼面圧力の尤度計算による粒子フィルタを用いて150世代計算した。図10, 11にそれぞれ、z方向、y方向

の同化された流入流速分布図を示し、図12に最良粒子誤差の推移を示す。y方向の流入流速はよく一致しているが、z方向には中心部しか合っていない。これは翼面がz座標の中心にあり、y方向については一様に翼面分布があるためだと思われる。また、最良粒子誤差は18世代から更新されなかった。

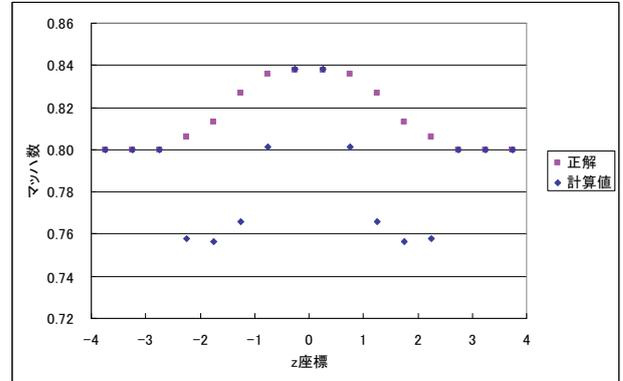


図10. 2次元同化の流入流速(z方向)

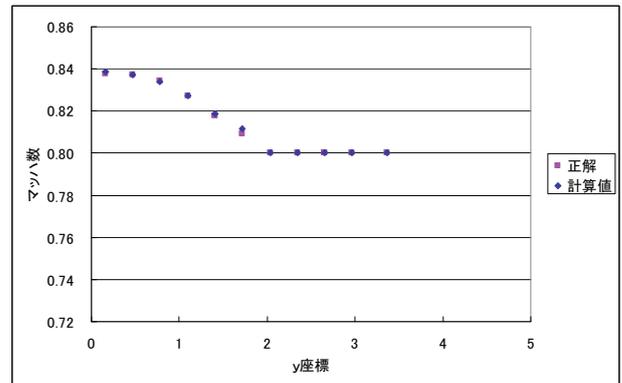


図11. 2次元同化の流入流速(y方向)

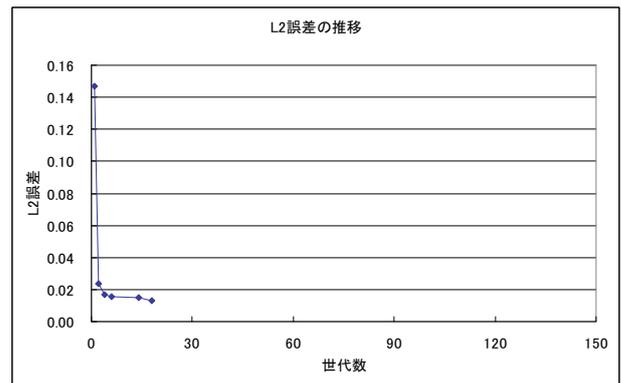


図12. 2次元同化の最良粒子の誤差の推移

4. 実験計測データの捕捉計算

4. 1. 鉛直1次元分布形

実験では離散的な情報を粗い点でしか得られないが、この情報から、データ同化を用いて計算により捕捉することを考える。このような計算法の有効性について議論することを行っていきたい。その準備として、次のような計算を試みた。

データ欠落領域Aを内部に含むような領域Bを考え、 $B \setminus A$ の領域での流速場が与えられたとして、この流速場から尤度を計算してデータ同化を行い、領域Aでの流速場を捕捉できるかを試みた。

$$A = \{(x, y, z) : -0.625 \leq x \leq 0.5, 0.25 \leq z \leq 0.5\}$$

$$B = \{(x, y, z) : -1.75 \leq x \leq 1.625, 0 \leq z \leq 1\}$$

とした。図13に尤度を計算する格子点を示した。ただし、図13においては、奥行方向の格子点を重ねて描いている。なお、尤度を計算する $L^2$ 誤差においては、格子点のコントロールボリュームにおいて積分した。つまり、格子点の粗密に応じて体積の重みをつけて計算した。

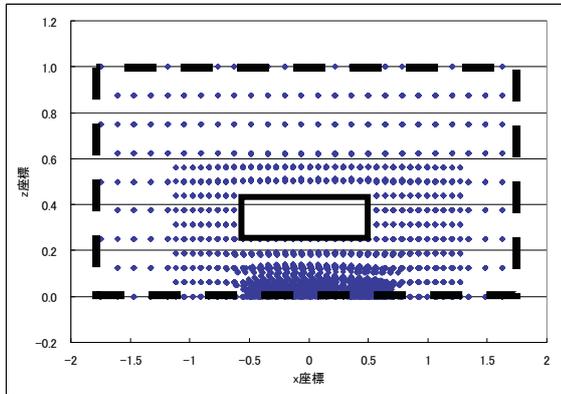


図13. 尤度を計算する格子点(A:実線, B:点線)

粒子フィルタにより、300世代計算した。図14に流入境界での流速分布図を示す。図15に最良粒子の誤差の推移を示す。図16, 17にそれぞれ捕捉された流速場の絶対値とベクトル図を示す。250世代程度で誤差が下げ止まり、流入境界流速をよく捕らえている。そして、図16, 17をそれぞれ実験計測代替データの世界速度場図5, 6と比較して、よく一致している様子が伺える。このため、実験において抜け落ちたと仮定した図13の領域Aでの流速場が捕捉されることになる。

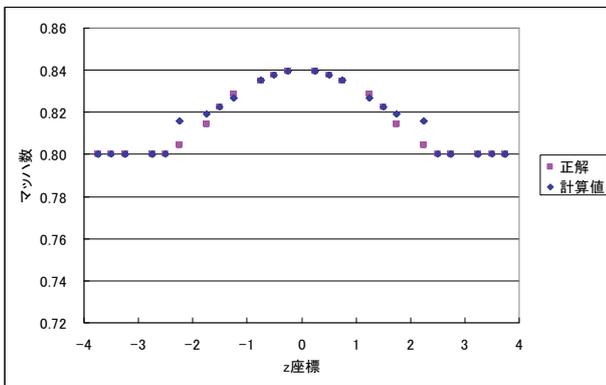


図14. 流速捕捉における流入流速

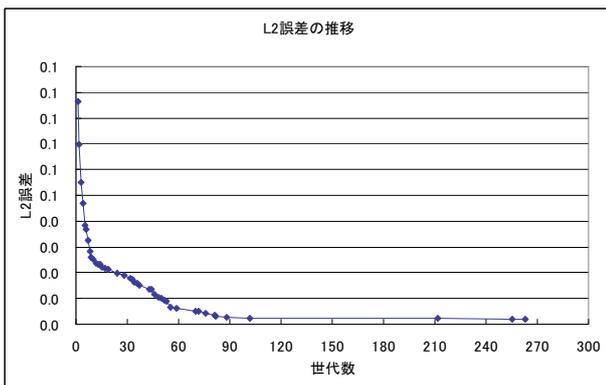


図15. 流速捕捉の最良粒子誤差の推移

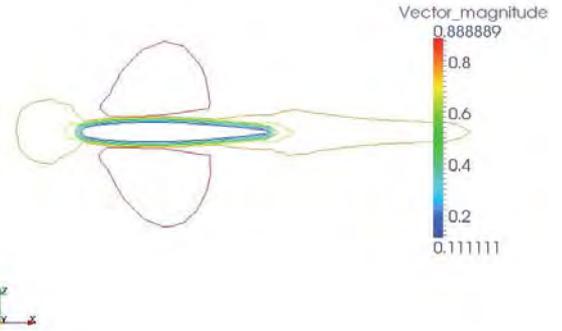


図16. 流速捕捉された流速絶対値

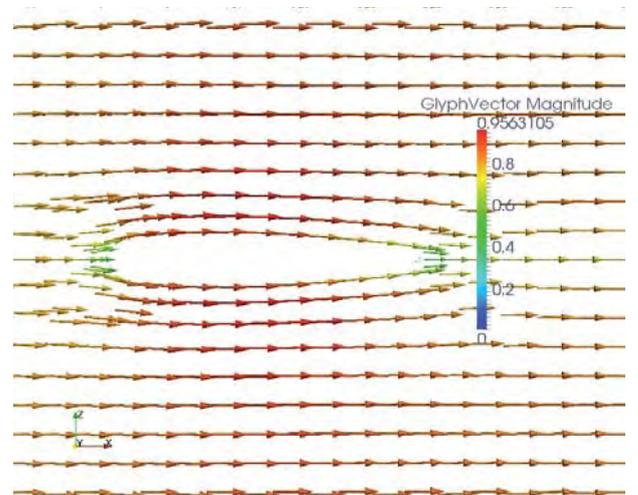


図17. 流速捕捉された流速場

#### 4. 2. 2次元分布形

次に2次元分布形を付けた境界条件についても同様に境界流速分布の同定ができるかを確かめた。図18, 19に同定結果, 図20に誤差の推移を示す。同定結果は、翼面圧力による同定結果の図10, 11より良い結果が出た。これは、z方向が顕著である。これは、翼面はz方向には局所的であるが、流速分布は大域的であるためと思われる。

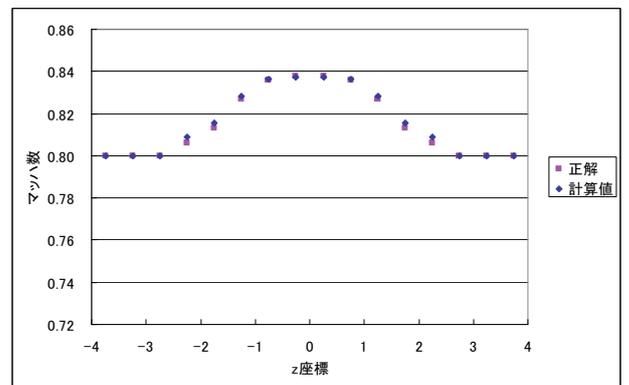


図18. 2次元境界流速の場合の流入流速(z方向)

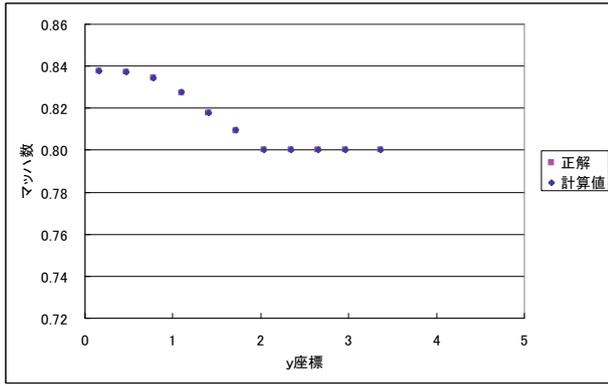


図 19. 2次元境界流速の場合の流入流速 (y方向)

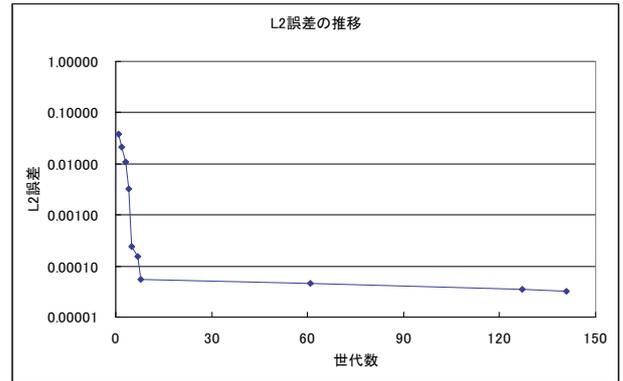


図 22. 下流圧力尤度計算における誤差の推移

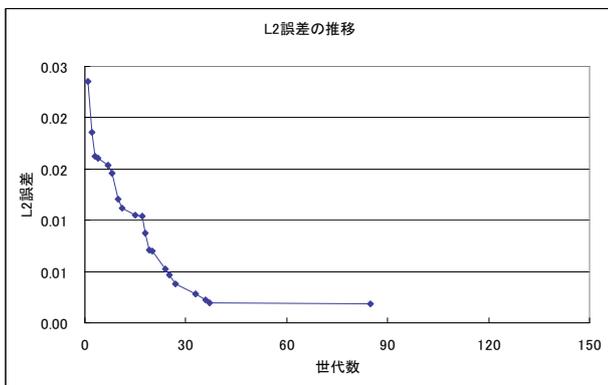


図 20. 2次元境界流速の場合の流速捕捉の誤差推移

### 5. 下流圧力境界によるデータ同化

風洞実験では支持棒により航空機模型を固定している。そのため、下流側の条件が実際の場合と異なる。これに対するデータ同化の有効性を検討するために、下流側の圧力境界条件から尤度を計算する粒子フィルタの有効性を確かめた。上流流速境界は一様流とし、下流圧力境界条件に正解分布を決め、それが同定できるかを確かめた。10粒子150世代計算した。同定結果を図21に、最良粒子誤差の推移を図22に示す。粒子フィルタにおいては下流側の尤度計算においても、傾向を合わせることができていることが分かった。

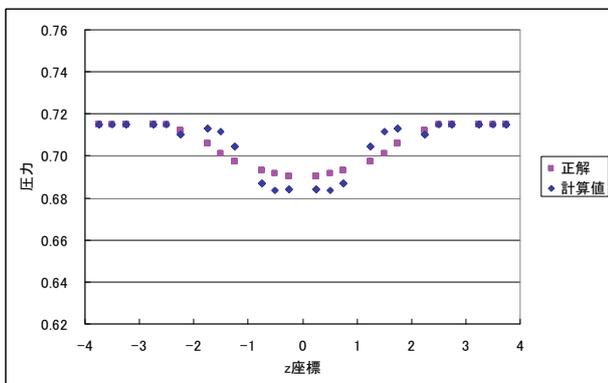


図 21. 下流圧力分布の同定結果

### 6. FaSTAR 基礎式のアジョイント方程式

FaSTAR で用いている物理量と双曲性を支配する項は、

$$Q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T,$$

$$F(Q) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{pmatrix} j + \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho vw \\ (e+p)w \end{pmatrix} k$$

であり、 $u, v, w$ :  $x, y, z$  方向流速、 $p$ : 圧力、 $\rho$ : 密度、 $e$ : 単位体積あたりのエネルギー、 $i, j, k$ :  $x, y, z$  方向単位ベクトルである。 $p^e$ は実験圧力とし、翼面圧力誤差を最小にするラグランジュ未定係数法を考える。

$$L = \int (p^e - p)^2 dt dx dy dz$$

$$+ \int \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \lambda^p dt dx dy dz$$

$$+ \int \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} \right) \lambda^u dt dx dy dz$$

$$+ \int \left( \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} \right) \lambda^v dt dx dy dz$$

$$+ \int \left( \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} \right) \lambda^w dt dx dy dz$$

$$+ \int \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial u(e+p)}{\partial x} + \frac{\partial v(e+p)}{\partial y} + \frac{\partial w(e+p)}{\partial z} \right) \lambda^e dt dx dy dz$$

$$+ \int \left( p - (\gamma - 1) \left( e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right) \right) \lambda^p dt dx dy dz$$

に変分をとり、アジョイント方程式を求めると、

$$-\frac{\partial \lambda^p}{\partial t} = -u \left( u \frac{\partial \lambda^u}{\partial x} + v \frac{\partial \lambda^v}{\partial x} + w \frac{\partial \lambda^w}{\partial x} + \frac{e+p}{\rho} \frac{\partial \lambda^e}{\partial x} \right)$$

$$- v \left( u \frac{\partial \lambda^u}{\partial y} + v \frac{\partial \lambda^v}{\partial y} + w \frac{\partial \lambda^w}{\partial y} + \frac{e+p}{\rho} \frac{\partial \lambda^e}{\partial y} \right)$$

$$- w \left( u \frac{\partial \lambda^u}{\partial z} + v \frac{\partial \lambda^v}{\partial z} + w \frac{\partial \lambda^w}{\partial z} + \frac{e+p}{\rho} \frac{\partial \lambda^e}{\partial z} \right)$$

$$+ \frac{\gamma - 1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \lambda^p,$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \lambda^u}{\partial t} - 2u \frac{\partial \lambda^u}{\partial x} - v \frac{\partial \lambda^u}{\partial y} - w \frac{\partial \lambda^u}{\partial z} &= \frac{\partial \lambda^p}{\partial x} + v \frac{\partial \lambda^v}{\partial x} + w \frac{\partial \lambda^w}{\partial x} \\
 &\quad + \frac{e+p}{\rho} \frac{\partial \lambda^e}{\partial x} - (\gamma-1)u\lambda^p, \\
 -\frac{\partial \lambda^v}{\partial t} - u \frac{\partial \lambda^v}{\partial x} - 2v \frac{\partial \lambda^v}{\partial y} - w \frac{\partial \lambda^v}{\partial z} &= \frac{\partial \lambda^p}{\partial y} + w \frac{\partial \lambda^w}{\partial y} + u \frac{\partial \lambda^u}{\partial y} \\
 &\quad + \frac{e+p}{\rho} \frac{\partial \lambda^e}{\partial y} - (\gamma-1)v\lambda^p, \\
 -\frac{\partial \lambda^w}{\partial t} - u \frac{\partial \lambda^w}{\partial x} - v \frac{\partial \lambda^w}{\partial y} - 2w \frac{\partial \lambda^w}{\partial z} &= \frac{\partial \lambda^p}{\partial z} + u \frac{\partial \lambda^u}{\partial z} + v \frac{\partial \lambda^v}{\partial z} \\
 &\quad + \frac{e+p}{\rho} \frac{\partial \lambda^e}{\partial z} - (\gamma-1)w\lambda^p, \\
 -\frac{\partial \lambda^e}{\partial t} - u \frac{\partial \lambda^e}{\partial x} - v \frac{\partial \lambda^e}{\partial y} - w \frac{\partial \lambda^e}{\partial z} &= (\gamma-1)\lambda^p, \\
 \lambda^p &= 2(p^e - p) + \frac{\partial \lambda^u}{\partial x} + \frac{\partial \lambda^v}{\partial y} + \frac{\partial \lambda^w}{\partial z} + u \frac{\partial \lambda^e}{\partial x} + v \frac{\partial \lambda^e}{\partial y} + w \frac{\partial \lambda^e}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

7. 浅水波方程式での擬似アジョイント法の適用

6節においてFaSTARの3次元基礎式のアジョイント方程式を求めたが、類似の双曲型の方程式である2次元の浅水波方程式について、擬似アジョイント法を適用した結果を報告する。ここで、擬似アジョイント法とは、連続系のアジョイント方程式を求めた後に、離散化して上流情報を更新する手法と定義し、離散化方程式のアジョイント方程式を求める従来のアジョイント法とは区別する。

浅水波方程式の基礎式は、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = C,$$

$$U = \begin{pmatrix} D \\ Du \\ Dv \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} Du \\ Du^2 + D^2g \\ Duv \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} Dv \\ Duv \\ Dv^2 + D^2g \end{pmatrix}$$

Cは摩擦項、粘性項、海底勾配項である。u, v: x, y方向流速, D: 水深, g: 重力加速度である。アジョイント方程式は、D<sup>e</sup>を実験水深とし、

$$-\frac{\partial \lambda^D}{\partial t} - gD \left( \frac{\partial \lambda^{Du}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda^{Dv}}{\partial y} \right) = 2(D^e - D),$$

$$-\frac{\partial \lambda^{Du}}{\partial t} - u \frac{\partial \lambda^{Du}}{\partial x} - v \frac{\partial \lambda^{Du}}{\partial y} = \frac{\partial \lambda^D}{\partial x},$$

$$-\frac{\partial \lambda^{Dv}}{\partial t} - u \frac{\partial \lambda^{Dv}}{\partial x} - v \frac{\partial \lambda^{Dv}}{\partial y} = \frac{\partial \lambda^D}{\partial y}$$

となる。ここで、線流量Du, Dvを基礎変数としたので、6節の移流項とは差が出た。

実験は図23, 図24の岡部等3)を用いた。

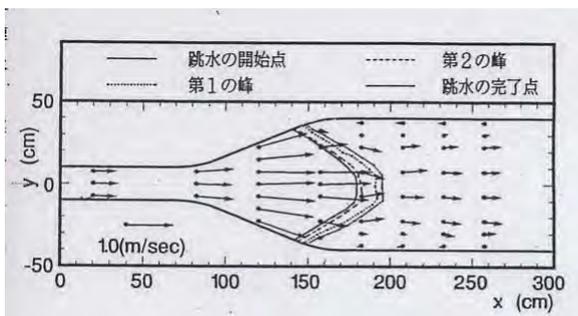


図23. 実験流速場

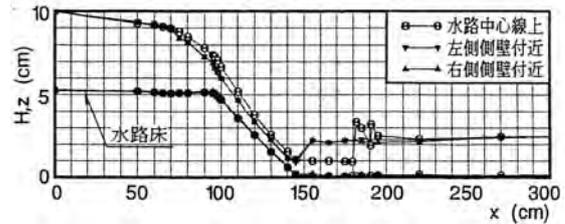


図24. 実験水位場

水路中心軸の実験値をD<sup>e</sup>とし、擬似アジョイント法を適用した。上流境界での流速場に対して、λ<sup>e</sup>を加える処理を20回繰り返した。図25にデータ同化前の結果を示し、図26にデータ同化後の結果を示す。各図の上段は水位鳥瞰図、中段は流速ベクトル図、下段は水路中心線上的水位であり、黄線が実験、青線が計算である。図26では実験水位と計算値が良く合っていることが伺える。

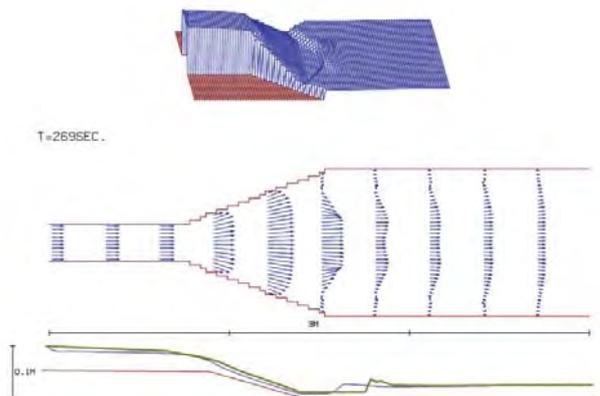


図25. 初期の流速場の中心軸の水位の差

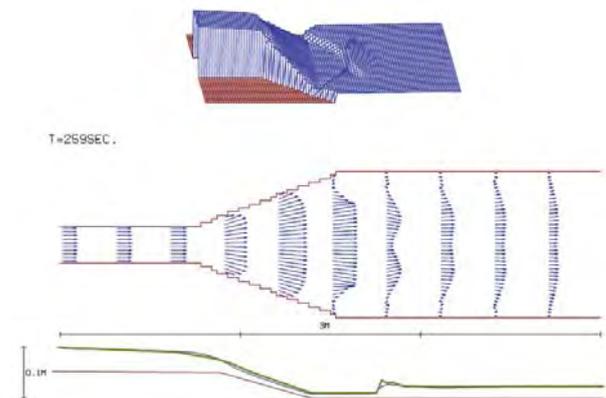


図26. データ同化後の流速場と水位場

8. 結論

- FaSTAR を用いたデータ同化法の一つである粒子フィルタの検討を行った。
- 下流側の圧力境界条件も、粒子フィルタによりある程度は同定できることが分かった。
- FaSTAR の擬似アジョイント方程式を導出した。
- 浅水波方程式に擬似アジョイント法を適用し、数値的に有効性を確かめた。

参考文献

- 1) 樋口, 粒子フィルタ, 電子情報通信学会誌, 88, pp.989-994, 2005.
- 2) 橋本等, 高速流体ソルバ FaSTAR の開発, 第42回流体力学講演会, 2010.
- 3) 岡部等, 水工学論文集, 39, pp.403-410, 1995.