ISSN 0452-2982
UDC 53.08:
65.012.1

NAL TM-547

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-547

二次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について

木 村 武 雄

1985年8月

航 空 宇 宙 技 術 研 究 所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目　　次

1. まえがき ………… 1
2. 二次元ベクトル量計測 ………… 1
3. 観測方程式 ………… 2
4. 観測方程式の解 ………… 2
5. 観測系の評価 ………… 2
6. 観測系を等価に保つ変換 ………… 3
7. 最適観測系であるための必要十分条件 ………… 5
8. 最適解同志の和の規則 ………… 6
9. 最適観測軸配置 ………… 6
10. 最適観測系における観測方程式の解 ………… 7
11. 故障の考慮 ………… 9
12. 配置誤差の考慮 ………… 12
13. まとめ ………… 13
付録A ………… 14
公式 1,2 ………… 14

二次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について*

木 村 武 雄**

1. まえがき

筆者は以前，三次元ベクトル量計測の最適観測軸配置について報告したことがある。[3),4)] そこでは，三次元のベクトル量計測に関してのみ述べ，二次元ベクトル量計測については言及しなかった。しかし，二次元ベクトル量計測は，三次元ベクトル量計測の基礎をなし，また，実際面でも応用性があり，重要と思われるので報告したい。

記 号

文字の用法

a, b, c ……スカラー量

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ……ベクトル量

A, B, C ……行列

演算記号

$\widetilde{\boldsymbol{a}}$ …………ベクトル$\boldsymbol{a}$の転置ベクトル

$\widetilde{A}$ …………行列Aの転置行列

$|\boldsymbol{a}|$ …………ベクトル$\boldsymbol{a}$の大きさ

$|A|$ …………行列式

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{ab}$, $\boldsymbol{a}^2$ … ベクトルの内積

$A\cdot B$, AB ……行列の積

添字等

$'$, $''$, * ……… 添記号（例えばF', F^* など）

$i, j, x, y, 1, 2, p$… 添字（例えばf_i, σ_{xy}, l_i, m_2, ε_pなど）

2. 二次元ベクトル量計測

ベクトル量計測の一般式は，よく知られているように

$$\lambda_i = f_i(\boldsymbol{v}) \quad (i = 1, 2, \cdots, p) \tag{2-1}$$

と表わされる。

ここに，

i ：観測の番号

p ：観測の個数

λ_i：測定値

f_i：ベクトル$\boldsymbol{v}$を変数とするスカラー値関数

$\boldsymbol{v}$ ：未知所求ベクトル

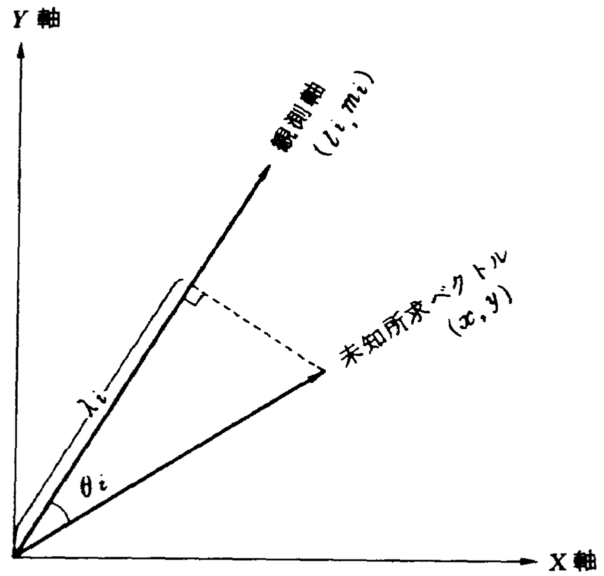
未知所求ベクトル$\boldsymbol{v}$については，本報告では二次元ベクトルとし，関数f_iについては，未知ベクトル$\boldsymbol{v}$の各成分の一次結合で表わせる形に限定し，その結合係数は正規化されているものとする。すなわち，

$$\lambda_i = \boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{v} \quad (i = 1, 2, \cdots, p) \tag{2-2}$$

ただし，

$$|\boldsymbol{f}_i| = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, p) \tag{2-3}$$

とする。ここに，ベクトル$\boldsymbol{f}_i$は，図−1に示す二



$\lambda_i = l_i x + m_i y$

図−1

---

* 昭和60年6月21日　受付

** 計測部

次元の方向ベクトルに相当し，そのX，Y成分を本報告ではl_i，m_iと表わすことにする。すなわち，

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_i=(l_i,\ m_i)\quad(i=1,2,\cdots,p)\tag{2-4}$$

ただし，

$$(l_i)^2+(m_i)^2=1\quad(i=1,2,\cdots,p)\tag{2-5}$$

とする。また，未知ベクトル$\boldsymbol{v}$の各成分はx，yと表わすことにする。すなわち

$$\tilde{\boldsymbol{v}}=(x,\ y)\tag{2-6}$$

従って，(2-2)式は，(2-4)及び(2-6)式を考慮して

$$\lambda_i=l_i\cdot x+m_i\cdot y\quad(i=1,2,\cdots,p)\tag{2-7}$$

と表わされる。

3. 観測方程式

前章の(2-7)式に誤差ε_iを付加して，次の様に観測方程式を設定する。

$$\lambda_i=l_i\cdot x+m_i\cdot y+\varepsilon_i\quad(i=1,2,\cdots,p)\tag{3-1}$$

但し

$$(l_i)^2+(m_i)^2=1\quad(i=1,2,\cdots,p)\tag{3-2}$$

ここに観測誤差ε_iは，次の条件を満たすものと仮定する。すなわち

仮定1，正規分布である。

仮定2，$\boldsymbol{E}(\varepsilon_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,p)$ (3-3)

仮定3，$\boldsymbol{E}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\varepsilon^2\delta_{ij}$

$(i,j=1,2,\cdots,p)$ (3-4)

ここに，δ_{ij}はクロネッカーのデルタである。

さて，観測方程式(3-1)を行列表示で示せば，

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdot\\ \lambda_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\\ \cdot & \cdot\\ l_p & m_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \cdot\\ \varepsilon_p\end{bmatrix}\tag{3-5}$$

となる。これを行列記号で

$$\boldsymbol{\lambda}=F\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\varepsilon}\tag{3-6}$$

と略記することとする。ここで(3-4)式を考慮することにより

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})=\varepsilon^2E(p)=W^{-1}\tag{3-7}$$

を得る。ただし

$\boldsymbol{\lambda}$ ：観測値ベクトル

F ：観測系を意味する行列

$\boldsymbol{\varepsilon}$ ：観測誤差ベクトル

$E(p)$：$p\times p$の単位行列

W ：重み行列

である。

4. 観測方程式の解

最尤法または最小二乗法によれば，観測方程式(3-6)の解は，次の様になる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=(\tilde{F}\cdot W\cdot F)^{-1}\cdot\tilde{F}\cdot W\cdot\boldsymbol{\lambda}\\&=(F\cdot F)^{-1}\cdot\tilde{F}\cdot\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}\tag{4-1}$$

また，この解$\boldsymbol{v}$の推定誤差は

$$\boldsymbol{\Sigma}=(\tilde{F}\cdot W\cdot F)^{-1}=\varepsilon^2(\tilde{F}\cdot F)^{-1}\tag{4-2}$$

と見積られる。但し，上記の$\boldsymbol{\Sigma}$とは，未知ベクトル$\boldsymbol{v}$の分散共分散のことである。すなわち，

$$\boldsymbol{\Sigma}=V(\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix}\sigma^2x, & \sigma xy\\ \sigma xy, & \sigma^2y\end{bmatrix}\tag{4-3}$$

V：分散を示す記号

である。

5. 観測系の評価[1),2)]

観測系の評価は，観測効率eによって決められる。観測効率eは次式により定義される。

観測効率 e ＝精度 h/経費 g (5-1)

ただし，

精度 $\mathrm{h}=\{Det(\boldsymbol{\Sigma})\}^{-1/N}$ (5-2)

（この式は本報告において基本的に重要な定義式であるが，詳細は文献1),2),5)を参照されたい。）

$\boldsymbol{\Sigma}$：(4-2)式に示されている。

N：行列$\boldsymbol{\Sigma}$の大きさ。

本報告の場合は，$N=2$

経費 g：未知所求量を求めるために要する一切の経費

観測効率eの値が大きい程，良い観測系であるとする。

経費gは，実際は極めて複雑な式によって表わされると考えられるが，ここでは，単に，観測器の個数pのみに依存すると仮定する。このように仮定すれば，同じ個数の観測器からなる観測系の場合には，経費は一定なので，精度だけを問題にすればよいことになる。

本報告では更に，経費 g は観測器の個数 p に比例すると単純に考える。すなわち，観測器1個あたりの経費を¥と表わせば，

$$g = g(p) = p\,¥ \qquad (5\text{-}3)$$

従って，

$$e = |\Sigma|^{-1/2}/p\,¥ \qquad (5\text{-}4)$$

となる。

この関係式(5-4)は，最適な観測器の個数を求めるとき必要になる。しかし，最適な観測器の個数については，本報告の主なテーマとはしない。本報告では，観測器の個数が同一のときの観測系同志を比較評価することを主なテーマとする。従って(5-4)式を見るならば，p が同一という条件下では，$Det(\Sigma)$ の値が小さければ小さい程，良い観測系ということになる。

さて次に，$Det(\Sigma)$ を計算してみる。(4-2)式より

$$\begin{aligned} Det(\Sigma) &= Det\{\varepsilon^2(\widetilde{F}F)^{-1}\} \\ &= \varepsilon^4/Det(\widetilde{F}F) \end{aligned} \qquad (5\text{-}5)$$

ここに，(3-5)，(3-6)式に示すように

$$F = \begin{bmatrix} l1 & m1 \\ l2 & m2 \\ \cdot & \cdot \\ lp & mp \end{bmatrix} = (\boldsymbol{l}\ \ \boldsymbol{m}) \qquad (5\text{-}6)$$

ただし，

$$l = \begin{bmatrix} l1 \\ l2 \\ \cdot \\ lp \end{bmatrix},\ m = \begin{bmatrix} m1 \\ m2 \\ \cdot \\ mp \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}7)$$

とした。

従って

$$\begin{aligned} Det(\widetilde{F}F) &= Det\left[\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{l}} \\ \widetilde{\boldsymbol{m}} \end{bmatrix}(\boldsymbol{l}\ \ \boldsymbol{m})\right] \\ &= Det\begin{bmatrix} \boldsymbol{l}^2 & \boldsymbol{lm} \\ \boldsymbol{lm} & \boldsymbol{m}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (5\text{-}8)$$

を得る。

観測誤差 ε は完全な偶発誤差と考えているので，自己以外のどんな量にも相関しないということであり，且つ(5-5)式の分母には ε は含まれていないから，つまり，分母と分子は互いに無関係であるから，$Det(\Sigma)$ を最小にするということは(5-5)式について

イ．分子 ε^4 を最小にする。

ロ．分母 $Det(\widetilde{F}F)$ を最大にする。

の2項に分離できる。ここで，イ項については観測誤差 ε を小さくするということであり，ロ項については(5-8)式を見れば，この値を最大にするような $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m})$ つまり観測軸の方向 (li, mi) の組 $(i=1, 2, \cdots, p)$ を見つければ，それが最適観測軸配置ということになる。

6．観測系を等価に保つ変換

観測軸配置は既に述べたとおり行列 F で表わされ，観測系の良さは $Det(\widetilde{F}F)$ で表わされた。従って，いま，二種類の観測軸配置 $F1$ および $F2$ があって，たとえ $F1 \neq F2$ であっても，$Det(\widetilde{F1}\ F1) = Det(\widetilde{F2}\ F2)$ であるならば，この二つの観測系は，観測系の評価のうえでは等価であるといえる。

これに関連して，行列式を不変に保つ，行列 F への諸変換について，次に，明らかにする。

行列 F への変換とは，観測系 F を変換（再構成）することであり，$Det(\widetilde{F}F)$ を不変に保つとは，そのように変換しても，観測系の良さが変わらないことを意味する。つまり，ここでは，観測系の良さに変化を与えない変換とは，どのようなものであるかを考察する。

行列式 $Det(\widetilde{F}F)$ を良く観察するならば，次のような変換 V および U が観測系の良さに変化を与えない解であることが容易に分かる。

6.1 左からの変換 V $(p\times p)$

大きさ $(p\times p)$ の行列 V，ただし，$\widetilde{V}V = E(p)$ ($p\times p$ の単位行列）について，F への左からの変換

$$F^* = VF \qquad (6\text{-}1)$$

このような変換 $(F\to F^*)$ に対して，$Det(\widetilde{F}F)$ は不変である。なぜなら

$$\widetilde{F}^*F^* = \widetilde{F}\widetilde{V}VF = \widetilde{F}EF = \widetilde{F}F \qquad (6\text{-}2)$$

従って

$$Det(\widetilde{F}^*F^*) = Det(\widetilde{F}F) \qquad (6\text{-}3)$$

これは，行列式 $Det(\widetilde{F}F)$ の変換 V に対する不変性

を示している。

このような変換Vの具体例として，次のようなものが知られている。

(1) 行と行の入れ替え

行列Fは(5-6)式に示すように，p行2列の行列であるが，この行列のi行目とj行目をそっくりそのまま相互に入れ替える変換，例えば1行目と2行目を入れ替える変換は次のように表わされる。

$$V1=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdot&0\\1&0&0&\cdot&0\\0&0&1&\cdot&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\cdot&1\end{bmatrix}\qquad(6\text{-}4)$$

このような$V1$に対してFは次のように変換される。

$$F=\begin{bmatrix}l1&m1\\l2&m2\\\cdot&\cdot\\lp&mp\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}l2&m2\\l1&m1\\\cdot&\cdot\\lp&mp\end{bmatrix}=F^*=V1F\qquad(6\text{-}5)$$

この変換の意味は，観測器同志を相互に入れ替えることである。

(2) 負変換

行列Fのある行全ての要素にマイナスを付ける変換で，例えば，1行目の負変換を考えれば，次のように表わされる。

$$V2=\begin{bmatrix}-1&0&0&\cdot&0\\0&1&0&\cdot&0\\0&0&1&\cdot&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\cdot&1\end{bmatrix}\qquad(6\text{-}6)$$

このような$V2$に対してFは次のように変換される。

$$F=\begin{bmatrix}l1&m1\\l2&m2\\\cdot&\cdot\\lp&mp\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-l1&-m1\\l2&m2\\\cdot&\cdot\\lp&mp\end{bmatrix}=F^*=V2F\qquad(6\text{-}7)$$

この変換の物理的意味は，観測軸の向きを逆転することである。

6.2 右からの変換U(2×2)

大きさ(2×2)の行列U(但し，$(Det\,U)^2=1$)について，Fへの右からの変換

$$F'=FU\qquad(6\text{-}8)$$

このような変換($F\to F'$)に対して，$Det(\widetilde{F}F)$は不変である。なぜなら

$$\widetilde{F'}F'=\widetilde{U}\widetilde{F}FU\qquad(6\text{-}9)$$

従って

$$\begin{aligned}Det(\widetilde{F'}F')&=Det(\widetilde{U}\widetilde{F}FU)\\&=(Det\,U)^2\;Det(\widetilde{F}F)\\&=Det(\widetilde{F}F)\qquad(6\text{-}10)\end{aligned}$$

これは，行列式$Det(\widetilde{F}F)$の変換Uに対する不変性を示している。

このような変換の良く知られている具体例として，次のようなものがある。

(1) 回転変換

観測系全体をそっくりそのまま，観測軸同志の位置関係は変えずに，平面上を回転させる変換で，たとえば，次のように表わされる。

$$U1=\begin{bmatrix}\cos\alpha,&\sin\alpha\\-\sin\alpha,&\cos\alpha\end{bmatrix}\qquad(6\text{-}11)$$

ここに，αは任意の角度である。

このような変換に対して，観測系の良さは不変である。

(2) 列と列の入れ替え

行列Fにおいて，列と列を入れ替える変換で，次のように表わされる。

$$U2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\qquad(6\text{-}12)$$

このような変換$U2$に対し，Fは次のように変換される。

$$F=\begin{bmatrix}l1&m1\\l2&m2\\\cdot&\cdot\\lp&mp\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}m1&l1\\m2&l2\\\cdot&\cdot\\mp&lp\end{bmatrix}=F'=FU2\qquad(6\text{-}13)$$

この物理的意味は，X軸とY軸を入れ替えること，すなわち，一種の鏡映変換である。

(3) 負変換

行列Fにおいて，任意の列の全ての要素にマイナスを付ける変換で，例えば，1列目の負変換は次のように表わされる。

$$U3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6-14}$$

このような変換に対して，行列Fは次のように変換される。

$$F=\begin{bmatrix}\ell 1 & m1\\ \ell 2 & m2\\ \cdot & \cdot\\ \ell p & mp\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-\ell 1 & m1\\ -\ell 2 & m2\\ \cdot & \cdot\\ -\ell p & mp\end{bmatrix}=F'=FU3 \tag{6-15}$$

この物理的意味は，X軸を逆向きにするということで，前項と同じ鏡映変換である。

以上のことを要約すれば

① 観測軸を逆向きにしても観測系の良さは変わらない。

② 平面内において，観測系を任意に回転させても観測系の良さは変わらない。

③ 観測系を鏡映変換しても，観測系の良さは変わらない。

7. 最適観測系であるための必要十分条件

前章までは，最適な観測系および最適でない観測系について成立する事柄を述べたが，本章からは，最適な観測系のみについて成り立つ事項を記す。

7.1 問題の設定

既に述べたように，最適観測系であるためには，$Det(\widetilde{F}F)$を最大ならしめる必要がある。そこで，問題を次のように設定する。すなわち，(5-8)式に従って

$$Det\begin{bmatrix}\boldsymbol{l}^2 & \boldsymbol{lm}\\ \boldsymbol{lm} & \boldsymbol{m}^2\end{bmatrix} \tag{7-1}$$

を最大にする$(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})$の条件式を求める。

ここに

$$\boldsymbol{l}=\begin{bmatrix}\ell 1\\ \ell 2\\ \cdot\\ \ell p\end{bmatrix},\ \boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}m1\\ m2\\ \cdot\\ mp\end{bmatrix} \tag{7-2}$$

ただし，

$$(\ell i)^2+(mi)^2=1\quad(i=1,2,\cdots,p) \tag{7-3}$$

であるので

$$\boldsymbol{l}^2+\boldsymbol{m}^2=\sum_{i=1}^{p}\left\{(\ell i)^2+(mi)^2\right\}=p \tag{7-4}$$

となることに注意する。

7.2 必要十分条件

アダマールの不等式により，次のことがいえる。

$$Det\begin{bmatrix}\boldsymbol{l}^2 & \boldsymbol{lm}\\ \boldsymbol{lm} & \boldsymbol{m}^2\end{bmatrix}\leqq\boldsymbol{l}^2\cdot\boldsymbol{m}^2 \tag{7-5}$$

ただし，等号が成り立つのは

$$\boldsymbol{lm}=0 \tag{7-6}$$

のときである。

処で，(7-4)式の条件下では，(7-5)式の右辺は

$$\boldsymbol{l}^2\cdot\boldsymbol{m}^2\leqq(p/2)^2 \tag{7-7}$$

となる。ここで，等号が成り立つのは

$$\boldsymbol{l}^2=\boldsymbol{m}^2 \tag{7-8}$$

のときである。

従って，(7-7)式を(7-5)式に代入すれば

$$Det\begin{bmatrix}\boldsymbol{l}^2 & \boldsymbol{lm}\\ \boldsymbol{lm} & \boldsymbol{m}^2\end{bmatrix}\leqq(p/2)^2 \tag{7-9}$$

を得る。この場合，等号が成り立つのは(7-6),(7-8)式が共に満たされているときである。すなわち

1. $(\ell i)^2+(mi)^2=1\quad(i=1,2,\cdots,p)$　(7-10)
2. $\boldsymbol{lm}=0$　(7-11)
3. $\boldsymbol{l}^2=\boldsymbol{m}^2\ (=p/2)$　(7-12)

を満たす$\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$がもし存在するならば，それは上述の行列式$Det(\widetilde{F}F)$を最大にする最適観測軸配置のひとつである。

たとえば，$p=2$の場合

$$F=(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{7-13}$$

は上記三条件を全て満たす。

また，$p=3$の場合は

$$F=(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix} \tag{7-14}$$

は上記三条件を全てみたす。

$p \geqq 4$ の場合の最適解については，次節に示すように，全ての p について存在することが分かっている。従って，上記三条件が，最適観測軸配置であるための必要十分条件である。

7.3 三条件を満たす解の存在について

$p \geqq 4$ の場合の解については，次章の最適解同志の和の規則④によって，全ての自然数 $p \geqq 4$ について，少なくとも，ひとつの解があることを示すことができる。すなわち，

$p=4$ の場合

$4=2+2$

従って，④により（次章参照のこと）$p=2$ のときの最適解（既知）を二つ合わせたものは $p=4$ のときの最適解である。

$p=5$ の場合

$5=2+3$

従って，$p=2$ のときの最適解（既知）と $p=3$ のときの最適解（既知）を合わせたものは $p=5$ のときの最適解である。つまり $p=4,5$ の場合は少なくとも一つの解が存在する。以上のことを $4=2\oplus 2$，$5=2\oplus 3$ と表わすことにする。

以下同様に

$p=6=3\oplus 3 = 2\oplus 2\oplus 2$

$p=7=3\oplus 2\oplus 2$

$p=8=2\oplus 2\oplus 2\oplus 2$

$p=9=3\oplus 3\oplus 3$

…………………………

全ての自然数 $p \geqq 4$ は 2，または，3 のいづれかの和で表わされる。従って，全ての自然数 $p \geqq 2$ について，少なくとも一つの最適解が存在する。

8. 最適解同志の和の規則

前節に述べた三条件の下における最適解同志の和の規則を次に示す。

${}^1\boldsymbol{l}$，${}^1\boldsymbol{m}$（観測軸の個数 $p1$）が上記三条件を満たし，同じく ${}^2\boldsymbol{l}$，${}^2\boldsymbol{m}$（観測軸の個数 $p2$）が上記三条件を満たすならば，

$$\boldsymbol{l}=\begin{bmatrix}{}^1\boldsymbol{l}\\{}^2\boldsymbol{l}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}{}^1\boldsymbol{m}\\{}^2\boldsymbol{m}\end{bmatrix} \tag{8-1}$$

なる $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$（観測軸の個数 $p=p1+p2$）も上記三条件を満たす。

ということで，これは，簡単な計算により証明される。

証明

条件 1 について，これを満たすことは自明。

条件 2 について

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}={}^1\boldsymbol{l}\cdot{}^1\boldsymbol{m}+{}^2\boldsymbol{l}\cdot{}^2\boldsymbol{m} \tag{8-2}$$

処で

$$ {}^1\boldsymbol{l}\cdot{}^1\boldsymbol{m}=0 \tag{8-3}$$

$$ {}^2\boldsymbol{l}\cdot{}^2\boldsymbol{m}=0 \tag{8-4}$$

従って，

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}=0 \tag{8-5}$$

条件 3 について

$$\boldsymbol{l}^2=({}^1\boldsymbol{l})^2+({}^2\boldsymbol{l})^2 \tag{8-6}$$

$$\boldsymbol{m}^2=({}^1\boldsymbol{m})^2+({}^2\boldsymbol{m})^2 \tag{8-7}$$

処で

$$({}^1\boldsymbol{l})^2=({}^1\boldsymbol{m})^2 \tag{8-8}$$

$$({}^2\boldsymbol{l})^2=({}^2\boldsymbol{m})^2 \tag{8-9}$$

従って，

$$\boldsymbol{l}^2=\boldsymbol{m}^2 \tag{8-10}$$

以上で $(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})$ が上記三条件を満たすことが示された。この物理的意味は

④ $p1$ 個からなる最適観測軸配置と $p2$ 個からなる最適観測軸配置とを任意の位置関係に合わせたものは，$p1+p2$ 個からなる最適観測軸配置の一つである。

ということである。

このことは，必然的に，複合解および基本解の概念を生ずる。すなわち，複合解とは二つ以上の解の結合したものであり，基本解とは他の解の結合によっては表わされない解のことである。

9. 最適観測軸配置

最適観測軸配置を求めるには $Det(\widetilde{F}F)$ を最大ならしめる F，すなわち $(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})$ つまり，観測軸 $(l_i\ m_i)$ の組 $(i=1,2,\cdots,p)$ を求めればよいことは既に述べた。そして，7 章で記した三条件を満たす $(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})$ がその解であることも述べた。ここでは，その具体解を求める。

条件 1 より

$$l_i=\cos\theta_i,\quad m_i=\sin\theta_i \tag{9-1}$$

$(i=1,2,\cdots,p)$

として良い。

そうすると条件2は

$$\sum_{i=1}^{p} \cos\theta_i \cdot \sin\theta_i = 0 \tag{9-2}$$

となり，条件3は

$$\sum_{i=1}^{p} \cos^2\theta_i = \sum_{i=1}^{p} \sin^2\theta_i \tag{9-3}$$

となる。

(9-2)式は書き換えると

$$\sum_{i=1}^{p} \sin(2\theta_i) = 0 \tag{9-4}$$

となり，同じく(9-3)式は

$$\sum_{i=1}^{p} \cos^2\theta_i - \sum_{i=1}^{p} \sin^2\theta_i = \sum_{i=1}^{p} \cos(2\theta_i) = 0 \tag{9-5}$$

となる。つまり(9-4),(9-5)式を満たす θ_i ($i=1, 2, \cdots, p$)を見つければ良いことになる。付録Aによれば，この解の一つは

$$\theta_i = \pi(i-1)/p \quad (i=1, 2, \cdots, p) \tag{9-6}$$

と表わされる。この解を図示すれば，図－2のようになる。図中，例えば $p=5$ とは，観測軸の個数が5個のときの最適観測軸配置を意味し，また3⊕2とは $p=3$ のときの最適観測軸配置と $p=2$ のときの最適観測軸配置とを任意の位置関係に合わせた複合解であることを示す。また，以上の事柄から

⑤ 基本解は，観測軸の個数 p が素数のときのみ存在し，そのときの配置形は180度を p 等分する方向に観測軸を配置する形で，図－2において，$p=2, 3, 5, 7, 11$ の場合に示されているような形である。観測軸の個数 p が素数でないときは，複合解しか存在しない。

10. 最適観測系における観測方程式の解

前章では最適観測軸配置を求めたが本章では，その系によって得られた観測値から未知所求量を求め，その精度および観測効率などについて述べる。

10.1 未知所求量の解

未知所求量 $\boldsymbol{v}$ の解は一般的には既に(4-1)式で与えられている。ここでは最適系における解をもう少し具体的に示す。

(4-1)式をもう一度ここに記す。

$$\boldsymbol{v} = (\widetilde{F} \cdot F)^{-1} \cdot \widetilde{F} \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{10-1}$$

ここに

$$F = (\boldsymbol{l} \ \ \boldsymbol{m}) = \begin{bmatrix} l1 & m1 \\ l2 & m2 \\ \cdot & \cdot \\ lp & mp \end{bmatrix} \tag{10-2}$$

ただし，最適系においては7.2節に示してあるように

$$\boldsymbol{l}\ \boldsymbol{m} = 0 \tag{10-3}$$

$$\boldsymbol{l}^2 = \boldsymbol{m}^2 = p/2 \tag{10-4}$$

従って，

$$\widetilde{F} F = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}^2 & \boldsymbol{l}\boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{m}\boldsymbol{l} & \boldsymbol{m}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p/2 & 0 \\ 0 & p/2 \end{bmatrix} \tag{10-5}$$

ゆえに(10-1)式は

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} p/2 & 0 \\ 0 & p/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{l}} \\ \widetilde{\boldsymbol{m}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}$$

$$= (2/p) \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}\ \boldsymbol{\lambda} \\ \\ \boldsymbol{m}\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = (2/p) \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{p} l_i \lambda_i \\ \\ \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i \end{bmatrix} \tag{10-6}$$

これが最適系における未知所求量の解であり，この式に従って未知所求量を算出することができる。また，これに伴う誤差の分散共分散については(4-2)式により(10-5)式を考慮して

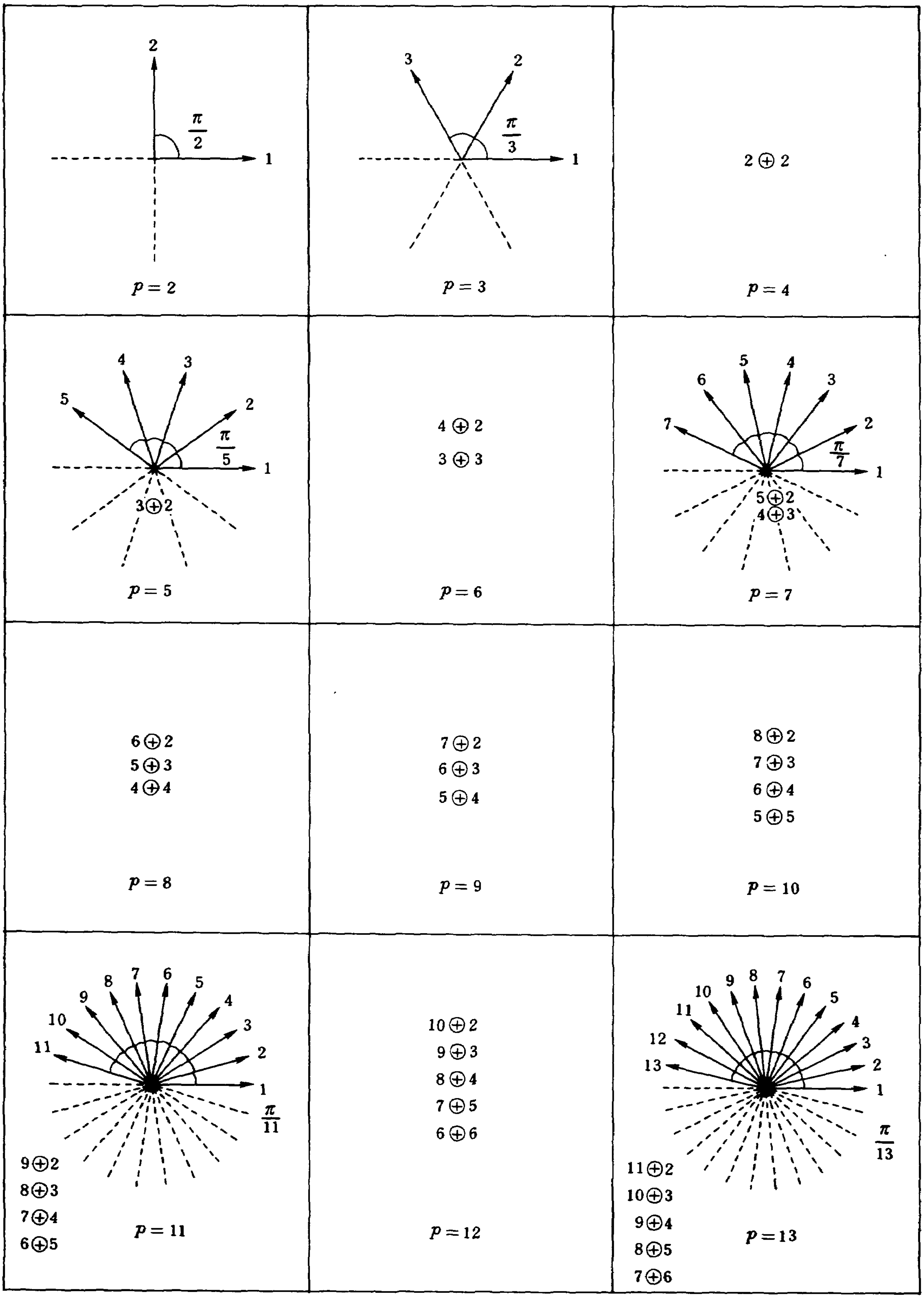
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\varepsilon^2/p & 0 \\ 0 & 2\varepsilon^2/p \end{bmatrix} \tag{10-7}$$

となる。

10.2 精　度

前節で誤差の分散共分散を求めてあるので，精度 h は(5-2)式に従って簡単に求まる。(5-2)式を次に再び掲げる。

$$h = \{Det(\Sigma)\}^{-1/2} \tag{10-8}$$


2
π/2
1
p = 2
3
2
π/3
1
p = 3
2 ⊕ 2
p = 4
4
3
5
2
π/5
1
3⊕2
p = 5
4 ⊕ 2
3 ⊕ 3
p = 6
5
4
6
3
7
2
π/7
1
5⊕2
4⊕3
p = 7
6⊕2
5⊕3
4⊕4
p = 8
7⊕2
6⊕3
5⊕4
p = 9
8⊕2
7⊕3
6⊕4
5⊕5
p = 10
8 7 6 5 4 3 2 1
9 10 11
π/11
9⊕2
8⊕3
7⊕4
6⊕5
p = 11
10⊕2
9⊕3
8⊕4
7⊕5
6⊕6
p = 12
9 8 7 6 5 4 3 2 1
10 11 12 13
π/13
11⊕2
10⊕3
9⊕4
8⊕5
7⊕6
p = 13

図－2

従って上式に(10-7)式を代入すれば

$$h=\{(2\varepsilon^2/p)^2\}^{-1/2}=p/(2\varepsilon^2) \qquad (10\text{-}9)$$

となる。

上式は精度hが観測器の個数pに比例することを示している。つまり，観測器の個数が多くなればなる程それだけ精度が良くなることを意味する。しかし，同時に，観測器の個数が多くなるということは，それだけ経費も余計にかかってくることになるので，経費と精度両方を考慮した観測効率eについて調べる必要が出て来る。この観測効率eについて次節で述べる。

10.3 観測効率

観測効率eは(5-1)，(5-3)式から

$$\mathrm{e}=h/p\,¥ \qquad (10\text{-}10)$$

と表わされる。

特に観測軸の個数pのときの観測効率をe(p)と表わせば，上式に(10-9)式を代入することにより，

$$\mathrm{e}(p)=p/(2\varepsilon^2 p¥)=1/(2\varepsilon^2¥) \qquad (10\text{-}11)$$

が得られる。この場合，¥の値はpによらず一定と考えているので，観測効率e(p)は観測器の個数pに無関係となる。言い換えれば，$p1$(任意の自然数)個の観測軸よりなる最適観測軸配置も，$p2$(任意の自然数)個の観測軸よりなる最適観測軸配置も，その観測効率は同じである。ただし，これは，経費gが(5-3)式によって定義されている限りのことで，この式が変わって来れば，上述の事柄も成り立たなくなることは言うまでもない。

11. 故障の考慮

冗長度のある観測系において観測器が故障し，その故障観測器が摘出された場合には

イ．故障観測器のデータを除外する(観測器の位置は，そのまま)。

ロ．故障観測器を除外して，残った観測器を最適系に再編成する。

等の方法により精度を向上させることができる。たとえば図－2($p=5$の場合)において番号4の観測器が故障した場合，その観測器のデータを用いず，残りの1,2,3,5の観測器より得られるデータから未知所求量を求めるというのが上記イの方法で，ロの方法とは残りの観測器1,2,3,5を図－2に示す$p=4$の場合の最適系に編成しなおして，それより得られるデータを基に未知所求量を求めるという方法である。

言うまでもなくロの方法の方が精度が良くなるけれども再編成の手間がかかる。本報告ではイの場合の未知所求量の解とその精度および観測効率について述べる。

11.1 1個故障の場合

(1) 未知所求量の解およびその分散共分散

観測軸が3個以上のときの最適観測系において，ある一つの観測軸のデータを使わない場合を考える。そのときの観測系をF'，同じく観測データを$\boldsymbol{\lambda}'$とする。すなわち，

$$F'=\begin{bmatrix} l1 & m1 \\ \cdot & \cdot \\ li-1 & mi-1 \\ li+1 & mi+1 \\ \cdot & \cdot \\ lp & mp \end{bmatrix} \qquad (11\text{-}1)$$

$$\boldsymbol{\lambda}'=\begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \cdot \\ \lambda i-1 \\ \lambda i+1 \\ \cdot \\ \lambda p \end{bmatrix} \qquad (11\text{-}2)$$

このときの未知所求量$\boldsymbol{v}$およびその分散共分散$\boldsymbol{\Sigma}$は(4-1)式および(4-2)式のFおよび$\boldsymbol{\lambda}$をF'および$\boldsymbol{\lambda}'$に入れ替えて次のように表わされる。

$$\boldsymbol{v}=(\widetilde{F}'F')^{-1}\,\widetilde{F}'\boldsymbol{\lambda}' \qquad (11\text{-}3)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}=\varepsilon^2(\widetilde{F}'\cdot F')^{-1} \qquad (11\text{-}4)$$

ただし，$(\widetilde{F}'F')^{-1}$はこの場合,簡単な形で陽に解ける。すなわち

$$\widetilde{F}'F'=\widetilde{F}F-\begin{bmatrix} li \\ mi \end{bmatrix}[li\ \ mi]$$

$$=pE(2)/2-\begin{bmatrix} li \\ mi \end{bmatrix}[li\ \ mi] \qquad (11\text{-}5)$$

従って，公式1を用いることにより

$(\widetilde{F}'F')^{-1}$

$$=(2/p)\begin{bmatrix}1+2(li)^2/(p-2), & 2li\,mi/(p-2)\\ 2li\,mi/(p-2), & 1+2(mi)^2/(p-2)\end{bmatrix} \tag{11-6}$$

となる。

因みに，故障した観測軸 (li, mi) を (1, 0) とすると，上式は

$$(\widetilde{F}'F')^{-1}=\begin{bmatrix}(2/p)+4/p(p-2) & 0\\ 0 & 2/p\end{bmatrix} \tag{11-7}$$

となる。これは，(10-7) 式と比較してみると，故障した観測軸の方向の誤差が $4\varepsilon^2/p(p-2)$ だけ悪くなることを示している。

(2)　精度

精度 h は (5-2) 式から

$$h=\{Det(\Sigma)\}^{-1/2} \tag{11-8}$$

と表わされる。p 個の観測軸のうち，観測軸 i を用いないときの精度を $h(p)i$ と表わせば上式 (11-8) に (11-4) 式を代入して

$$h(p)i=\varepsilon^{-2}|\widetilde{F}'F'|^{1/2} \tag{11-9}$$

となる。

処で，(11-5) 式を見れば

$$|\widetilde{F}'F'|=\left|pE(2)/2-\begin{bmatrix}li\\ mi\end{bmatrix}[li, mi]\right|$$
$$=(p/2)^2\{(p-2)/p\} \tag{11-10}$$

を得る。ただし上式を導く際に公式 2 を用いた。

従って，

$$h(p)i=\varepsilon^{-2}(p/2)\{(p-2)/p\}^{1/2} \tag{11-11}$$

となる。

この式から分かるように，この場合の精度は観測軸に関係しない。つまり，最適観測軸配置での 1 個故障の場合は，どの観測軸が故障しても精度は同一であることを意味する。これは最適配置での 1 個故障の場合の特有の性質で，それ以外の場合には，一般に，同じ精度になることはない。

(3)　観測効率

観測効率 e については (5-1) 式に示されている通

$$e=h/p¥ \tag{11-12}$$

と表わされる。特に，p 個の観測軸よりなる最適観測軸配置において，観測軸 i が故障した場合の観測効率を $e(p)i$ と表わせば (11-11) 式を上式 (11-12) に代入して

$$e(p)i=\{(p-2)/p\}^{1/2}/(2\varepsilon^2¥) \tag{11-13}$$

となる。

この式 (11-13) は p が増大するにつれて，$e(p)i$ も増大することを示している。つまり，観測軸の個数 p が大きければ大きい程，一個故障の場合の観測効率は良くなっていくことを示している。また，観測効率 $e(p)i$ が，故障観測軸 i によらないことは，精度 $h(p)i$ の場合と同様である。

11.2　2 個故障の場合

(1)　未知所求量の解およびその分散共分散

観測軸が 4 個以上のときの最適観測系において，ある二つの観測軸のデータを使わない場合を考える。そのときの観測系を F''，同じく観測データを $\boldsymbol{\lambda}''$ とする。すなわち

$$F''=\begin{bmatrix}l1 & m1\\ \cdot & \cdot\\ li-1 & mi-1\\ li+1 & mi+1\\ \cdot & \cdot\\ lj-1 & mj-1\\ lj+1 & mj+1\\ \cdot & \cdot\\ lp & mp\end{bmatrix} \tag{11-14}$$

$$\boldsymbol{\lambda}''=\begin{bmatrix}\lambda 1\\ \cdot\\ \lambda i-1\\ \lambda i+1\\ \cdot\\ \lambda j-1\\ \lambda j-1\\ \cdot\\ \lambda p\end{bmatrix} \tag{11-15}$$

このときの未知所求量 $\boldsymbol{v}$ およびその分散共分散 $\boldsymbol{\Sigma}$ は (4-1) 式および (4-2) 式の F および $\boldsymbol{\lambda}$ を F'' および $\boldsymbol{\lambda}''$ に入れ替えて次のように表わされる。

$$\boldsymbol{v}=(\widetilde{F}''\cdot F'')^{-1}\cdot\widetilde{F}''\cdot\boldsymbol{\lambda}'' \tag{11-16}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}=\varepsilon^2(\widetilde{F}''\cdot F'')^{-1} \tag{11-17}$$

ただし，$(\widetilde{F}''\cdot F'')^{-1}$はこの場合，簡単な形で陽に解ける。すなわち

$$\widetilde{F}''\cdot F''=\widetilde{F}F-\begin{bmatrix} l i & l j \\ m i & m j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l i & m i \\ l j & m j \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (p/2)-\{(l i)^2+(l j)^2\}, & -(l i m i+l j m i) \\ -(l i m i+l j m j), & (p/2)-\{(m i)^2+(m j)^2\} \end{bmatrix} \tag{11-18}$$

従って，

$$\widetilde{F}''\cdot F''=\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \tag{11-19}$$

と置くと

$$(\widetilde{F}''\cdot F'')^{-1}=\begin{bmatrix} -\beta/(\gamma^2-\alpha\beta), & \gamma/(\gamma^2-\alpha\beta) \\ \gamma/(\gamma^2-\alpha\beta), & -\alpha/(\gamma^2-\alpha\beta) \end{bmatrix} \tag{11-20}$$

となる。

(2)　精度

p個の観測軸のうち，観測軸 $i\,j$ を用いないときの精度$h(p)ij$と表わせば，(5-2)式より

$$h(p)ij=\varepsilon^{-2}\,|\widetilde{F}''\cdot F''|^{1/2} \tag{11-21}$$

となる。

処で(11-18)式を見れば

$$\widetilde{F}''\cdot F''=(p/2)E(2)-\begin{bmatrix} l i & l j \\ m i & m j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l i & m i \\ l j & m j \end{bmatrix} \tag{11-22}$$

と与えられているので

$$|\widetilde{F}''\cdot F''|=(p/2)^2\begin{vmatrix} 1-2/p, & -(2/p)\cos\theta ij \\ -(2/p)\cos\theta ij, & 1-2/p \end{vmatrix}$$

$$=(p/2)^2\{(1-2/p)^2-(2/p)^2\cos^2\theta ij\} \tag{11-23}$$

を得る。ただし上式を導く際に公式2を用いた。

従って

$$h(p)ij=\varepsilon^{-2}(p/2)\{(1-2/p)^2-(2/p)^2\cos^2\theta ij\}^{1/2} \tag{11-24}$$

となる。

(3)　観測効率

p個の観測軸よりなる最適観測軸配置において，観測軸 i および j が故障した場合の観測効率をe$(p)ij$と表わせば(5-1)式および(11-24)式により

$$e(p)ij=h(p)ij/p\text{¥}$$

$$=\{(1-2/p)^2-(2/p)^2\cos^2\theta ij\}^{1/2}/(2\varepsilon^2\text{¥}) \tag{11-25}$$

となる。

この式(11-25)はpが増大するにつれて，また，観測軸 i および j の成す角が 90° に近ければ近い程，観測効率e$(p)ij$も増大することを示している。つまり，ある観測軸が故障した場合，その軸に近い観測軸が故障すると損失が大きいということである。

11.3　n個故障の場合

(1)　未知所求量の解およびその分散共分散

観測軸が$(n+2)$個以上のときの最適観測系において，n個の観測軸のデータを使わない場合を考える。そのときの観測系を$F^{(n)}$，同じく観測データを$\boldsymbol{\lambda}^{(n)}$とする。

このときの未知所求量$\boldsymbol{v}$およびその分散共分散$\boldsymbol{\Sigma}$は(4-1)式および(4-2)式のFおよび$\boldsymbol{\lambda}$を$F^{(n)}$および$\boldsymbol{\lambda}^{(n)}$に入れ替えて次のように表わされる。

$$\boldsymbol{v}=(\widetilde{F}^{(n)}\cdot F^{(n)})^{-1}\cdot\widetilde{F}^{(n)}\cdot\boldsymbol{\lambda}^{(n)} \tag{11-26}$$

$$\Sigma=\varepsilon^2(\widetilde{F}^{(n)}\cdot F^{(n)})^{-1} \tag{11-27}$$

ただし，$(\widetilde{F}^{(n)}\cdot F^{(n)})^{-1}$はこの場合，以下に示すように，陽に書き表わすことができる。

(11-22)式を参考にしながら

$$\widetilde{F}^{(n)}\cdot F^{(n)}$$

$$=\widetilde{F}F-\begin{bmatrix} l i1 & l i2 & \cdot & l in \\ m i1 & m i2 & \cdot & l in \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l i1 & m i1 \\ l i2 & m i2 \\ \cdot & \cdot \\ l in & m in \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (p/2)-\sum_{j=1}^{n}(l ij)^2, & -\sum_{j=1}^{n} l ij\cdot m ij \\ -\sum_{j=1}^{n} l ij\cdot m ij, & (p/2)-\sum_{j=1}^{n}(m ij)^2 \end{bmatrix} \tag{11-28}$$

となり，これを

$$=\begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & \gamma' \end{bmatrix} \tag{11-29}$$

と置く。

なお，

$$\gamma+\gamma'=p-\sum_{j=1}^{n}\{(\ell ij)^2+(m ij)^2\}=p-n$$

であるので

$$\gamma'=p-n-\gamma \qquad (11\text{-}30)$$

に注意する。

さて，逆行列 $(\widetilde{F}^{(n)}\cdot F^{(n)})^{-1}$ は，上記記号を用いて

$$(\widetilde{F}^{(n)}\cdot F^{(n)})^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma'/(\gamma\gamma'-\delta^2), & -\delta/(\gamma\gamma'-\delta^2)\\ -\delta/(\gamma\gamma'-\delta^2), & \gamma/(\gamma\gamma'-\delta^2)\end{bmatrix} \qquad (11\text{-}31)$$

となる。

(2) 精度

p 個の観測軸からなる最適観測軸配置において，n 個の観測軸が故障して，そのデータを用いない場合の精度を特に $h^{(n)}(p)$ と表わすと，(5-2),(11-27)式より

$$h^{(n)}(p)=\varepsilon^{-2}|\widetilde{F}^{(n)}\cdot F^{(n)}|^{1/2} \qquad (11\text{-}32)$$

となる。

処で，(11-29),(11-30) 式を見れば，

$$|\widetilde{F}^{(n)}\cdot F^{(n)}|=\gamma\gamma'-\delta^2$$

$$=\gamma(p-n-\gamma)-\delta^2 \qquad (11\text{-}33)$$

であるので

$$h^{(n)}(p)=\varepsilon^{-2}\{\gamma(p-n-\gamma)-\delta^2\}^{1/2} \qquad (11\text{-}34)$$

(3) 観測効率

p 個の観測軸よりなる最適観測軸配置において，n 個の観測軸が故障した場合の観測効率を $e^{(n)}(p)$と表わせば(5-1)式および(11-34)式により

$$e^{(n)}(p)=h^{(n)}(p)/p\,\yen$$

$$=\{\gamma(p-n-\gamma)-\delta^2\}^{1/2}/(p\varepsilon^2\,\yen)$$

$$(11\text{-}35)$$

となる。

12. 配置誤差の考慮

前章までは，誤差については観測機器に起きる観測誤差のみを考慮している。しかし実際には観測系を構成する観測器の取付位置誤差，すなわち配置誤差（ミスアライメント）も考慮しなければならない。というのは，場合によれば，わずかの取付位置誤差が結果に大きく効いて来てしまう可能性もあるからである。そこで，以下に，それらの事柄について述べることにする。

12.1 配置誤差

通常の観測方程式は(3-1)式に示すように

$$\begin{bmatrix}\lambda 1\\ \lambda 2\\ \cdot\\ \lambda p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ell 1 & m1\\ \ell 2 & m2\\ \cdot & \cdot\\ \ell p & mp\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon 1\\ \varepsilon 2\\ \cdot\\ \varepsilon p\end{bmatrix} \qquad (12\text{-}1)$$

と表わされる。

ここに $\varepsilon i\ (i=1,2,\cdots,p)$は，観測機器に起きる観測誤差と考える。ただし

$$\boldsymbol{E}(\varepsilon i\,\varepsilon j)=\varepsilon^2\delta ij \quad (i,j=1,2,\cdots,p) \qquad (12\text{-}2)$$

とした((3-4)式)。言うまでもなく，上式には配置誤差は含まれていない。

観測器の位置は，この場合，観測軸の方向を表わす$(\ell i,\ mi)\ (i=1,2,\cdots,p)$ によって示されているので，配置誤差を考慮するには，上記の$(\ell i, mi)$を次のように変換して考えればよい。

$$\ell i\rightarrow \ell i+\delta\ell i \quad (i=1,2,\cdots,p) \qquad (12\text{-}3)$$

$$mi\rightarrow mi+\delta mi \quad (i=1,2,\cdots,p) \qquad (12\text{-}4)$$

ここに，$\delta\ell i$，$\delta mi\ (i=1,2,\cdots,p)$はそれぞれ，観測軸の据付方向の誤差の$x$，$y$成分である。ただし，それらは互いに無相関で，誤差の程度は等しいものとする。すなわち，

$$\boldsymbol{E}(\delta\ell i\cdot\delta\ell j)=\delta^2\cdot\delta ij \qquad (12\text{-}5)$$

$$\boldsymbol{E}(\delta mi\cdot\delta mj)=\delta^2\cdot\delta ij \qquad (12\text{-}6)$$

$$\boldsymbol{E}(\delta\ell i\cdot\delta mj)=0 \qquad (12\text{-}7)$$

$$(i,j=1,2,\cdots,p)$$

とする。

12.2 配置誤差を考慮した観測方程式

配置誤差を考慮した観測方程式は(10-1)式における$(\ell i,\ mi)\ (i=1,2,\cdots,p)$に(12-3),(12-4)式に示すような変換を行なったものである。つまり

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ \cdot \\ \lambda p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l1+\delta l1 & m1+\delta m1 \\ l2+\delta l2 & m2+\delta m2 \\ \cdot & \cdot \\ lp+\delta lp & mp+\delta mp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon 1 \\ \varepsilon 2 \\ \cdot \\ \varepsilon p \end{bmatrix} \tag{12-8}$$

となる。上式を書き換えて誤差の部分をまとめれば

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ \\ \lambda p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l1 & m1 \\ l2 & m2 \\ \cdot & \cdot \\ lp & mp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x\cdot\delta l1+y\cdot\delta m1+\varepsilon 1 \\ x\cdot\delta l2+y\cdot\delta m2+\varepsilon 2 \\ \cdot \\ x\cdot\delta lp+y\cdot\delta mp+\varepsilon p \end{bmatrix} \tag{12-9}$$

となる。そこで，まとめられた誤差の部分を

$$\varepsilon'i = x\cdot\delta li+y\cdot\delta mi+\varepsilon i \tag{12-10}$$

$$(i=1, 2, \cdots, p)$$

と記すことにする。そうすると(12-9)式は

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ \cdot \\ \lambda p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l1 & m1 \\ l2 & m2 \\ \cdot & \cdot \\ lp & mp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon' 1 \\ \varepsilon' 2 \\ \\ \varepsilon' p \end{bmatrix} \tag{12-11}$$

と書き表わされる。ここに，誤差 $\varepsilon' i$ ($i=1, 2, \cdots, p$) は(12-2), (12-5), (12-6) および(12-7)式より

$$\boldsymbol{E}(\varepsilon'i\ \varepsilon'j) = (x^2\delta^2+y^2\delta^2+\varepsilon^2)\,\delta ij$$

$$= (v^2\delta^2+\varepsilon^2)\,\delta ij \tag{12-12}$$

$$(i, j=1, 2, \cdots, p)$$

ただし，

$$x^2+y^2=v^2 \tag{12-13}$$

とした。さて

$$\varepsilon' = (v^2\delta^2+\varepsilon^2)^{1/2} \tag{12-14}$$

と置けば，(12-12)式は

$$\boldsymbol{E}(\varepsilon'i\ \varepsilon'j) = (\varepsilon')^2\,\delta ij \tag{12-15}$$

$$(i, j=1, 2, \cdots, p)$$

となる。従って配置誤差を考慮した場合の観測方程式は(12-11)式で表わされ，この式は観測誤差のみを考慮した観測方程式(3-1)と誤差の大きさが多少異なるだけで，本質的に異なるところはない。つまり(12-11)式から出発して得られる諸結論も(3-1)式から出発して得られる諸結論も全く同一になる。すなわち，

⑥ 配置誤差を考慮しても諸結論に変更はない。

13. まとめ

本報告で述べられている主な事柄を箇条書きにまとめると，次のようになる。

本報告で考察した観測系について

① 観測軸を逆向きにしても観測系の良さは変わらない。

② 平面内において，観測系を任意に回転させても観測系の良さは変わらない。

③ 観測系を鏡映変換しても，観測系の良さは変わらない。

④ 最適観測系同志の和も又，最適観測系である。

⑤ 180° を p 等分する方向に向く p 個の観測軸の組は，観測軸が p 個の場合の最適観測軸配置である。

⑥ 配置誤差を考慮しても，上記諸結論に変更は無い。

二次元ベクトル量計測は，既に報告した三次元ベクトルの基礎をなすので，本報告の内容は，ベクトル量計測の本質的理解に役立つと考えられる。

また，二次元ベクトル量計測に関する応用については，後日，改めて報告したいと思う。

参考文献

1) 木村武雄；最良の観測系について，日本統計学会誌　2巻1号(1971)

2) 木村武雄；観測系の評価に関するひとつの数学的理論　航技研報告TR-301　(1972)

3) 木村武雄；3次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について，航技研報告TM-367 (1978)

4) 木村武雄；バイアスエラーを考慮した3次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について 航技研報告TR－600 (1980)

5) 木村武雄；最適の測定系について，第12回SICE，No. 3509 (昭和48年)

付録A 正弦・余弦の零和の規則

pを2以上の任意の正整数とし，nをpで割り切れない整数とする。このとき

$$\theta j = 2n\pi(j-1)/p \quad (j=1,2,\cdots,p) \tag{A-1}$$

なるθj ($j=1,2,\cdots,p$) について

$$\sum_{j=1}^{p} \sin(\theta j+\delta)=0 \tag{A-2}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \cos(\theta j+\delta)=0 \tag{A-3}$$

である。ただし，δは任意の角度。

証明

指数関数の性質により

$$\sum_{j=1}^{p} \exp\{i(\theta j+\delta)\}$$

$$=\exp(i\cdot\delta)\sum_{j=1}^{p}\exp(i\cdot\theta j)$$

$$=\exp(i\cdot\delta)\{1-\exp(i\cdot 2n\pi)\}/\{1-\exp(i\cdot 2n\pi/p)\}$$

$$=0 \tag{A-4}$$

なんとなれば

$$\exp(i\cdot 2n\pi)=1 \tag{A-5}$$

$$\exp(i\cdot 2n\pi/p)\neq 1 \tag{A-6}$$

処で，虚数の指数関数は次のように分解できる。

$$\sum_{j=1}^{p} \exp\{i(\theta j+\delta)\}$$

$$=i\sum_{j=1}^{p}\sin(\theta j+\delta)+\sum_{j=1}^{p}\cos(\theta j+\delta) \tag{A-7}$$

(A-4)式により，(A-7)式が0であるので，同式の虚数部，実数部とも0でなければならない。すなわち，

$$\sum_{j=1}^{p} \sin(\theta j+\delta)=0 \tag{A-8}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \cos(\theta j+\delta)=0 \tag{A-9}$$

以上で証明がなされた。

公式1 正則行列A ($p\times p$)，B ($q\times q$)，行列U ($p\times p$)，V ($q\times q$) に対して

$$(A+UBV)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U(B^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

公式2 正則行列A ($p\times q$)，B ($q\times p$) に対して

$$|E(p)+AB|=|E(q)+BA|$$

航空宇宙技術研究所資料547号

昭和60年8月発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7－44－1
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所　株式会社　共進
東京都杉並区久我山5－6－17

Printed in Japan