

ISSN 0452-2982

UDC 531.38.681.586.2

62-752.623.4.084.3

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-568

弾性支持 2 自由度ジャイロの運動方程式
に関する一考察

新 宮 博 公

1987 年 4 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

弾性支持2自由度ジャイロの運動方程式 に関する一考察*

新 宮 博 公**

On the Motion Equation of an Elastically Supported Two Degree of Freedom Gyro

By Hirokimi Shingu

Abstract

This report describes a method of deriving a stricter motion equation for TDG (Tuned Dry Gyro) than Craig's, which has been used in generalized solutions, and comparison is made between the two equations.

In order to reduce the complexity of mathematical manipulation, Craig's solution for TDG is derived under the assumption that rotor displacement angle θ is very small, and the derived expressions are valid over a range where $\sin\theta \cong \theta$, $\cos\theta \cong 1$. In this study the motion of an ETG (Elastically Supported Two Degree of Freedom Gyro), which is defined as a TDG where the above assumption is neglected, is theoretically analyzed, and the analytic solution about a single-gimballed model of ETG is presented. The behaviors of TDG and ETG are simulated using various parameters of TDG developed in Japan as attitude sensors of artificial satellites and their difference is quantitatively evaluated. The resulting numerical solution shows that Craig's solution becomes inaccurate with an increase in amplitude and frequency of input angle.

1. まえがき

運動体の角速度検出に用いる力学ジャイロの主なものとして、浮動型積分ジャイロ (FRIG)^{1)~4)}, チューンドドライジャイロ (TDG)^{5)~10)}, 振動ジャイロ (VRG)^{11)~13)}, 流体ジャイロ (FRG)¹⁴⁾, 半球共振ジャイロ (HRG)¹⁵⁾ 等がある。これらの中で、TDGはCraigによって一般的な理論⁶⁾が確立されて以来急速に実用化が進み、各種ミッションに適用されつつある¹⁶⁾。また、最近ではTDGのスピンの軸方向

に不釣合質量を付加し、1個で2軸方向の角速度、直線加速度が同時に計測可能な加速度計ジャイロ装置が設計解析されている¹⁷⁾が、これはTDGのロータがスピン角速度の2倍の周波数で微小振動する現象を利用したものである。このようにTDGの運動原理は適用上の有用性が高いと思われるので、本稿では、TDGの運動解析に的をしぼり、TDGの一般式^{6), 7)}の厳密化を試みた。TDGの一般式は、ロータのケースに対する相対角変位 θ が十分小さい($\theta \ll 1$)範囲、すなわち、 $\sin\theta \cong \theta$, $\cos\theta \cong 1$ が近似許容される範囲で有効であるが、TDGは通常リバランス回路を付して¹⁸⁾サーボ系として使用するためその仮定は十

*昭和62年2月19日 受付

**計測部

分妥当性を有している。しかし、 $\theta \ll 1$ なる条件を除けばCraig解⁶⁾の成立条件が難しくなるので、ジャイロは、チューニング条件⁷⁾を有するTDGとしてではなく、単に弾性支持された2自由度ジャイロ(以下、ETG)として機能する。したがって、TDGは特殊な状態($\theta \ll 1$)におけるETGであると云える。本考察では、まずTDGの単一ジンバル系¹⁰⁾をモデルとし、 $\theta \ll 1$ なる仮定を取除いたジャイロ(ETG)の運動を解析し、ロータに作用する外部トルクが零の状態では θ とETGの対慣性空間角変位 ϕ とを関係づける運動方程式を、ETGのケース固定座標系に即して導いた²⁰⁾。つぎに、この運動方程式を用いて、ETGが角振動するときの θ の挙動をシミュレーションし、この結果に基いてCraig解との比較検討を行った。これらの解析、シミュレーションを通じて、ETGの入力角と振動周波数に対応したCraig解の精度評価を行なうことができた。

主要な記号および略語

A, B, C	; ロータの x_r, y_r, z_r 軸まわりの慣性モーメント [$N \cdot m \cdot s^2$]
A_1, B_1, C_1	; ジンバルの x_1, y_1, z_1 軸まわりの慣性モーメント [$N \cdot m \cdot s^2$]
D_{x_1}, D_{y_1}	; ヒンジの x_1, y_1 軸まわりのダンピング係数 [$N \cdot m \cdot s$]
D_R	; ロータ、ケース間のダンピング係数 [$N \cdot m \cdot s$]
E_{crg}	; ETGのCraig解と厳密解の差違 [$^\circ$]
E_s	; Craig解の相対精度 [%]
f	; ETGに作用する入力角の周波数 [Hz]
H_0, H_1	; ロータ、ジンバルの角運動量 [$N \cdot m \cdot s$]
K_{x_1}, K_{y_1}	; ヒンジの x_1, y_1 軸まわりの捩れ剛性 [$N \cdot m/rad$]
M_{Rx_r}, M_{Ry_r}	; ロータに作用する x_r, y_r 軸まわりの外部トルク(トルカーによるトルク, 誤差トルク等) [$N \cdot m$]
n	; ジンバルの個数
N	; シャフトの対慣性空間角速度 [rad/s]
N'	; シャフトの対ケース角速度 [rad/s]
T_D	; ロータ、ケース間のドラッグトルク

[$N \cdot m/rad$]

x, y, z ; シャフト固定軸 (z ; シャフトスピン軸)

x_1, y_1, z_1 ; ジンバル固定軸 ($x_1 = x$; 内部ヒンジ軸, y_1 ; 外部ヒンジ軸)

x_r, y_r, z_r ; ロータ固定軸 (z_r ; ロータのスピン軸)

X, Y, Z ; ケース固定軸 (X, Y ; 入力軸, $Z = z$; シャフトスピン軸)

θ_x, θ_y ; ロータの x_1, y_1 軸まわりの対ケース相対角変位 [$^\circ$]

θ_x, θ_y ; ロータの X, Y 軸まわりの対ケース相対角変位 [$^\circ$]

$\dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z$; ETGの X, Y, Z 軸まわりの角速度 [$^\circ/s$]

ϕ_0 ; ETGに作用する入力角の大きさ [$^\circ$]

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$; シャフトの x, y, z 軸まわりの対慣性空間角速度 [$^\circ/s$]

$\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$; ジンバルの x_1, y_1, z_1 軸まわりの対慣性空間角速度 [$^\circ/s$]

$\omega_{x_r}, \omega_{y_r}, \omega_{z_r}$; ロータの x_r, y_r, z_r 軸まわりの対慣性空間角速度 [$^\circ/s$]

上記の各記号で接尾辞が $\dot{\phi}_{XY}$ のように付されているときには複素数表示($\dot{\phi}_{XY} = \dot{\phi}_X + j\dot{\phi}_Y$)を意味し、 $\dot{\phi}_{(XY)}$ のような表現は“ $\dot{\phi}_X$ および $\dot{\phi}_Y$ ”を意味するものとする。また、ある変数(変位角) λ について $[\lambda]_1, [\lambda]_2, [\lambda]_3$ のような表現はそれぞれ

$$[\lambda]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda & \sin \lambda \\ 0 & -\sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$[\lambda]_2 = \begin{bmatrix} \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \lambda & 0 & \cos \lambda \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$[\lambda]_3 = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

を表わすものとする。

略語

ETG ; Elastically Supported Two Degrees of Freedom Gyro

FRG ; Fluid Rotor Gyro

FRIG ; Floated Rate Integrating Gyro

HRG ; Hemispherical Resonator Gyro

TDG ; Tuned Dry Gyro

VRG ; Vibratory Rate Gyro

2. ETGの運動解析

ETGの構造は、TDGと全く同様に^{6),7)}図1のようなモデル化が可能である。図において、チューニング条件⁷⁾でシャフトが回転し、かつロータの対シャフト相対角変位 θ_x, θ_y が微小な場合には、ETGはTDGとなる。ジンバルは単一ジンバル構造(図1に同じ)とし、ケースの対慣性空間角速度 $\dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y$ はロータのスピンの角速度 N に比して十分小さいと仮定する。Craigの解⁶⁾は、 $\theta_x, \theta_y \ll 1, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y \ll N$ を仮定しているが、本稿ではそれらの仮定を取除いて解析を進める。但し、各ヒンジはそれぞれ x_1, y_1 軸まわりにのみ回転の自由度があると仮定する。

2.1 座標系の設定

ロータ、ジンバルの重心は、シャフトの回転軸上の点 O において一致すると仮定し、座標系としては、 $O-XYZ$ (ケース固定), $O-xyz$ (シャフト固定),

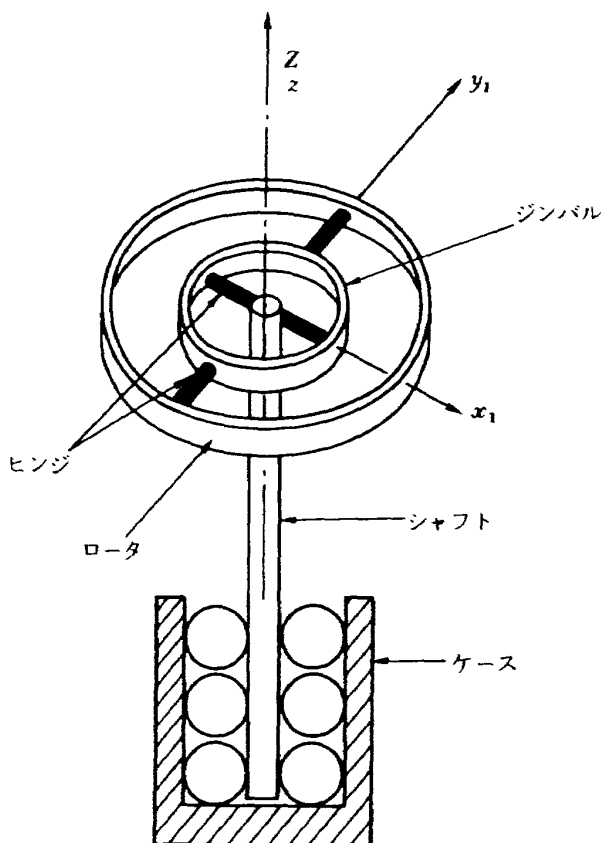


図1 ETGのモデル

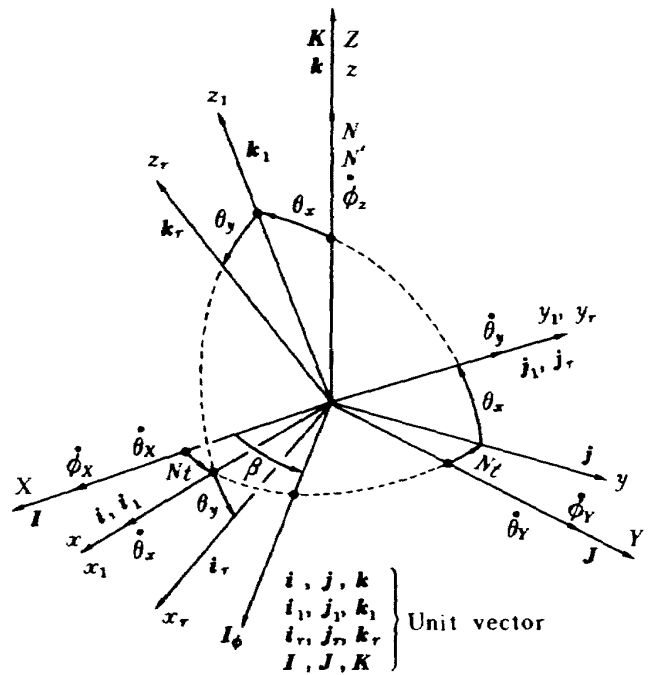


図2 各座標軸間の相対関係

$O-x_1 y_1 z_1$ (ジンバル固定), $O-x_r y_r z_r$ (ロータ固定)を図2のように定める。ケースは X, Y, Z 軸まわりに対慣性空間角速度 $\dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z$ で回転($\dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z \ll N$)、シャフトはロータ、ジンバルとともに Z 軸まわりにスピンの角速度 N (対慣性空間)で回転、ロータはヒンジ軸 x_1, y_1 まわりに対ケース相対角速度 $\dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y$ で回転するものとする。図2より、ロータ固定座標系とジンバル固定座標系、シャフト固定座標系との関係およびジンバル固定座標系とシャフト固定座標系との関係はそれぞれ

$$\begin{aligned} [i_r, j_r, k_r]^T &= [\theta_y]_2 [i_1, j_1, k_1]^T \\ &= [\theta_y]_2 [\theta_x]_1 [i, j, k]^T \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$[i_1, j_1, k_1]^T = [\theta_x]_1 [i, j, k]^T \quad (2.2)$$

となる。

2.2 角速度間の関係

シャフトの角速度 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ に影響する要素は、 $\dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z, N$ であるから、これらの関係は図2より

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi}_x \cos Nt + \dot{\phi}_y \sin Nt \\ \omega_y &= -\dot{\phi}_x \sin Nt + \dot{\phi}_y \cos Nt \\ \omega_z &= \dot{\phi}_z + N' = N \cong N' \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

となる。ロータの角速度 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ に関する要

素は, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ の他に $\dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y$ があるので, これらの関係は図 2 と (2.1) 式より

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_r} \\ \omega_{y_r} \\ \omega_{z_r} \end{bmatrix} = [\theta_y]_2 [\theta_x]_1 \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + [\theta_y]_2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} (\omega_x + \dot{\theta}_x) \cos \theta_y + \omega_y \sin \theta_x \sin \theta_y \\ \quad - \omega_z \cos \theta_x \sin \theta_y \\ \dot{\theta}_y + \omega_y \cos \theta_x + \omega_z \sin \theta_x \\ (\omega_x + \dot{\theta}_x) \sin \theta_y - \omega_y \sin \theta_x \cos \theta_y \\ \quad + \omega_z \cos \theta_x \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

となる。ジンバルの角速度 $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ に関する要素として $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y$ が考えられるが, これらのうち $\dot{\theta}_y$ はジンバルの運動に関係しない。図 1 をみればわかるように, ロータが x_1 軸まわりに角変位するときにはジンバルと一体になって同じ運動をするが, ロータが y_1 軸まわりに回転してもジンバルは影響を受けない。したがって, ジンバルの運動に関しては $\dot{\theta}_y$ を考慮する必要はない⁷⁾ ので, $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ は

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} = [\theta_x]_1 \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x + \dot{\theta}_x \\ \omega_y \cos \theta_x + \omega_z \sin \theta_x \\ -\omega_y \sin \theta_x + \omega_z \cos \theta_x \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

となる。

2.3 運動方程式の誘導

ジンバル, ロータの角速度 ω_1, ω_0 , 角運動量 H_1, H_0 をそれぞれに固定した座標系でのベクトル成分の和として表わせれば, ジンバルについては

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{x_1} i_1 + \omega_{y_1} j_1 + \omega_{z_1} k_1 \\ H_1 &= A_1 \omega_{x_1} i_1 + B_1 \omega_{y_1} j_1 + C_1 \omega_{z_1} k_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

となり, ロータについては

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \omega_{x_r} i_r + \omega_{y_r} j_r + \omega_{z_r} k_r \\ H_0 &= A \omega_{x_r} i_r + B \omega_{y_r} j_r + C \omega_{z_r} k_r \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

となる。上式に角運動量保存則を適用してジンバル, ロータの運動方程式を求める。ロータが y_1 軸まわりに角速度 $\dot{\theta}_y$ で回転するときには, ジンバルの回転変

位が存在しないので, ロータがジンバルに与えるトルク T_{y_1} (ジンバルはロータに $-T_{y_1}$ を与える; 作用反作用の法則) はヒンジの捩れ, ダンピングによるトルクと釣合うが, ロータが x_1 軸まわりに角速度 $\dot{\theta}_x$ で回転するときには, ジンバルはロータと一体になって回転するので, ロータがジンバルに与えるトルク T_{x_1} (ジンバルは $-T_{x_1}$ をロータに与える, 作用反作用の法則) とシャフトがジンバルに与えるトルク T_{x_s} との差によってジンバルの角運動量の時間的変化が生じる (角運動量保存則)。この T_{x_s} はヒンジの x_1 軸まわりの捩れ, ダンピングによるものである。以上のことより T_{x_1}, T_{y_1} は次のような形で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} T_{x_1} - T_{x_s} &= [(\dot{H}_1)_I]_{x_1} \\ T_{x_s} &= K_{x_1} \theta_x + D_{x_1} \dot{\theta}_x \\ T_{y_1} &= K_{y_1} \theta_y + D_{y_1} \dot{\theta}_y \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

ここで $[(\dot{H}_1)_I]_{x_1}$ は H_1 の始間的変化の x_1 軸方向成分である。 $(\dot{H}_1)_I$ は慣性座標での微分を意味するので, これをジンバル座標系で表わせれば

$$(\dot{H}_1)_I = (\dot{H}_1)_g + \omega_1 \times H_1 \quad (2.9)$$

となる。接尾辞 g はジンバル座標での微分を表わす (以下同様)。(2.6), (2.8), (2.9) より T_{x_1}, T_{y_1} は

$$\left. \begin{aligned} T_{x_1} &= K_{x_1} \theta_x + D_{x_1} \dot{\theta}_x + A_1 \dot{\omega}_{x_1} + (C_1 - B_1) \omega_{y_1} \omega_{z_1} \\ T_{y_1} &= K_{y_1} \theta_y + D_{y_1} \dot{\theta}_y \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

となる。また, ロータが外部から受けるトルク $T_{R_{x_r}}, T_{R_{y_r}}$ は, トルカー等によって人為的に与えられるトルク $M_{R_{x_r}}, M_{R_{y_r}}$ (誤差トルクを含む), ロータ, ケース間のドラッグトルク T_D ($T_D < 0$, $-z$ 軸方向) ロータ, ケース間のダンピングトルク $-D_R \dot{\theta}_x, -D_R \dot{\theta}_y$ (x_1, y_1 軸方向), ジンバルから受けるトルク $-T_{x_1}, -T_{y_1}$ であり⁸⁾, ロータ固定座標系成分 ((2.1) 式を適用) でそれらのトルクの総和を求めれば

$$\left. \begin{aligned} T_{R_{x_r}} &= M_{R_{x_r}} - T_D \cos \theta_x \sin \theta_y - D_R \dot{\theta}_x \cos \theta_y - T_{x_1} \cos \theta_y \\ T_{R_{y_r}} &= M_{R_{y_r}} + T_D \sin \theta_x - D_R \dot{\theta}_y - T_{y_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

となる。この T_{Rx_r} , T_{Ry_r} によるロータの角運動量変化を求めれば

$$\left. \begin{aligned} T_{Rx_r} &= \{(\dot{\mathbf{H}}_0)_l\}_{x_r} = \{(\dot{\mathbf{H}}_0)_r + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{H}_0\}_{x_r} \\ T_{Ry_r} &= \{(\dot{\mathbf{H}}_0)_l\}_{y_r} = \{(\dot{\mathbf{H}}_0)_r + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{H}_0\}_{y_r} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

となる。ここで $(\dot{\mathbf{H}}_0)_r$ はロータ固定座標系での微分を意味する。(2.7), (2.12) 式より T_{Rx_r} , T_{Ry_r} は

$$\left. \begin{aligned} T_{Rx_r} &= A \dot{\omega}_{x_r} + (C-B) \omega_{y_r} \omega_{z_r} \\ T_{Ry_r} &= B \dot{\omega}_{y_r} - (C-A) \omega_{z_r} \omega_{x_r} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

となる。(2.10), (2.11), (2.13) 式をまとめると

$$\left. \begin{aligned} A \dot{\omega}_{x_r} + (C-B) \omega_{y_r} \omega_{z_r} \\ = M_{Rx_r} - T_D \cos \theta_x \sin \theta_y - D_R \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ - \{K_{x_1} \theta_x + D_{x_1} \dot{\theta}_x + A_1 \dot{\omega}_{x_1} \\ + (C_1 - B_1) \omega_{y_1} \omega_{z_1}\} \cos \theta_y \\ B \dot{\omega}_{y_r} - (C-A) \omega_{z_r} \omega_{x_r} \\ = M_{Ry_r} + T_D \sin \theta_x - D_R \dot{\theta}_y - (K_{y_1} \theta_y + D_{y_1} \dot{\theta}_y) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

となる。(2.10) 式の右辺第 3, 4 項, (2.14) 式の左辺の角速度, 角加速度を $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \theta_x, \theta_y$ 及びそれらの 1, 2 次微分で表わせば ((2.4), (2.5) 式を用いる), 上式は

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_{x_1} + (C_1 - B_1) \omega_{y_1} \omega_{z_1} \\ = A_1 (\ddot{\theta}_x + \dot{\omega}_x) \\ + (C_1 - B_1) (\omega_y \cos \theta_x + \omega_z \sin \theta_x) \\ \times (-\omega_y \sin \theta_x + \omega_z \cos \theta_x) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} A \dot{\omega}_{x_r} + (C-B) \omega_{y_r} \omega_{z_r} \\ = (A \cos \theta_y) \ddot{\theta}_x + \{(C-B-A) \dot{\theta}_y + (C-B+A) \\ \times (\omega_y \cos \theta_x + \omega_z \sin \theta_x)\} \dot{\theta}_x \sin \theta_y \\ + (C-B+A) (\omega_x \sin \theta_y - \omega_y \sin \theta_x \cos \theta_y \\ + \omega_z \cos \theta_x \cos \theta_y) \dot{\theta}_y \\ + A (\dot{\omega}_x \cos \theta_y + \dot{\omega}_y \sin \theta_x \sin \theta_y \\ - \dot{\omega}_z \cos \theta_x \sin \theta_y) \\ + (C-B) (\omega_y \cos \theta_x + \omega_z \sin \theta_x) \\ \times (\omega_x \sin \theta_y - \omega_y \sin \theta_x \cos \theta_y + \omega_z \cos \theta_x \cos \theta_y) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} B \dot{\omega}_{y_r} - (C-A) \omega_{z_r} \omega_{x_r} \\ = B \ddot{\theta}_y + B (-\omega_y \sin \theta_x + \omega_z \cos \theta_x) \dot{\theta}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - (C-A) \dot{\theta}_x^2 \cos \theta_y \sin \theta_y \\ - (C-A) (\omega_x \sin 2\theta_y - \omega_y \sin \theta_x \cos 2\theta_y \\ + \omega_z \cos \theta_x \cos 2\theta_y) \dot{\theta}_x \\ + B (\dot{\omega}_y \cos \theta_x + \dot{\omega}_z \sin \theta_x) \\ - (C-A) (\omega_x \cos \theta_y + \omega_y \sin \theta_x \sin \theta_y \\ - \omega_z \cos \theta_x \sin \theta_y) \\ \times (\omega_x \sin \theta_y - \omega_y \sin \theta_x \cos \theta_y + \omega_z \cos \theta_x \cos \theta_y) \end{aligned} \quad (2.17)$$

のようになる²⁰⁾。(2.15)~(2.17) 式を(2.14)式に適用すると次のような運動方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \{(A+A_1) \cos \theta_y\} \ddot{\theta}_x + F_1(\theta, \dot{\theta}, \boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}) &= M_{Rx_r} \\ B \ddot{\theta}_y + F_2(\theta, \dot{\theta}, \boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}) &= M_{Ry_r} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

ここで $\theta, \dot{\theta}, \boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ は

$$\left. \begin{aligned} \theta &= (\theta_x, \theta_y, \theta_z) \\ \dot{\theta} &= (\dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_z) \\ \boldsymbol{\omega} &= (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= (\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

のように x, y, z 成分が含まれることを意味する。また, F_1, F_2 は

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(\theta, \dot{\theta}, \boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}) \\ &= \{[(C-B-A) \dot{\theta}_y + (C-B+A) (\omega_y \cos \theta_x \\ &\quad + \omega_z \sin \theta_x)] \sin \theta_y + (D_R + D_{x_1}) \cos \theta_y\} \dot{\theta}_x \\ &\quad + (C-B-A) \{\omega_x \sin \theta_y + (-\omega_y \sin \theta_x \\ &\quad + \omega_z \cos \theta_x) \cos \theta_y\} \dot{\theta}_y \\ &\quad + K_{x_1} \theta_x \cos \theta_y + T_D \cos \theta_x \sin \theta_y \\ &\quad + \{(A+A_1) \cos \theta_y\} \dot{\omega}_x \\ &\quad + A (\dot{\omega}_y \sin \theta_x - \dot{\omega}_z \cos \theta_x) \sin \theta_y \\ &\quad + (C-B) (\omega_y \cos \theta_x + \omega_z \sin \theta_x) \omega_x \sin \theta_y \\ &\quad + (C-B+C_1-B_1) (\omega_y \cos \theta_x + \omega_z \sin \theta_x) \\ &\quad \times (-\omega_y \sin \theta_x + \omega_z \cos \theta_x) \cos \theta_y \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= F_2(\theta, \dot{\theta}, \boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}) \\ &= -(C-A) \dot{\theta}_x^2 \cos \theta_y \sin \theta_y \\ &\quad + \{-(C-A) \omega_x \sin 2\theta_y + \{B - (C-A) \cos 2\theta_y\} \\ &\quad \times (-\omega_y \sin \theta_x + \omega_z \cos \theta_x) + D_R + D_{x_1}\} \dot{\theta}_x \\ &\quad + K_{y_1} \theta_y - T_D \sin \theta_x \\ &\quad + B (\dot{\omega}_y \cos \theta_x + \dot{\omega}_z \sin \theta_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(C-A)\{\omega_x \cos \theta_y \\
& \quad + (\omega_y \sin \theta_x - \omega_z \cos \theta_x) \sin \theta_y\} \\
& \times \{\omega_x \sin \theta_y - (\omega_y \sin \theta_x - \omega_z \cos \theta_x) \cos \theta_y\} \\
& \qquad \qquad \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

である。(2.18)~(2.21)式より $\ddot{\theta}_x$, $\ddot{\theta}_y$ は

$$\left. \begin{aligned}
\ddot{\theta}_x &= f_1(\theta, \dot{\theta}, \omega, \dot{\omega}) = \frac{MR_{x_r} - F_1}{(A+A_1) \cos \theta_y} \\
\ddot{\theta}_y &= f_2(\theta, \dot{\theta}, \omega, \dot{\omega}) = \frac{MR_{y_r} - F_2}{B}
\end{aligned} \right\} (2.22)$$

のように θ , $\dot{\theta}$, ω , $\dot{\omega}$ の関数 (非線形微分方程式) として表わせるが, この式の数値解は既存のソフトウェアパッケージ²¹⁾によって求めることができる。 ω の各成分は $\dot{\phi}_x$, $\dot{\phi}_y$, N よりなるので, 上式を解けば入力 ($\dot{\phi}_x$, $\dot{\phi}_y$) に対する出力 θ_x , θ_y を求めることができるが, 入出力を対応づけるためには, 出力を入力と同一座標系成分で表わす必要がある。ジンバル固定座標系成分 θ_x , θ_y をケース固定座標系成分 θ_x , θ_y に交換するには

$$\left. \begin{aligned}
\theta_x &= \tan^{-1}(\cos Nt \tan \theta_x) \\
& \quad - \tan^{-1}(\sin Nt \cos \theta_x \tan \theta_y) \\
\theta_y &= \tan^{-1}(\sin Nt \tan \theta_x) \\
& \quad + \tan^{-1}(\cos Nt \cos \theta_x \tan \theta_y)
\end{aligned} \right\} (2.23)$$

なる変換式 (付録を参照) を用いればよい。上式において θ_x , θ_y が微小なときには

$$\left. \begin{aligned}
\theta_x &= \theta_x \cos Nt - \theta_y \sin Nt \\
\theta_y &= \theta_x \sin Nt + \theta_y \cos Nt
\end{aligned} \right\} (2.24)$$

となる ($\theta_{xy} = \theta_{xy} e^{jNt}$)。 (2.4), (2.5) 式において

$$\left. \begin{aligned}
\sin \theta_i &\cong \theta_i, \quad \cos \theta_i \cong 1, \quad \theta_i \theta_j \cong 0 \\
\theta_i &\ll N, \quad \dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y \ll N, \quad i, j = x, y
\end{aligned} \right\} (2.25)$$

を仮定して ω_{x_r} , ω_{y_r} , ω_{x_1} , ω_{y_1} , ω_{x_1} を求め, これらを (2.6), (2.7) 式に代入し, (2.22) 式を導いたのと同様の手順で運動方程式を導き, この式に

$$\left. \begin{aligned}
D_{x_1} &= D_{y_1} = D \\
\theta_{xy} &= \theta_{xy} e^{jNt}
\end{aligned} \right\} (2.26)$$

なる仮定を適用すれば, 単一ジンバル系としての TDG の Craig 解^{7), 19)} が得られる*。

3. 運動方程式の評価

Craig 解は θ にある制約条件 ((2.25) 式) を考慮したときの ETG の近似式であるので, ここでは ETG の運動方程式を基準にして Craig 解がどの程度の精度で成立するかを, 入力角の大きさ, 周波数に即して評価する。ケースは, XY 平面上で Z 軸まわりに X 軸より β だけ角変位した軸 I_ϕ (図 2 参照) まわりに回転運動 (振動) するものと仮定する。ケースが振幅 ϕ_0 , 周波数 f で振動するときの $\phi_{(XY)}$ は

$$\phi_{XY} = \phi_0 e^{j\beta} \sin(2\pi f t + \varphi) \quad (3.1)$$

と表わすことができる。上式の ϕ_x , ϕ_y に対応して変化する θ_x , θ_y の I_ϕ 軸まわりの合成値 θ_t は

$$\theta_t = \theta_x \cos \beta + \theta_y \sin \beta \quad (3.2)$$

のようにおける。(2.22), (2.23) 式を解いて得られる θ_x , θ_y を上式に代入したときの θ_t を θ_{t0} , Craig 解から得られる θ_x , θ_y を上式に代入したときの θ_t を θ_{tc} とし, θ_{t0} を基準値 (厳密解) として Craig 解の成立条件を評価する。上記両者の解の差違は

$$E_{crg} = \theta_{tc} - \theta_{t0} \quad (3.3)$$

となるので, 一定時間々隔 T における E_{crg} の 2 乗和の平均値の平方根 (近似的に標準偏差)

$$E_{crms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E_{crg}^2 dt} \quad (3.4)$$

でもって Craig 解の精度を評価すればよいが, 上式の E_{crms} は ϕ_0 によって異なるので, E_{crms} を入力の実効値で除した値を用いて Craig 解の相対的な精度評価を行なう。すなわち,

$$E_s = \frac{\sqrt{2}}{\phi_0} E_{crms} \times 100 \quad [\%] \quad (3.5)$$

を評価関数として Craig 解の成立条件をシミュレーションによって定量的に評価する。

* 文献 19), page 15 における (A1-1), (A1-2) 式を参照。

表 1 シミュレーションに用いる TDG の諸定数

慣性モーメント	ヒンジの捩れ剛性
$A = B = 5.71933 \times 10^{-5} \text{ (N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2 \text{)}$	$K_{x_1} = 7.94867 \times 10^{-2} \text{ (N} \cdot \text{m/rad)}$
$C = 10.60356 \times 10^{-5} \text{ (N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2 \text{)}$	$K_{y_1} = 7.94867 \times 10^{-2} \text{ (N} \cdot \text{m/rad)}$
$A_1 = B_1 = 3.898967 \times 10^{-7} \text{ (N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2 \text{)}$	ジンバル個数
$C_1 = 5.906 \times 10^{-7} \text{ (N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2 \text{)}$	$n = 1$
機械的なダンピング要素	ドラッグトルク
$D_{x_1} = D_{y_1} = D_R = 0 \text{ (N} \cdot \text{m} \cdot \text{s)}$	$T_D = 0 \text{ (N} \cdot \text{m/rad)}$

シミュレーションに用いる ETG の諸定数は、国産の TDG の試作結果¹⁰⁾ に準じて表 1 のように定め、シャフトの角速度 (= ロータの角速度) N はチューニング角周波数^{6), 7)} を仮定する。またシミュレーションにおける積分区間 T は 2 sec とし、 E_{crg} の値は 1 msec 毎のサンプリングデータを用いる。入力 ϕ_{xy} が正弦波であっても、 E_{crg} が正弦波であるとは限らないが、今ここで、 E_{crg} が正弦波であると仮定し、(3.4) 式の E_{crms} を求める際のデータ E_{crg} の取得間隔 (1 msec) を評価する。入力周波数 f は 0.5 ~ 50 Hz を対象としているので 1 周期に含まれるサンプリングデータ E_{crg} の個数は、 $f = 50 \text{ Hz}$ のときに最も少なく、20 個である。 E'_{crg} を

$$E'_{crg} = \sin 2\pi ft, \quad f = 50 \text{ Hz} \quad (3.6)$$

とすれば、この E'_{crg} の 1 msec 毎 ($2\pi ft$ は 18° 毎) の値の 2 乗和の平均値の平方根、すなわち、(3.4) 式の E_{crms} は 0.7071152 (正弦波のため、 $T = 2 \text{ sec}$ までサンプリングしても同じ) であるが、上式の E'_{crg} を (3.4) 式の E_{crg} として直接積分して求めた E_{crms} (実効値) は $\sqrt{2}/2 = 0.7071067$ であり、両者の差は非常に小さく、 E_{crms} の精度は 10^{-4} 程度保証されていると云える。これは正弦波を対象にした評価例であるが、 E_{crg} は種々の周波数成分を有する正弦波の和と考えられるので、そのような評価は十分妥当なものであると云える。また、 $T = 2 \text{ sec}$ としたのは、入力の 1 周期以上に対応した出力データを用いること ($f = 0.5 \text{ Hz}$ のときの 1 周期 = 2 sec)、 E_{crg} の出力形態 (正弦波か否か) に関係なく同一のデータ個数 (= 2000 個) で ETG のダイナミクスを

定量評価 (評価関数は E_s) することを考慮したためである。

上述の各仮定のもとで求めた E_s の値を図 3 ~ 図 8 に示す。図 3 ~ 5 は、 f を 5, 20 Hz に固定したときの ϕ_0 と E_s の関係を、図 6 ~ 8 は、 ϕ_0 を $5^\circ, 20^\circ$ に固定したときの f と E_s の関係をそれぞれ示す。図 3, 4, 5 において、 E_s と ϕ_0 とはその対数がほぼ比例関係にあるが、同一の f , ϕ_0 に対する E_s の値

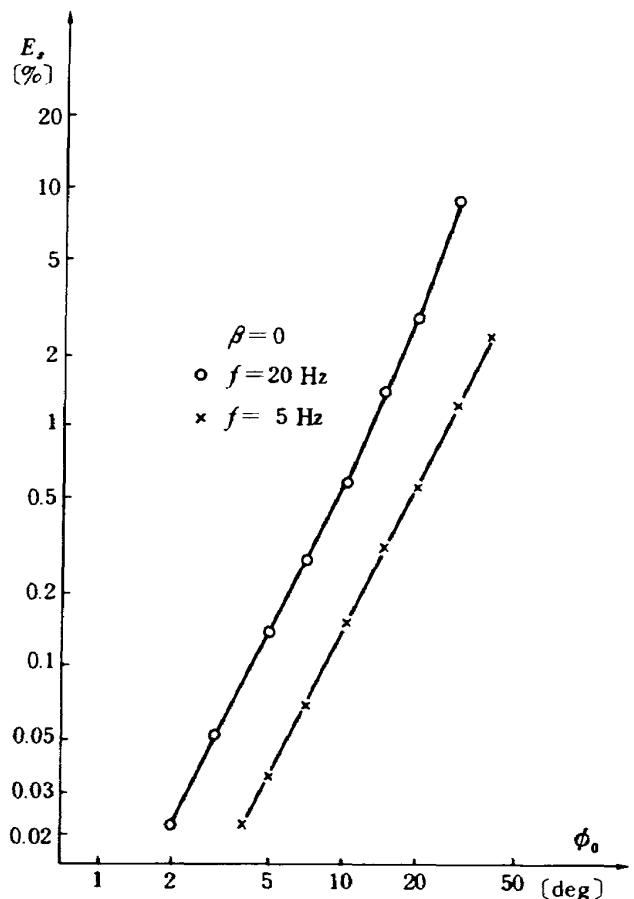


図 3 Craig 解の精度評価その 1 (f ; 固定, $\beta = 0$)

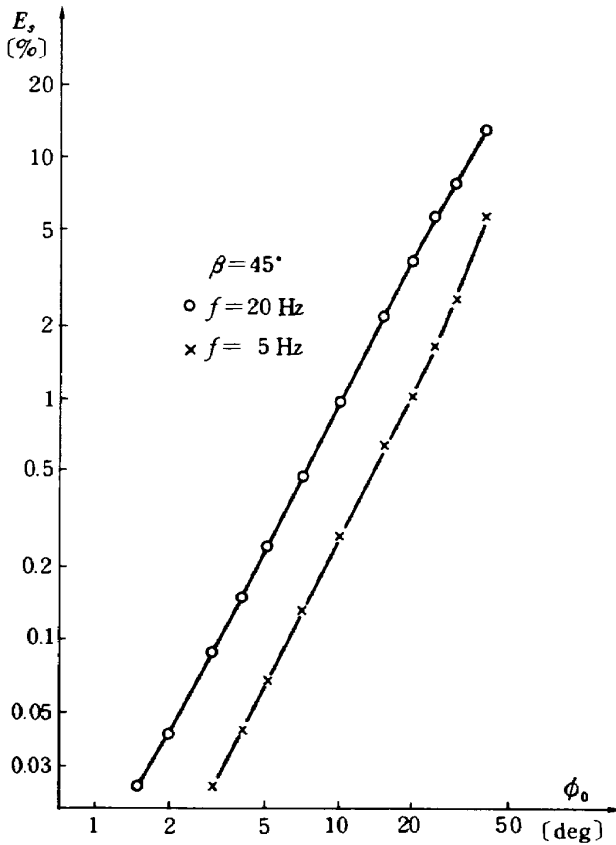


図4 Craig 解の精度評価その 2
(f ; 固定, $\beta = 45^\circ$)

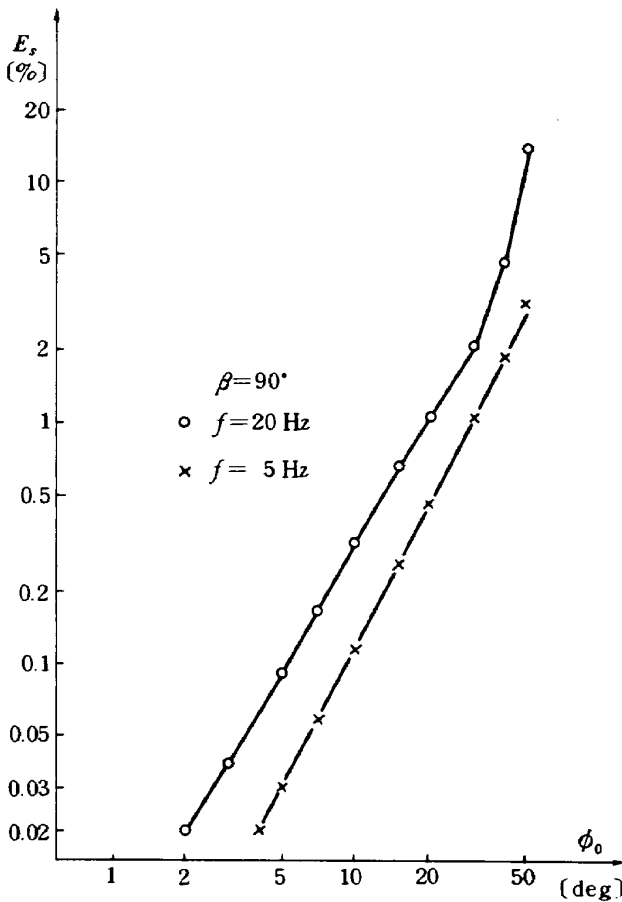


図5 Craig 解の精度評価その 3
(f ; 固定, $\beta = 90^\circ$)

は、 $\beta = 45^\circ$ のときがもっとも大きく、 $\beta = 90^\circ$ のときがもっとも小さくなっている。また、各ケースともに、 f 、 ϕ_0 が大きくなるにつれて比例関係の精度が低下する傾向を示している。図 6、7、8 では、それぞれ、 $\phi_0 = 20^\circ$ において f が 5 Hz 以上になると E_s が急激に大きくなる傾向を示している。また、 $\phi_0 = 20^\circ$ 、 $f \leq 5$ Hz では、 $\beta = 0^\circ$ 、 90° のときの E_s の値はほぼ同じで、 $\beta = 45^\circ$ のときの値よりかなり小さくなること、 $\phi_0 = 20^\circ$ 、 $f \geq 10$ Hz では、 $\beta = 0^\circ$ 、 45° のときの E_s の値がほぼ同じで、 $\beta = 90^\circ$ のときの値よりもかなり大きくなることわかる。 $\phi_0 = 5^\circ$

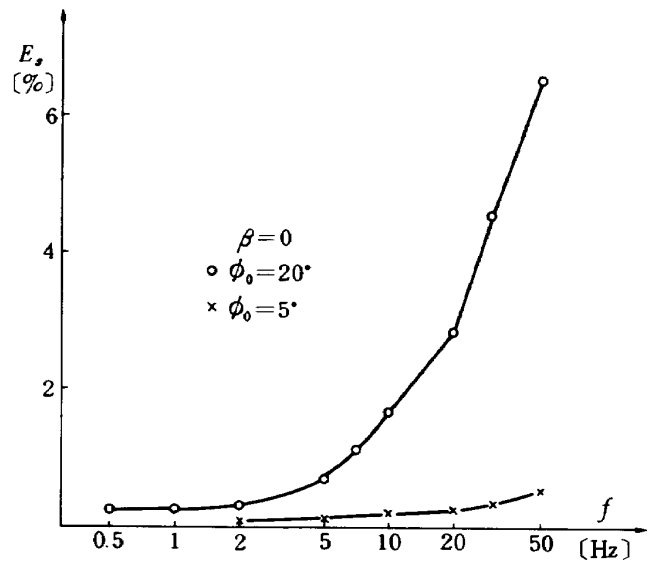


図6 Craig 解の精度評価その 4
(ϕ_0 ; 固定, $\beta = 0^\circ$)

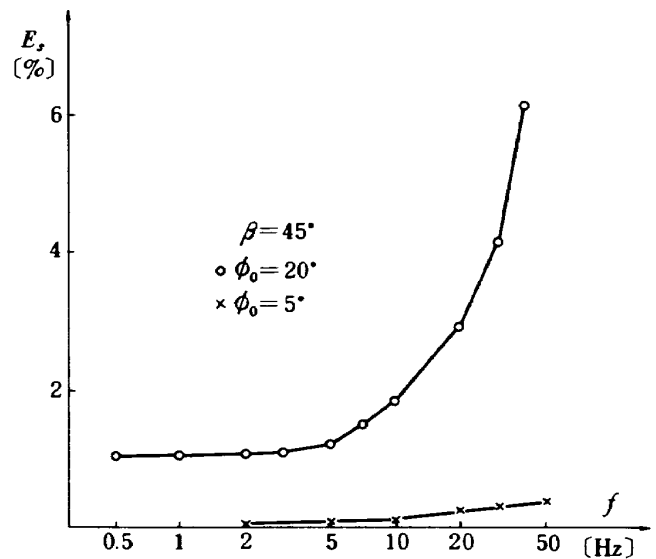


図7 Craig 解の精度評価その 5
(ϕ_0 ; 固定, $\beta = 45^\circ$)

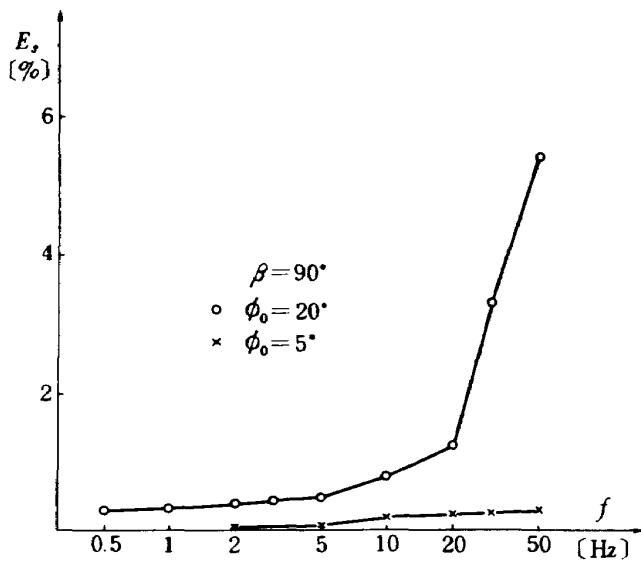


図8 Craig解の精度評価その6
(ϕ_0 ; 固定, $\beta=90^\circ$)

のときの E_s と f との関係は, β に関係なく同様な傾向 ($f=0.5\sim 20$ Hz) を示している。各図を全般的にみて, f , ϕ_0 が大きくなる程 E_s が大きくなり, かつ β による E_s の違いも大きくなること, E_s が1%以下になる領域は, $f=5$ Hz で $\phi_0 \leq 20^\circ$, $f=20$ Hz で $\phi_0 \leq 10^\circ$ であること等が云える。初期位相 ϕ は零としたが, ϕ を変えても, E_s の値は変らなかった。なお, 本シミュレーションには, 航技研計算センター設置のソフトウェアパッケージ²¹⁾を用いた。

4. あとがき

本研究では, 図1のようなTDGのモデル(ETG)において $\theta_{(xy)} \ll 1$ なる仮定を取除いたときのロータの挙動を解析し, その運動方程式を導くとともに, Craigの一般式⁶⁾がどの程度の精度で成立し得るかをシミュレーションによって評価した。これによって, ジャイロダイナミックスの側面から $\theta_{(xy)}$ の大小に拘束されないETGの運動を論ずる一手順を明らかにすることができた。製作済のTDGはストッパーによって $\theta_{(xy)}$ が ± 0.3 度以内に抑えられているために θ と $\sin \theta$ との差が小さく (10^{-5} 程度), この状態で実験データを取得し, これをシミュレーション結果と比較することはかなり困難であるが, 将来は $\theta_{(xy)}$ の拘束条件を取除いたTDG(すなわち, ETG)を試作し, 解析結果の妥当性を実験的に明らかにし

ていくことも必要となる。また, ヒンジの剛性 K_{x_1} , K_{y_1} は一定として解析を進めたが, より厳密な運動方程式の評価のためには, それらの値が $\theta_{(xy)}$ によって変わることを考慮に入れねばならない。その場合, K_{x_1} , K_{y_1} は θ_x , θ_y の関数としてモデル化すればよいので, 本解析の手順はそのまま適用できる。さらに, ETGのモデルは単一ジンバル系を仮定したが, 今後の課題として多ジンバル系をモデルとした解析が残されている。最後に本研究を進めるにあたり, 国内TDGの研究開発関係者各位¹⁰⁾との日頃の討論が有益だったことを付記する。

参考文献

- 1) Wrigley, W., Hollister, W.M., and Denhard, W.G.; Gyroscopic Theory, Design, and Instrumentation, pp99-117 MIT Press, Oct. 1968
- 2) Miller, J.E. and Feldman, J.; Gyro Reliability in the Apollo Guidance, Navigation, and Control System, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol.5, No.6, pp638-643, June 1968
- 3) Gilmore, J.P. and Feldman, J.; The Gyroscope in Torque-to-Balance Strap-down Application, AIAA Paper No.69-848, Aug. 1969
- 4) 大月正男, 新宮博公, 他3名; ストラップダウン方式用広角度積分ジャイロの研究, 航技研報告, TR-349, 1975年11月
- 5) Howe, E.W. and Savet, P.H.; The Dynamically Tuned Free Rotor Gyro, Control Engineering, Vol.2, No.6, pp67-72, June 1964
- 6) Craig, R.J.G.; Theory of Operation of an Elastically Supported Tuned Gyroscope, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-8, pp280-288, May 1972
- 7) 新宮博公, 大月正男, 早野友康; チューンドドライジャイロの近似伝達関数の有用性について, 航技研報告, TR-720, 1982年7月

8) Bahrami, K.; Inertial Attitude Control of Voyager Spacecraft using Dry Tuned Rotor Gyro, NASA Contract NAS-100, 1977

9) Ritter, J.W. and Irvine, R. B.; DRIRU - II Standard High Accuracy Inertial Reference Unit for Spacecraft through the 1980'S, Prepared for the 34th Annual Meeting of the Institute of Navigation, June 1978

10) Ikeuchi, M., Tahara, Y., Suzuki, H. et al.; Research and Development of Tuned Dry Gyro. Proceedings of the 14th International Symposium on Space Technology and Science, June 1984

11) Barnaby, R.E., Chatterton, J.B. and Gerring, F.H.; Gyrotron Angular Rate Tachometer, Aeronautical Engineering Review, Nov. 1953

12) Newton, G.C.; Vibratory Rate Gyros, Control Engineering, Vol.1, No.6, pp95-99, June 1963

13) Ayres, R.O.; Solid State Rate Sensor Technology and Applications, Society of Automotive Engineers Technical Paper-830727, April 1983

14) Wing, W.G.; Fluid Rotor Gyros, Control Engineering Vol.1, No.3, March 1963

15) Scott, W.B.; Delco Makes Low-Cost Gyro Prototype, Aviation Week and Space Technology, pp64-71, Oct. 1982

16) 金井 昭, 他3名; 姿勢センサ — レーザ, 流体, 振動, TDG, FRIG —, 日本航空宇宙学会誌, 第30巻, 第336号, pp15-25, 1982年1月

17) Ryan, T. J.; A Novel Approach for the Design of a Dry-Tuned Accelerometer/ Gyro Instrument, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.7, No.1, pp20-28, Jan.—Feb. 1984

18) 新宮博公; 大月正男; チューンドドライジャイロの非干渉制御の一方式, 航技研報告, TR-

857, 1985年5月

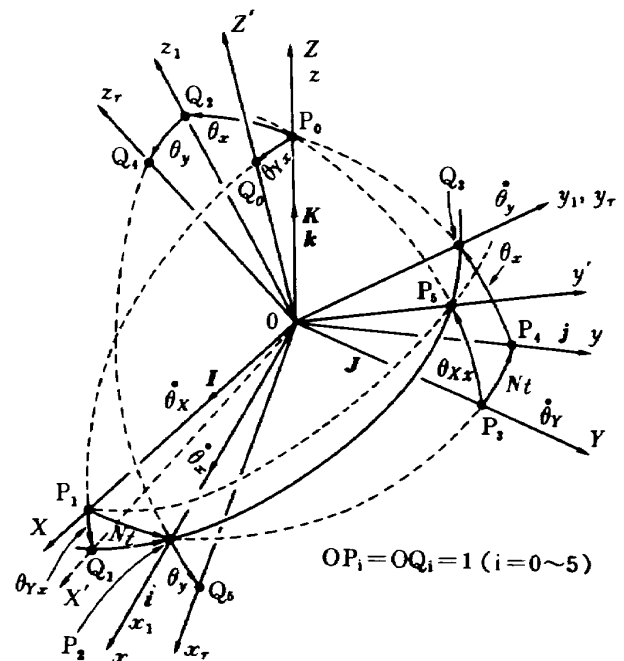
19) 新宮博公; 大月正男, 園田景一; チューンドドライジャイロのパラメータ変化の影響度に関する一考察, 航技研資料, TM-522, 1983年10月

20) 新宮博公; 弾性支持2自由度ジャイロの運動方程式に関する一考察, 計測自動制御学会論文集, 第22巻第10号, 1986年10月

21) 村田正秋; 常微分方程式のためのソフトウェアパッケージ, 航技研資料, TM-353, 1978年6月

付録 θ_x, θ_y を θ_{Xx}, θ_{Yy} に変換する式の誘導

本文図2から明らかなように, ロータの x_1, y_1 軸まわりの角変位 θ_x, θ_y は, $z (=Z)$ 軸まわりに角速度 N で回転する座標軸 $x_1 (=x), y_1 (=y_r)$ まわりの角変位であるので, この角変位と入力角 ϕ_x, ϕ_y とを比較するためには, θ_x, θ_y を X, Y 軸まわりの角変位 θ_{Xx}, θ_{Yy} に変換する必要がある。以下にその手順を明らかにする。 θ_x による θ_x, θ_y の変化分を θ_{Xx}, θ_{Yy} とし, この変化の概念を付図1に示す。最初 $t = 0$ の時点で面 $XOY (=面 xOy)$ と一致していたロータの面 (スピン軸に垂直な面を云う) は, $x_1 (=x)$ 軸まわりに θ_x だけ角変位して面 x_1Oy_1 に一致する。この角変位 θ_x による Y 軸の移動位置 (変位軸) を y' とすれば, ロータの X 軸まわりの角変位 ($=\theta_{Xx}$) は



付図1 θ_x と θ_{Xx}, θ_{Yy} の関係

$\angle y'OY$ となるが、直線 Oy' は X 軸に直交する面 YOZ 上になければならないので、 Oy' は面 YOZ と面 x_1Oy_1 との交線になる。いま、 O を中心とする単位球面と各直線 $OZ, OX, Ox_1, OY, Oy, Oy'$ との交点をそれぞれ $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ とする。 $\angle x_1Oy = 90^\circ$ により面 P_2OP_3 と面 P_2OP_5 となす角は θ_x であるから、球面三角形 $P_2P_3P_5$ において

$$\tan \theta_x = \frac{\tan \angle P_3OP_5}{\sin \angle P_2OP_3} = \frac{\tan \theta_{xx}}{\cos Nt} \quad (A1-1)$$

となる。これより θ_{xx} は

$$\theta_{xx} = \tan^{-1}(\cos Nt \tan \theta_x) \quad (A1-2)$$

となる。ここで $Nt = 90^\circ$ のときには P_2, P_3 が一致する(付図2)ので $\theta_{xx} = 0$ となる。よって(A1-2)式は Nt に関係なく一般に成立する。 θ_{yx} は Y 軸まわりの角変位なので面 XOZ 上になければならない。この面上に直線 OX', OZ' を $\angle XOZ' = \angle ZOZ' = \theta_{yx}$ なるようにとり、 O を中心とする単位球面と各直線 $OZ', OX', OZ_1, Oy_1, OZ_r, Ox_r$ との交点を $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ とする。面 P_1OP_2 と面 Q_1OP_2 となす角は θ_x (面 P_2OP_3 と P_2OP_5 のなす角)であるから、球面三角形 $P_1P_2Q_1$ において

$$\tan \theta_x = \frac{\tan \angle P_1OQ_1}{\sin \angle P_1OP_2} = \frac{\tan \theta_{yx}}{\sin Nt} \quad (A1-3)$$

となり、 θ_{yx} は

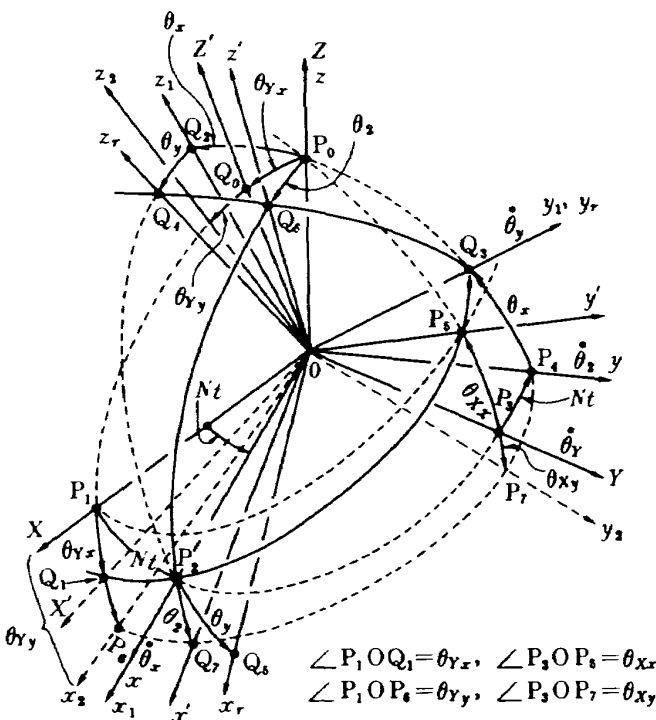
$$\theta_{yx} = \tan^{-1}(\sin Nt \tan \theta_x) \quad (A1-4)$$

となる。 $Nt = 0$ のときには、 x_1 と X 軸とは一致するので $\theta_{yx} = 0$ となる。このとき、(A1-4)式は Nt に関係なく成立する。これで θ_x の影響成分 θ_{xx}, θ_{yx} が求まったが、つぎに θ_y の影響成分 θ_{xy}, θ_{yy} を求める。 θ_y は $Ox (= Ox_1), Oy, Oz$ まわりの角変位成分 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ に分解できるが、 $\angle xOy_1 = 90^\circ$ により $\theta_1 = 0$ となる。また、 $\angle zOX = \angle zOY = 90^\circ$ により、 θ_2, θ_3 のうち X, Y 軸まわりの角変位に関係する成分は θ_2 のみである。よって、 θ_{xy}, θ_{yy} を求めるには θ_2 のみを考慮すればよい。 θ_2 によるロータの変位を示すために付図1を付図2のようにし、必要な要素を付加する。 θ_2 による Oz, Ox の移動位置を Oz', Ox' とすれば $\angle zOz' = \angle xOx' = \theta_2$ となる。 O を中心とする単位円と Oz', Ox' との交点を Q_6, Q_7 とする。 $\theta_y = 0$ の時点で面 y_1Oz_1 と一致していたロータの面(スピン軸に平行な面を云う)は、角変位 θ_y により面 y_1Oz_r に移動するので、 Oz' はこの移動面上になければならない。このとき面 $P_0OQ_3 (= 面 Q_2OQ_3)$ と面 $Q_6OQ_3 (= 面 Q_4OQ_3)$ となす角は θ_y であるから、球面三角形 $P_0Q_3Q_6$ において

$$\tan \theta_y = \frac{\tan \angle P_0OQ_6}{\sin \angle P_0OQ_3} = \frac{\tan \theta_2}{\cos \theta_x} \quad (A1-5)$$

となる。 θ_{yy}, θ_{xy} はそれぞれ面 $X'OZ$, 面 YOZ 上を移動するので、それらの角変位による OX, OY の移動軸をそれぞれ Ox_2, Oy_2 とし、これらの軸と O を中心とする単位円との交点を P_6, P_7 とする。 θ_2 による面 $P_2OP_4 (= 面 P_1OP_4)$ の移動位置は面 Q_7OP_4 に一致する。そして、 Ox_2, Oy_2 もこの面上にあるので、 OP_6, OP_7, OQ_7 は同一平面上にある。面 P_3OP_4 と面 P_7OP_4 となす角、面 P_1OP_4 と面 P_6OP_4 となす角はともに θ_2 であるので、球面三角形 $P_3P_4P_7, P_1P_4P_6$ において

$$\tan \theta_2 = \frac{\tan(-\angle P_3OP_7)}{\sin \angle P_3OP_4} = -\frac{\tan \theta_{xy}}{\sin Nt} \quad (A1-6)$$



付図2 θ_y と θ_{xy}, θ_{yy} の関係

$$\tan \theta_2 = \frac{\tan \angle P_1 O P_6}{\sin \angle P_1 O P_4} = \frac{\tan \theta_{Yy}}{\cos Nt} \quad (\text{A1-7})$$

となる。(A1-6)式の負付号は、 $\angle yOX = 90^\circ + Nt \geq 90^\circ$ により、 y 軸まわりの角変位 θ_2 の X 軸方向成分 θ_{xy} は θ_2 と極性が逆になり、 θ_2 が正、負のときは θ_{xy} が負、正になることを意味する。(A1-5)~(A1-7)式より、 θ_{xy} 、 θ_{yy} はそれぞれ

$$\theta_{xy} = -\tan^{-1}(\cos \theta_x \cdot \sin Nt \cdot \tan \theta_y) \quad (\text{A1-8})$$

$$\theta_{yy} = \tan^{-1}(\cos \theta_x \cdot \cos Nt \cdot \tan \theta_y) \quad (\text{A1-9})$$

となる。以上は、 $\theta_x \neq 90^\circ$ 、 $Nt \neq 0$ 、 $Nt = 90^\circ$ を仮定して導かれているが、ここでそれらの仮定を取除いた場合について考察する。 $\theta_x = 90^\circ$ のときは、 y_1 軸が Z 軸に一致するので $\theta_{xy} = \theta_{yy} = 0$ となる。 $Nt = 0$ のときには、 Ox_1 と OX 、 Oy と OY がそれぞれ一致するので OX 軸は Oy_1 軸に直交し、 $\theta_{xy} = 0$ 、 $\theta_{yy} = \theta_2$ となる。さらに $Nt = 90^\circ$ のときには、 Ox_1 と OY が一致し、かつ $\angle XOy = 180^\circ$ となるので、 $\theta_{xy} = -\theta_2$ 、 $\theta_{yy} = 0$ となる。したがって、(A1-8)、(A1-9)式は、 θ_x 、 Nt の値に関係なく一般的に成

立する変換式である。(A1-2)、(A1-8)式より θ_x 、 θ_y による θ_x の変化量は

$$\begin{aligned} \theta_x &= \theta_{xx} + \theta_{xy} \\ &= \tan^{-1}(\cos Nt \cdot \tan \theta_x) \\ &\quad - \tan^{-1}(\cos \theta_x \cdot \sin Nt \cdot \tan \theta_y) \end{aligned} \quad (\text{A1-10})$$

となる。また、(A1-4)、(A1-9)式より、 θ_x 、 θ_y による θ_y の変化量は

$$\begin{aligned} \theta_y &= \theta_{yx} + \theta_{yy} \\ &= \tan^{-1}(\sin Nt \cdot \tan \theta_x) \\ &\quad + \tan^{-1}(\cos \theta_x \cdot \cos Nt \cdot \tan \theta_y) \end{aligned} \quad (\text{A1-11})$$

となる。上式の手順は、 θ_x 、 θ_y による OP_3 の変位角 θ_{xx} 、 θ_{xy} を別個に求め、また、 θ_x 、 θ_y による OP_1 の変位角 θ_{yx} 、 θ_{yy} を別個に求め、それぞれにおいて和 $\theta_x (= \theta_{xx} + \theta_{xy})$ 、 $\theta_y (= \theta_{yx} + \theta_{yy})$ を算出しているが、 θ_{xx} と θ_{xy} は共に X 軸まわりに、 θ_{yx} と θ_{yy} は共に Y 軸まわりに変位するので、そのような和の算出は成立する。

航空宇宙技術研究所資料568号

昭和62年4月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7-44-1
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊦182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山5-6-17
