

航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-600

角加速度フィードバックによる航空機の短周期制御

——一次遅れサーボの補償——

柳原正明・永安正彦・佐々修一

1989年2月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

1章 まえがき	1
2章 航空機短周期運動の数式モデル	1
2.1 短周期運動	1
2.2 サーボ系モデル	2
2.3 孤立突風モデル	2
2.4 連続突風モデル	3
3章 角速度フィードバック	4
3.1 角速度フィードバック系	4
3.2 根軌跡及びボード線図	5
3.3 突風応答	7
4章 角加速度フィードバック	9
4.1 角加速度フィードバック系	9
4.2 根軌跡及びボード線図	10
4.3 突風応答	11
5章 まとめ	14

角加速度フィードバックによる航空機の短周期制御*

——一次遅れサーボの補償——

柳原正明** 永安正彦** 佐々修一**

1章 まえがき

航空機の飛行安定性を確保するために縦の短周期制御として角速度フィードバックによるSAS(Stability Augmentation System: 安定増大装置)が用いられている。SASを用いることによって突風外乱などによる航空機の縦の姿勢の動揺を自動操縦によって安定させることができ、パイロットの負担を大幅に軽減できる。これは外乱などによる機体の縦短周期運動のダンピング係数を増大させるものとして機能している。

他方、航空機の昇降舵の駆動系はサーボ系を介して駆動されているが、サーボ系の特性を一次遅れ系で近似した場合、その時定数が大きくなると上記SASの角速度フィードバックのゲインを大きくしていくにつれて系のダンピングが劣化していく場合が

ある。本資料では、このような場合に角加速度計で縦揺れ角加速度を計測し、図1のように角速度フィードバックに加えて角加速度フィードバックを行うことにより、閉ループ系の特性劣化の回復を図ることについて検討する。

2章 航空機短周期運動の数式モデル

本章では航空機短周期運動の状態方程式を示す。昇降舵一次遅れサーボを含む場合、及び孤立突風あるいは連続突風モデルを含む場合の拡張状態方程式についても述べる。

2.1 短周期運動

上下突風を受ける航空機の短周期運動は座標系として安定軸系を採用すると次の線形化方程式で表すことができる¹⁾。

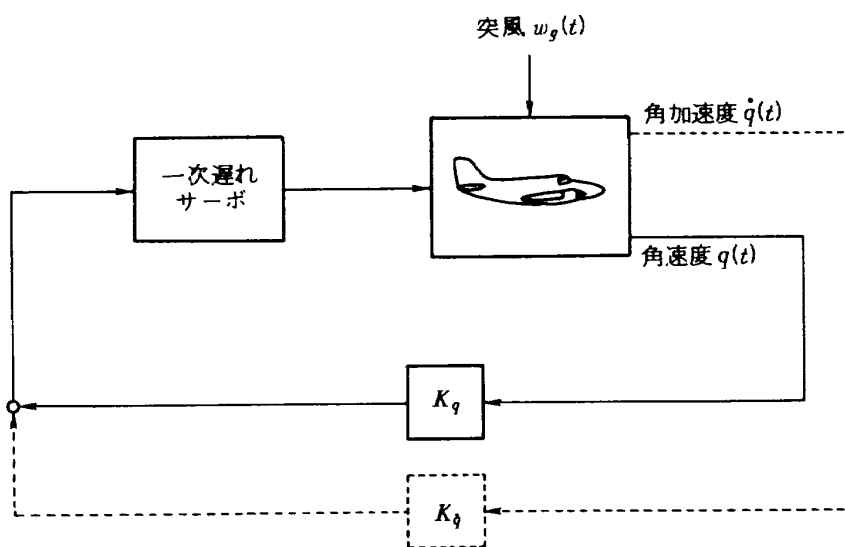


図1 制御系概念図

*昭和63年9月28日 受付

**制御部

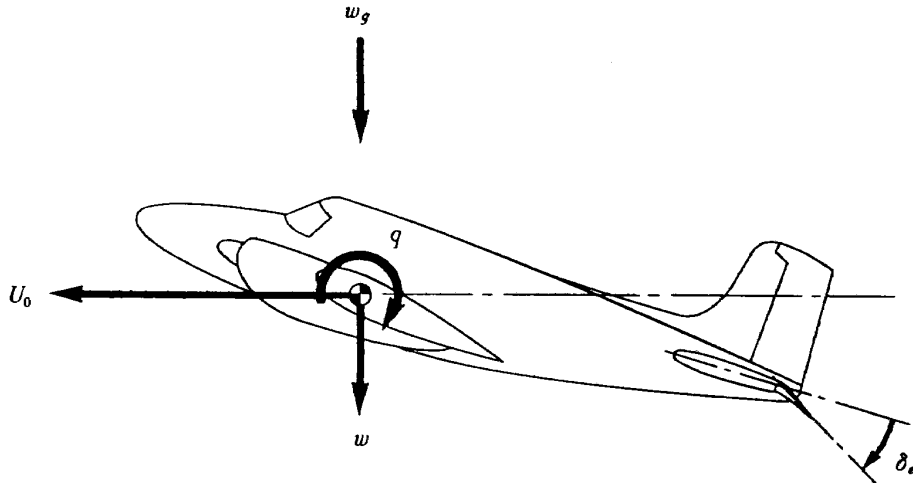


図2 変数概念図

$$\dot{w}(t) - Z_w w(t) - U_0 q(t) = Z_{\delta_e} \delta_e(t) - Z_w w_g(t) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} -M_w \dot{w}(t) - M_w w(t) + \dot{q}(t) - M_q q(t) \\ = M_{\delta_e} \delta_e(t) - (M_w - M_q/U_0) \dot{w}_g(t) - M_w w_g(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで、 $w(t)$ 、 $q(t)$ 、 $\delta_e(t)$ 、 $w_g(t)$ はそれぞれ航空機の上下速度、縦揺れ角速度、昇降舵角及び上下方向の突風速度であり、 U_0 は釣合い飛行時の対気速度である。これらの変数の概念図を図2に示す。また Z_w 、 M_w 等は空力微係数である。後に孤立突風による時間応答、及び連続突風による状態の共分散行列を計算する必要が生じるので、運動方程式をベクトル状態方程式（以下単に「状態方程式」という）による表示にすると次の形となる。

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \quad (2.3)$$

ここで、

$$x_1(t) = [w(t), q(t)]^T$$

$$u_1(t) = [\delta_e(t), w_g(t), \dot{w}_g(t)]^T$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} Z_w & U_0 \\ M_w' & M_q' \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} & -Z_w & 0 \\ M_{\delta_e}' & -M_w' & -M_w'' \end{bmatrix}$$

$$M_w' = M_w + Z_w M_w''$$

$$M_q' = M_q + U_0 M_w''$$

$$M_w'' = M_w' - M_q/U_0$$

$$M_{\delta_e}' = M_{\delta_e} + Z_{\delta_e} M_w''$$

である この状態方程式は昇降舵のサーボ系の遅れを無視できる場合（以下「サーボ遅れなし」という）

の運動を表している。

2.2 サーボ系モデル

昇降舵角 δ_e がサーボ系を介して駆動されているものとし、そのサーボ系が次の一次遅れ系で近似できるものとする。

$$T_a \dot{\delta}_e(t) = -\delta_e(t) + u(t) \quad (2.4)$$

ここで $u(t)$ はサーボ系への入力、 T_a は一次遅れサーボ系の時定数である。(2.3)、(2.4)式を整理するとサーボ系を含めた短周期運動の方程式は、昇降舵角を状態変数に加えて次の状態方程式に書き表すことができる。

$$\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \quad (2.5)$$

ここで、

$$x_2(t) = [w(t), q(t), \delta_e(t)]^T$$

$$u_2(t) = [u(t), w_g(t), \dot{w}_g(t)]^T$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_1 & \begin{matrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e}' \end{matrix} \\ \hline 0 & -1/T_a \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -Z_w & 0 \\ 0 & -M_w' & -M_w'' \\ 1/T_a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である。

2.3 孤立突風モデル

孤立突風モデルとして次の形のモデルを採用する。²⁾

$$\begin{aligned}
 w_g &= 0 & (x < 0) \\
 w_g &= \frac{V_m}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{d_m} \right) & (0 \leq x \leq d_m) \\
 w_g &= V_m & (d_m < x)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

である。

ここで x は突風に遭遇してからの飛行距離, V_m は孤立突風の強さ, d_m は孤立突風の長さである。いま, t を突風に遭遇してからの時間として $x = U_0 t$ と近似し, さらに $v(t) \triangleq \dot{w}_g(t)$ と定義して $w_g(t)$ を状態変数, $v(t)$ を入力とみなすとサーボ遅れなしの場合の状態方程式(2.3)式は次の様になる。

$$\dot{x}_3(t) = A_3 x_3(t) + B_3 u_3(t) \tag{2.7}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 x_3(t) &= [w(t), q(t), w_g(t)]^T \\
 u_3(t) &= [\delta_e(t), v(t)]^T
 \end{aligned}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_1 & -Z_w \\ & -M_w' \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} & 0 \\ M_{\delta_e}' & -M_w' \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき, (2.6)式の孤立突風モデルの $v(t)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \frac{\pi U_0 V_m}{2 d_m} \sin \frac{\pi U_0}{d_m} t \quad (0 \leq t \leq d_m/U_0) \\
 v(t) &= 0 \quad (t < 0, d_m/U_0 < t)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

同様にサーボ遅れを含めた場合の拡張状態方程式は次式となる。

$$\dot{x}_4(t) = A_4 x_4(t) + B_4 u_4(t) \tag{2.9}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 x_4(t) &= [w(t), q(t), \delta_e(t), w_g(t)]^T \\
 u_4(t) &= [u(t), v(t)]^T
 \end{aligned}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} A_2 & -Z_w \\ & -M_w' \\ & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M_w' \\ 1/T_a & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 連続突風モデル

連続突風 $w_g(t)$ は, 平均値 0 で標準偏差が σ_{wg} の定常正規確率過程で, そのパワースペクトルが次のDryden型関数で表せるものとする²⁾。

$$\Phi_{w_g}(\Omega) = \sigma_{wg}^2 \frac{L}{\pi} \frac{1+3(L\Omega)^2}{\{1+(L\Omega)^2\}^2} \tag{2.10}$$

ただし, L はスケール長さであり, 突風の空間的相関を表す尺度である。上式で表されるような確率過程は次の様に定常白色過程を入力とする成形フィルタの出力として得ることができる³⁾。

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t) \tag{2.11}$$

$$\dot{z}_2(t) = -(U_0/L)^2 z_1(t) - 2(U_0/L) z_2(t) + n(t) \tag{2.12}$$

$$w_g(t) = (U_0/L)^2 z_1(t) + \sqrt{3} (U_0/L) z_2(t) \tag{2.13}$$

ここで z_1, z_2 は成形フィルタの内部状態量, $n(t)$ は強さ $\sigma_{wg}^2 L/(\pi U_0)$ の定常正規白色過程である。

(2.11), (2.12) 式をベクトル表記すると

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + gn(t) \tag{2.14}$$

となる。ここで

$$z(t) = [z_1, z_2]^T$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(U_0/L)^2 & -2(U_0/L) \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。以上からサーボ遅れなしの場合の連続突風を受ける航空機の短周期運動は連続突風の成形フィルタの内部状態量を状態変数に加えて次の拡張状態方程式で記述できる。

$$\dot{x}_5(t) = A_5 x_5(t) + B_5 u_5(t) \tag{2.15}$$

ここで,

$$x_5(t) = [w(t), q(t), z_1(t), z_2(t)]^T$$

$$u_5(t) = [\delta_e(t), n(t)]^T$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} A_1 & a_{13} & a_{14} \\ & a_{23} & a_{24} \\ \hline 0 & & F \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} & 0 \\ M_{\delta_e}' & -\sqrt{3} (U_0/L) M_w' \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{13} = (U_0/L)^2 Z_w$$

$$a_{14} = -\sqrt{3} (U_0/L) Z_w$$

$$a_{23} = (U_0/L)^2 (\sqrt{3} (U_0/L) M_w' - M_w')$$

$$a_{24} = (U_0/L) \{ (2\sqrt{3}-1)(U_0/L) M_w' - \sqrt{3} M_w' \}$$

である。

同様に一次遅れサーボを含んだ場合の連続突風を受ける航空機の短周期運動は次の拡張状態方程式表示で記述される。

$$\dot{x}_6(t) = A_6 x_6(t) + B_6 u_6(t) \quad (2.16)$$

ここで、

$$x_6(t) = [w(t), q(t), \delta_e(t), z_1(t), z_2(t)]^T$$

$$u_6(t) = [u(t), n(t)]^T$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} & a_{13} & a_{14} \\ A_2 & a_{23} & a_{24} \\ & 0 & 0 \\ 0 & & F \end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} (U_0/L) M_w' \\ 1/T_a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

3章 角速度フィードバック

3.1 角速度フィードバック系

q フィードバックによる SAS に対して一次遅れサーボがループ内にある場合の位相遅れの影響を検討する。昇降舵角 δ_e から縦揺れ角速度 q への伝達関数は、(2.1), (2.2) 式をラプラス変換した後に w を消去して整理すると次のようになる。

$$\Delta(s) q(s) = N_{\delta_e}^q(s) \delta_e(s) - N_{wq}^q(s) w_g(s) \quad (3.1)$$

ここで s はラプラス演算子であり、 $\Delta(s)$ は特性多項式、 $N_{\delta_e}^q(s)$ 、 $N_{wq}^q(s)$ は δ_e 及び w_g から q への伝達関数の分子である。これらはそれぞれ次式で与えられる。

$$\Delta(s) = s^2 - (Z_w + M_q') s + (Z_w M_q' - U_0 M_w')$$

$$N_{\delta_e}^q(s) = M_{\delta_e}' s + (Z_{\delta_e} M_w' - Z_w M_{\delta_e}')$$

$$N_{wq}^q(s) = -\{ M_w' s + (M_w' - Z_w M_w') \} s$$

一次遅れサーボ系の入出力関係は(2.4)式をラプラス変換して次式のようなになる。

$$\delta_e(s) = u(s) / (T_a s + 1) \quad (3.2)$$

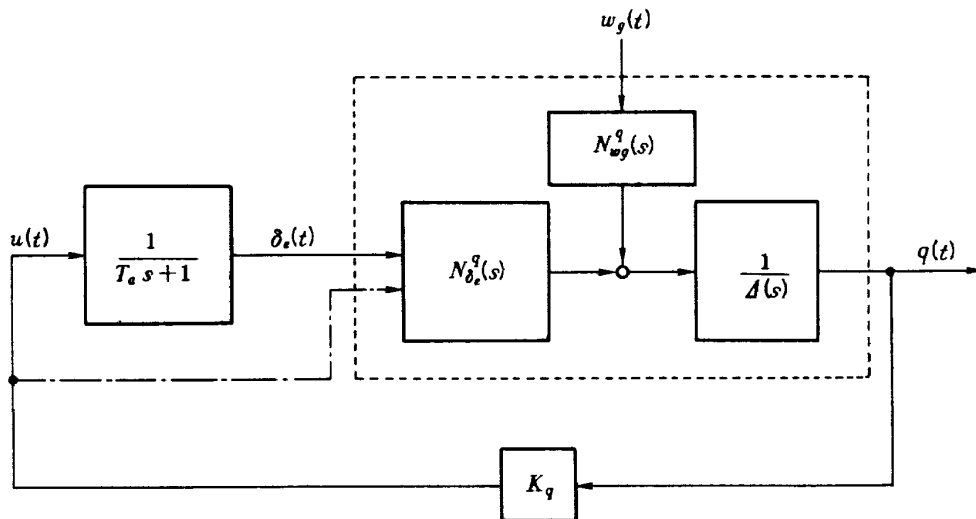
サーボ遅れなしのとき、制御則は直接昇降舵角 δ_e が q の定数倍として

$$\delta_e(s) = K_q q(s) \quad (3.3)$$

のように表され、一次遅れサーボを含む場合はサーボ入力 u が q によって

$$u(s) = K_q q(s) \quad (3.4)$$

と表される。ここで K_q はフィードバックゲインでスカラー量である。以上をブロック線図で表すと図3の様になる。なお点線で囲まれた部分は航空機の運



----- サーボ遅れなしの場合

図3 角速度フィードバック制御系

動を表している。

3.2 根軌跡およびボード線図

サーボ遅れなしの場合には昇降舵角 δ_e から縦揺れ角速度 q への伝達関数は(3.1)式より

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_{\delta_e}^q(s)}{A(s)} \quad (3.5)$$

となる。

特性方程式 $A(s)=0$ の解は伝達関数の極 p_B で、

$$p_B = \frac{1}{2} \{ Z_w + M_q' \pm \sqrt{(Z_w + M_q')^2 - 4(Z_w M_q' - U_0 M_w')} \} \quad (3.6)$$

で与えられる。

$N_{\delta_e}^q(s)=0$ の解は伝達関数の零点 z_B で、

$$z_B = -M_w' \frac{Z_{\delta_e}}{M_{\delta_e}'} + Z_w \quad (3.7)$$

で与えられる。

また一次遅れサーボを含む場合のサーボ入力 u から縦揺れ角速度 q への伝達関数は

$$\frac{q(s)}{u(s)} = \frac{q(s)}{\delta_e(s)} \frac{\delta_e(s)}{u(s)} = \frac{N_{\delta_e}^q(s)}{A(s)} \frac{1}{T_a s + 1} \quad (3.8)$$

となるから伝達関数の極にサーボの極 $-1/T_a$ が追加されることになる。本資料で数値例として取り扱った小型航空機の飛行条件及び空力微係数の値を表1に示す。これらの値に基づいて計算した短周期の極は $p_B = -1.12 \pm 2.60j$ 、固有振動数は $\omega_B = 2.83$ 、ダンピング係数 $\zeta_B = 0.394$ である。また $N_{\delta_e}^q(s)=0$ の

表1 パラメータ数値例

U_0	= 40.0	$m \cdot s^{-1}$
d_m	= 55.0	m
V_m	= 3.7	$m \cdot s^{-1}$
L	= 50.0	m
σ_{wg}	= 2.0	$m \cdot s^{-1}$
Z_w	= -1.1	s^{-1}
Z_{δ_e}	= -4.2	$m \cdot s^{-2}$
M_w	= -0.18	$m^{-1} \cdot s^{-1}$
$M_{\dot{w}}$	= -0.01	$m^{-1} \cdot s^{-1}$
M_q	= -0.73	s^{-1}
M_{δ_e}	= -4.6	s^{-2}

根(零点)は $z_B = -0.946$ である。

サーボ遅れを含む場合と含まない場合に角速度フィードバックゲイン K_q の値を0から増していったときの根軌跡を図4に示す。電気サーボ系では作動域によって等価的時定数が変化する⁴⁾ことを考慮してサーボ系時定数 T_a が0.1, 0.2, 0.5の場合について示してある。根軌跡は開ループ伝達関数の極から始まり、極と零点が同数のときは軌跡の全てが零点で終わり、極の数が零点の数より多いときは極と零点の数の差だけ無限遠方にまで伸びる。その漸近線の方法の例を表2に示す。

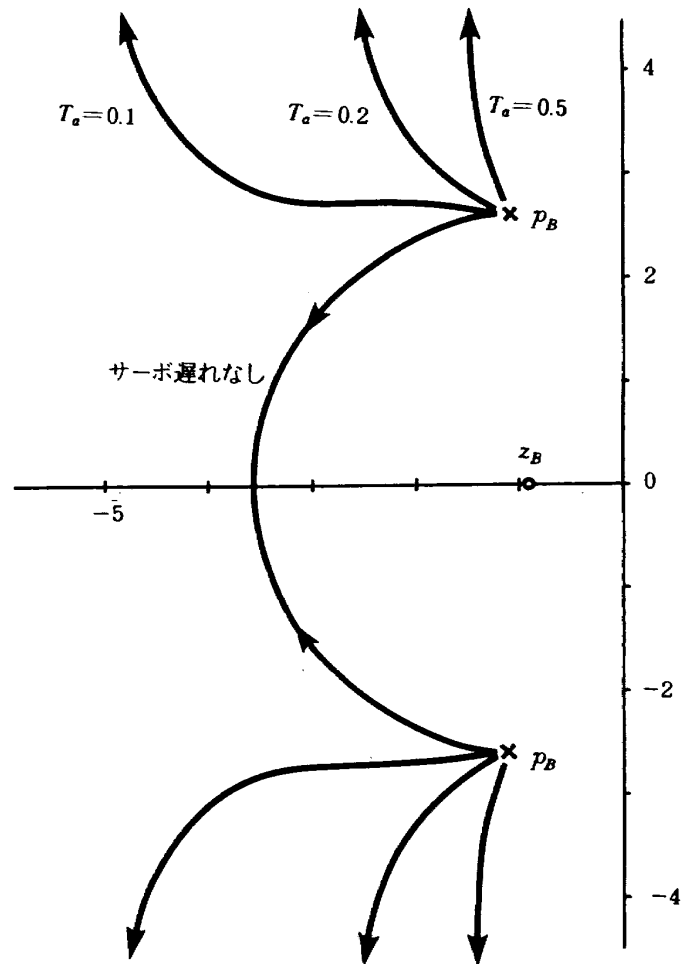


図4 角速度フィードバック・根軌跡

表2 差と方向の関係

差	漸近線の方法(°)
1	180
2	± 90
3	± 60 と 180
4	± 45 と ± 135

サーボ遅れなしの場合は、角速度のフィードバックゲイン K_q の値を大きくしていくと、根軌跡は実軸上に落ち零点 z_B と $-\infty$ に向かうが、一次遅れサーボを含めると、実軸上にサーボの極が 1 つ増加するため、発散する。たとえば $T_a = 0.2$ の場合には一次遅れサーボによる極 ($P_A = -5.0$) から出発した根軌跡は零点 z_B で終わるが、短周期の極 p_B から出発した根軌跡は実軸に対して 90° の方向の無限速に発散する。このため、短周期の極はゲインがある値より大きくなるとダンピングが劣化していき、 T_a が 0.1 の場合にはフィードバックゲインを増してもダンピング係数は 0.8 を越えない。

次にボード線図について検討する。サーボ遅れなしの場合の開ループ伝達関数は

$$-K_q \frac{N_{\delta_e}^q(s)}{\Delta(s)} \quad (3.9)$$

であるから、 $K_q = 1$ とすると、このボード線図は

$$20 \log \left| -\frac{N_{\delta_e}^q(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right| = 20 \log \left| -N_{\delta_e}^q(j\omega) \right| + 20 \log \frac{1}{\Delta(j\omega)} \quad (3.10)$$

$$\angle -\frac{N_{\delta_e}^q(j\omega)}{\Delta(j\omega)} = \angle -N_{\delta_e}^q(j\omega) + \angle \frac{1}{\Delta(j\omega)} \quad (3.11)$$

となって $-N_{\delta_e}^q(s)$ と $1/\Delta(s)$ のボード線図をたし合わせたものになる。以下、変化の性質を把握するために漸近線の検討を行なう。 $-N_{\delta_e}^q(s)$ のゲイン漸近線は

$$\text{定常ゲイン: } -N_{\delta_e}^q(0) = -Z_{\delta_e} M_w' + Z_w M_{\delta_e}'$$

$$\text{折点周波数: } \frac{Z_{\delta_e} M_w' - Z_w M_{\delta_e}'}{M_{\delta_e}'}$$

$$\text{勾配: } 20 \text{ dB/dec}$$

$1/\Delta(s)$ のゲイン漸近線は

$$\text{定常ゲイン: } \frac{1}{\Delta(0)} = \frac{1}{Z_w M_q' - U_0 M_w'}$$

$$\text{折点周波数: } \omega_{sp} = \sqrt{\Delta(0)}$$

$$\text{勾配: } -40 \text{ dB/dec}$$

となる。つぎに位相曲線は $-N_{\delta_e}^q(s)$ については

$$\omega \rightarrow 0 \text{ の時 } \phi \rightarrow 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ の時 } \phi \rightarrow 90^\circ$$

$1/\Delta(s)$ については

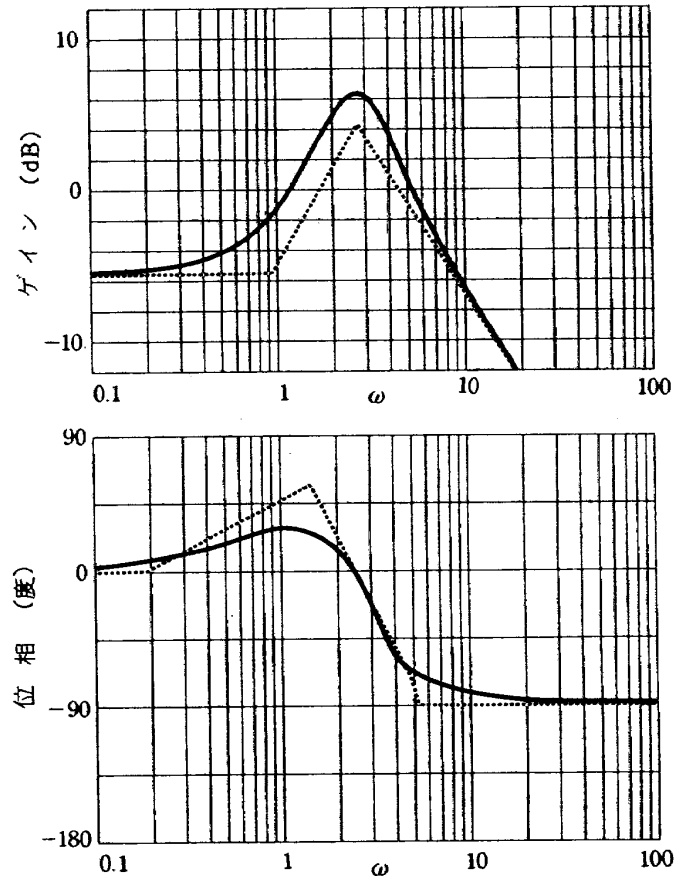


図5 角速度フィードバック・ボード線図 (サーボ遅れなし)

$$\omega \rightarrow 0 \text{ の時 } \phi \rightarrow 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ の時 } \phi \rightarrow -180^\circ$$

となる。図5に(3.9)のボード線図およびその漸近線を実線と破線により示す。位相曲線の漸近線は折点周波数での勾配を用いたものである。

一方、一次遅れサーボを含めた場合には開ループ伝達関数は

$$-K_q \frac{N_{\delta_e}^q(s)}{\Delta(s)} \frac{1}{T_a s + 1} \quad (3.12)$$

となり、 $K_q = 1$ の時のボード線図は $-N_{\delta_e}^q(s)/\Delta(s)$ と $1/(T_a s + 1)$ のボード線図をたし合わせたものになる。 $1/(T_a s + 1)$ のゲイン漸近線は

$$\text{定常ゲイン: } 1$$

$$\text{折点周波数: } \omega = \frac{1}{T_a}$$

$$\text{勾配: } -20 \text{ dB/dec}$$

であり、位相は

$$\omega \rightarrow 0 \text{ の時 } \phi \rightarrow 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ の時 } \phi \rightarrow -90^\circ$$

である。図6に(3.12)のボード線図およびその漸近

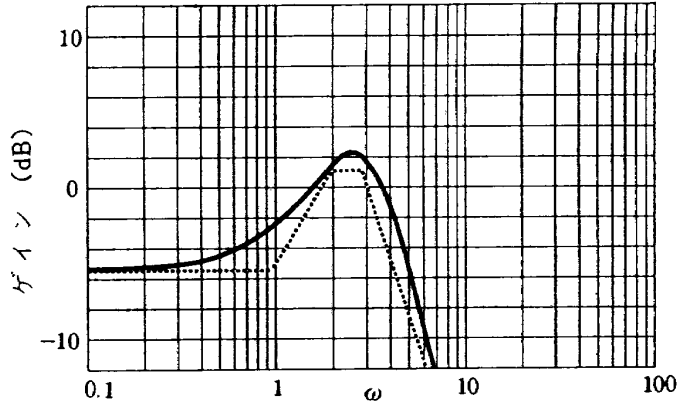
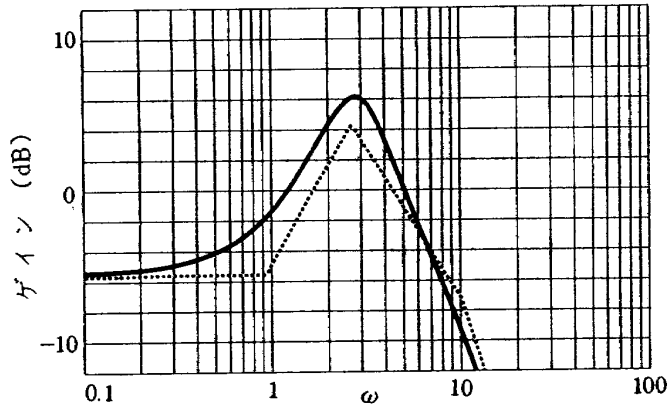


図 6(a) 角速度フィードバック・ボード線図 ($T_a=0.1$)

図 6(c) 角速度フィードバック・ボード線図 ($T_a=0.5$)

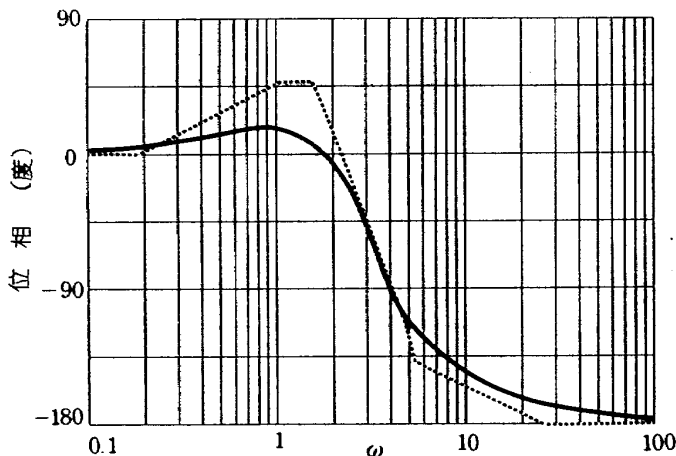
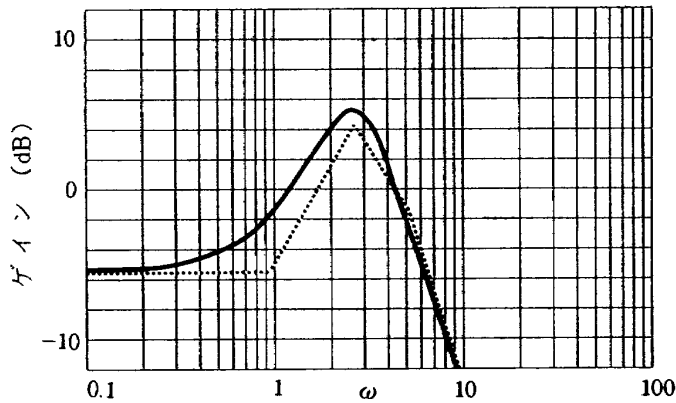


図 6(b) 角速度フィードバック・ボード線図 ($T_a=0.2$)

線を実線と破線により示す。(a), (b), (c)図はそれぞれ $T_a=0.1, 0.2, 0.5$ に対応する。

位相余裕はサーボ遅れなしの場合は 109° であったが、一次遅れサーボを入れると $T_a=0.1, 0.2, 0.5$ の時各々 $85^\circ, 76^\circ, 82^\circ$ となり、大きく減少している。フィードバックゲイン K_q の値を増していくとこの位相余裕の減少はさらに顕著となる。

3.3 突風応答

ここでは q フィードバック制御を行ったときのサーボ遅れのない場合とある場合について突風応答を比較するため、閉ループ系状態方程式を導き、孤立突風および連続突風に対する応答を計算する。

まず孤立突風応答を比較する。サーボ遅れのないときの制御変数 $\delta_e(t)$ は(2.7)式に対応させると

$$\delta_e(t) = K_q q(t) = K_q H_3 x_3(t) \quad (3.13)$$

と表現できる。ここで $H_3 = [0, 1, 0]$ である。(3.13)式を(2.7)式に代入すると、閉ループ系の状態方程式として

$$\dot{x}_3(t) = (A_3 + K_q b_{31} H_3) x_3(t) + b_{32} v(t) \quad (3.14)$$

が得られる。ただし、 b_{31} 、 b_{32} は各々 B_3 の1列目、2列目である。

次に、一次遅れサーボ系を含むときのサーボへの入力 $u(t)$ は、(2.9)式に対応させると

$$u(t) = K_q q(t) = K_q H_4 x_4(t) \quad (3.15)$$

と表される。ここで $H_4 = [0, 1, 0, 0]$ である。(3.15)式を(2.9)式に代入すると、閉ループ系の状態方程式として

$$\dot{x}_4(t) = (A_4 + K_q b_{41} H_4) x_4(t) + b_{42} v(t) \quad (3.16)$$

が得られる。ただし、 b_{41} 、 b_{42} は各々 B_4 の1列目、2列目である。

(3.14)式および(3.16)式で表される閉ループ系に対して、(2.8)式の V_m 、 d_m を表1の値とした孤立突風が加わった場合の昇降舵角 $\delta_e(t)$ および縦揺れ角速度 $q(t)$ の時間応答を図7(a)、(b)に示す。(a)図はサーボ遅れなしの場合で $K_q = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ の場合の比較を示す。(b)図は K_q を0.6に固定し、サーボ遅れなしの場合、サーボ時定数 $T_a = 0.2$ および0.5の場合についての比較を示してある。 $q(t)$ の過渡応答の最大値は $T_a = 0.2, 0.5$ の場合についてそれぞれサーボ遅れなしの場合の1.08倍、1.24倍になっている。またサーボ時定数が大きくなるに従ってダンピングが小さくなって応答が振動的になっている。

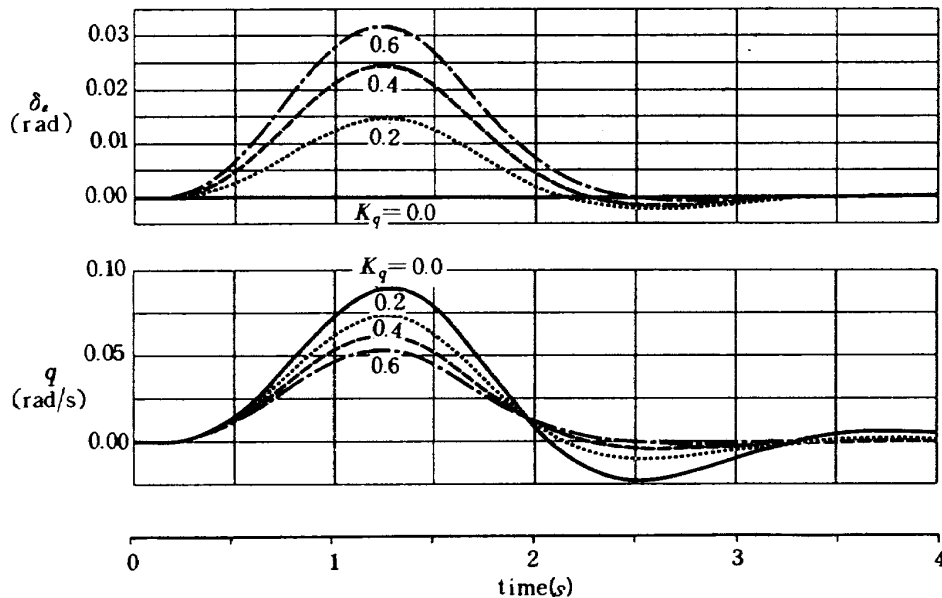


図7(a) 角速度フィードバック・孤立突風応答(サーボ遅れなし)

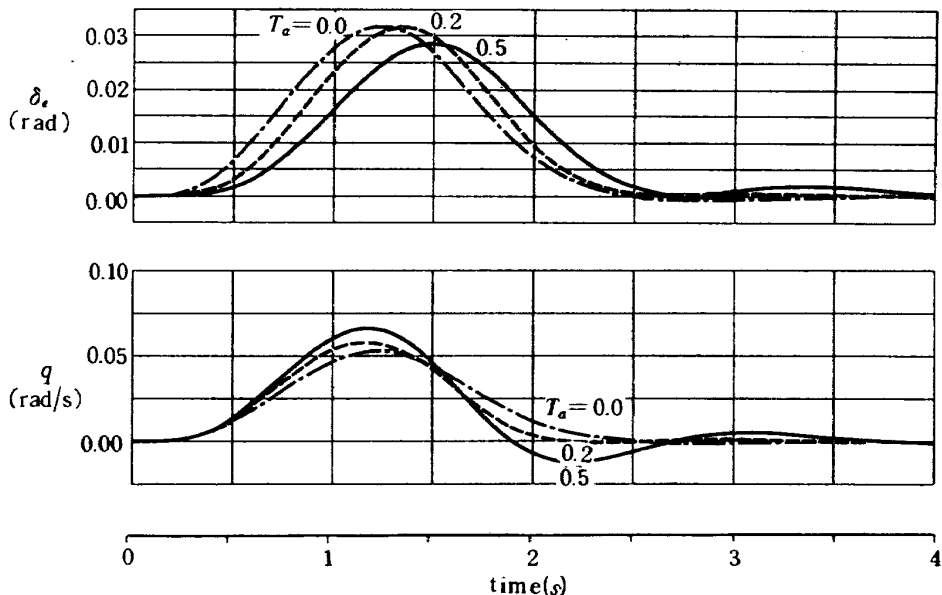


図7(b) 角速度フィードバック・孤立突風応答($K_q = 0.6$)

なお、表1の突風パラメータの値は参考文献2)の低高度強程度突風モデルの値を用いている。

次に連続突風を受けた場合の $q(t)$ の標準偏差の比較を行う。サーボ遅れのない場合は(2.15)式に対応させると昇降舵角 $\delta_e(t)$ は

$$\delta_e(t) = K_q q(t) = K_q H_5 x_5(t) \quad (3.17)$$

と表すことができる。ただし $H_5 = [0, 1, 0, 0]$ である。これを(2.15)式に代入すると、閉ループ系の拡張状態方程式は

$$\dot{x}_5(t) = (A_5 + K_q b_{51} H_5) x_5(t) + b_{52} n(t) \quad (3.18)$$

となる。ただし、 b_{51} 、 b_{52} は各々 B_5 の1列目、2列目である。

$$A_{c5} = A_5 + K_q b_{51} H_5 \quad (3.19)$$

とおくと、 $x_5(t)$ の定常共分散は定常共分散方程式

$$A_{c5} X_5 + X_5 A_{c5}^T + b_{52} N b_{52}^T = 0 \quad (3.20)$$

を解くことによって得られる。ここで

$$X_5 = \lim_{t \rightarrow \infty} E \{ x_5(t)^T x_5(t) \} \quad (3.21)$$

は $x_5(t)$ の定常共分散マトリクス、 N は定常正規白過程 $n(t)$ の強さで $N = \sigma_{wg}^2 L / (\pi U_0)$ である。

一次遅れサーボを含む場合も同様に、(2.16)式に対応させて

$$u(t) = K_q q(t) = K_q H_6 x_6(t) \quad (3.22)$$

と表すことができる。ただし $H_6 = [0, 1, 0, 0, 0]$ である。これを(2.16)式に代入すると、閉ループ系の拡張状態方程式は

$$\dot{x}_6(t) = (A_6 + K_q b_{61} H_6) x_6(t) + b_{62} n(t) \quad (3.23)$$

となる。ただし、 b_{61} 、 b_{62} は各々 B_6 の1列目、2列目である。

$$A_{c6} = A_6 + K_q b_{61} H_6 \quad (3.24)$$

とおくと、 $x_6(t)$ の定常共分散は定常共分散方程式

$$A_{c6} X_6 + X_6 A_{c6}^T + b_{62} N b_{62}^T = 0 \quad (3.25)$$

を解くことによって得られる。

外乱として(2.10)式の L および σ_{wg} を表1の値とした連続突風を受けた場合の昇降舵角 $\delta_e(t)$ および縦揺れ角速度 $q(t)$ の応答の標準偏差 σ_{δ_e} および σ_q を図8に示す。サーボ遅れなしの場合、並びに一次遅れサーボ系を含む場合で $T_a = 0.2$ および 0.5 としたときについて、 K_q を0から1まで変化させた場合の標

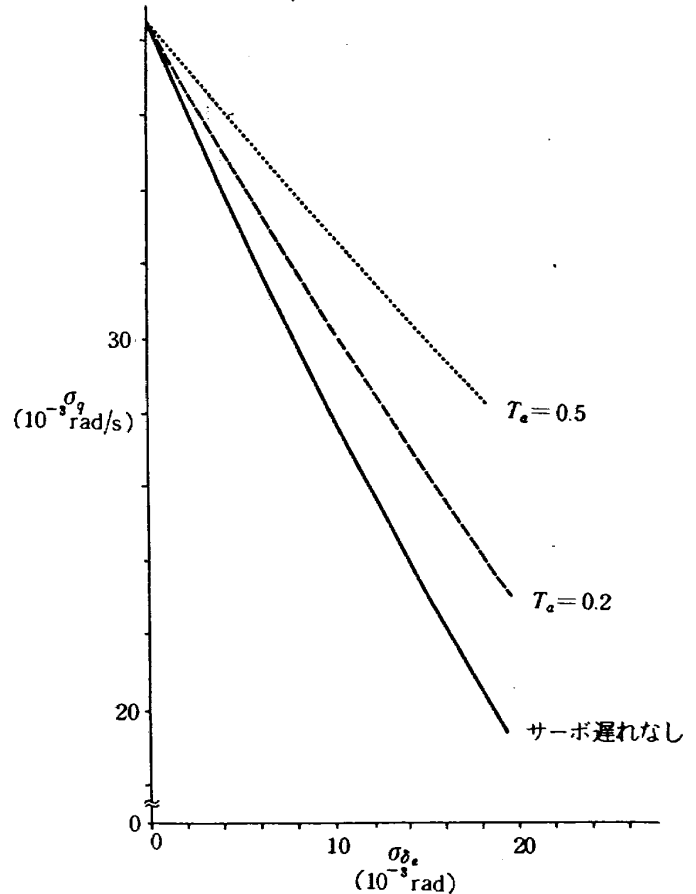


図8 角速度フィードバック・連続突風応答昇降舵標準偏差—縦揺れ角速度標準偏差

準偏差 σ_{δ_e} および σ_q が変化する様子を示してある。 T_a が大きくなるにつれ σ_{δ_e} の増加にともなう σ_q の減少の割合が小さくなり、費用対効果が劣化していることがわかる。

図7および図8によって、一次遅れサーボ系を含む場合にはサーボ時定数が大きくなるに従って、孤立突風応答および連続突風応答の抑制効果が劣化していくことが示されている。次章では角速度と共に角加速度もフィードバックすることによってこの応答の劣化の回復を図ることを試みる。

4章 角加速度フィードバック

4.1 角加速度フィードバック系

航空機の運動方程式の縦揺れ角速度 q をフィードバックした場合、一次遅れサーボ系を含んでいると開ループ伝達関数にサーボの極が増すことによって、フィードバックゲイン K_q を増しても短周期のダンピング係数が充分大きくなり、突風外乱に対する応答の抑制効果が充分に上らないことが前章で示され

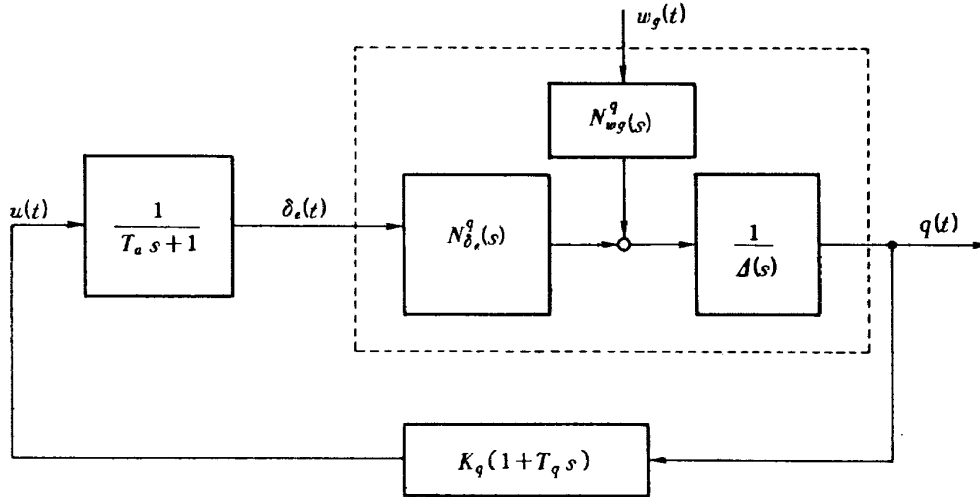


図9 角加速度フィードバック制御系

た。フィードバックゲインの増加に伴って短周期運動のダンピングが増すようにするには根軌跡が実軸上に落ちるようにする必要がある。このためには開ループ伝達関数に零点を1つ追加し、サーボ極との間で極零相殺を行えばよいと考えられる。そこで零点の導入の方法として角速度 q とともに角加速度 \dot{q} を次式のようにフィードバックすることを考える。

$$u(t) = K_q q(t) + K_{\dot{q}} \dot{q}(t) \tag{4.1}$$

ここで $K_{\dot{q}}$ は角加速度のフィードバックゲインでスカラー量である。上式をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} u(s) &= K_q q(s) + K_{\dot{q}} s q(s) \\ &= K_q (1 + T_q s) q(s) \end{aligned} \tag{4.2}$$

となる。ここで $T_q = K_{\dot{q}} / K_q$ である。

角加速度フィードバックを行った場合のブロック線図を図9に示す。縦揺れ角速度 q と一定の比 T_q で縦揺れ角加速度 $\dot{q}(t)$ をフィードバックすることによって開ループ伝達関数の分子に $(1 + T_q s)$ が追加されるため、零点が1つ増えることになる。増加される零点の位置は、 $-1/T_q$ となる。

4.2 根軌跡およびボード線図

一次遅れサーボ系を含む場合の $u(s)$ から $q(s)$ への伝達関数は(3.8)式で与えられ、これに制御則(4.1)式を代入すると角加速度フィードバックを加えた場合の開ループ伝達関数は

$$-\frac{K_q (T_q s + 1) N_{\delta_e}^q(s)}{T_a s + 1} \frac{1}{D(s)} \tag{4.3}$$

となる。

K_q の値を変化させたときの閉ループ系の特性根の軌跡を図10に示す。

図10(a)は、サーボ時定数 T_a を0.2とし、 $T_q = 0.0, 0.1, 0.2, 0.5$ の時の根軌跡を示している。一次遅れサーボ系の極は $p_a = -5$ であるから、 $T_q = 0.2$ の時は p_a の位置に零点が増設されることになり、極・零相殺で根軌跡はサーボ遅れがない場合と全く同じになる。サーボ時定数の不確定性を考慮し、図10(b)にフィードバック零点を -5 ($T_q = 0.2$) とした場合について根軌跡を示す。このように T_q の値を T_a の近くにとれば、増設された零点によっていずれの根軌跡も実軸上に落ち、任意の減衰が得られることがわかる。

次にボード線図について検討する。開ループ伝達関数は(4.3)式で与えられるので $K_q = 1$ とすると、このボード線図は図6で示される角速度フィードバックの場合のボード線図に $(T_q s + 1)$ のボード線図をたし合わせたものになる。 $(T_q s + 1)$ のゲイン漸近線は

定常ゲイン： 1

折点周波数： $\omega = \frac{1}{T_q}$

勾配： 20 dB/dec

であり、位相は

$\omega \rightarrow 0$ の時 $\phi \rightarrow 0$

$\omega \rightarrow \infty$ の時 $\phi \rightarrow 90^\circ$

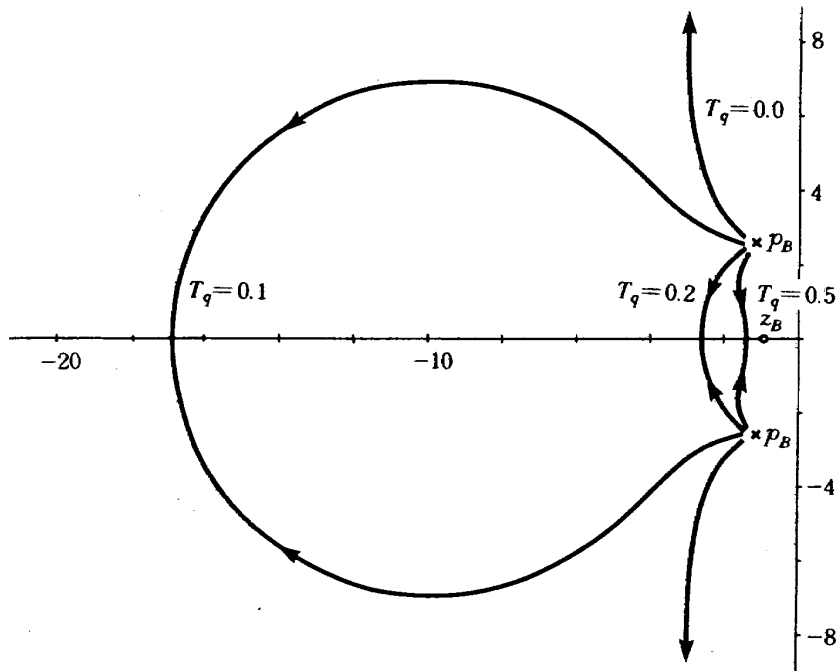


図10(a) 角速度, 角加速度フィードバック・根軌跡 ($T_a=0.2$)

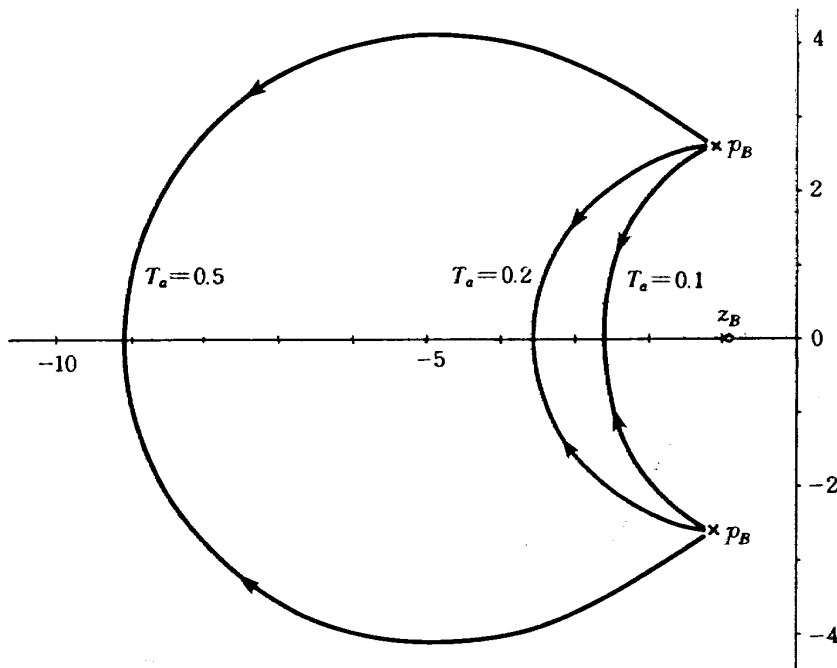


図10(b) 角速度, 角加速度フィードバック・根軌跡 ($T_q=0.2$)

である。図11に T_a を 0.2 に固定した場合の (4.3) 式のボード線図及びその漸近線を実線と破線により示す。(a), (b), (c) 図は各々 $T_q = 0.1, 0.2, 0.5$ の場合であり, 位相余裕はそれぞれ $97^\circ, 109^\circ, 111^\circ$ となっている。角加速度フィードバックを行うことにより, 3章図6に比べて位相余裕が増加していることがわかる。

4.3 突風応答

ここでは制御則として縦揺れ角速度, 及び縦揺れ角加速度をフィードバックした場合の突風応答を計算する。(4.1)式は次の様に書ける。

$$u(t) = K_q T \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

ただし $T = [1, T_q]$ である。この $\dot{q}(t)$ に (2.9) 式を代入すると, サervo入力 $u(t)$ は (2.9) 式に対応させて

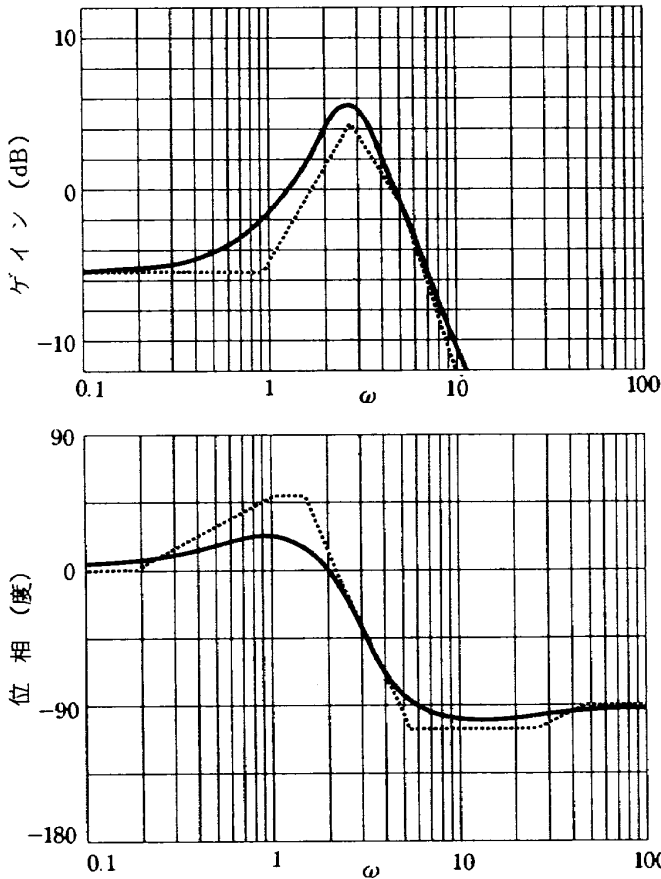


図11(a) 角速度, 角加速度フィードバック・ボード線図 ($T_a=0.2, T_q=0.1$)

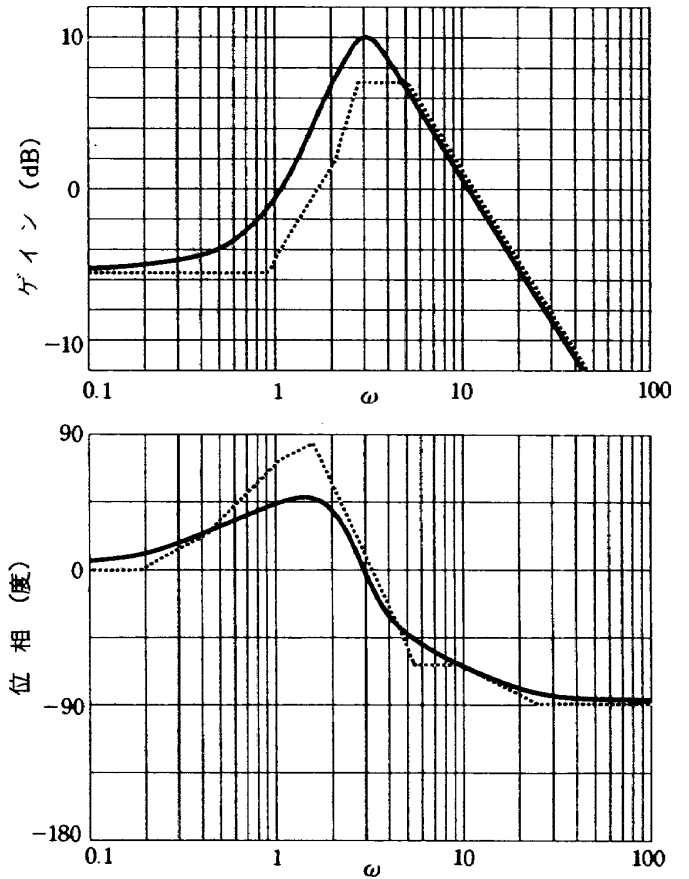


図11(c) 角速度, 角加速度フィードバック・ボード線図 ($T_a=0.2, T_q=0.5$)

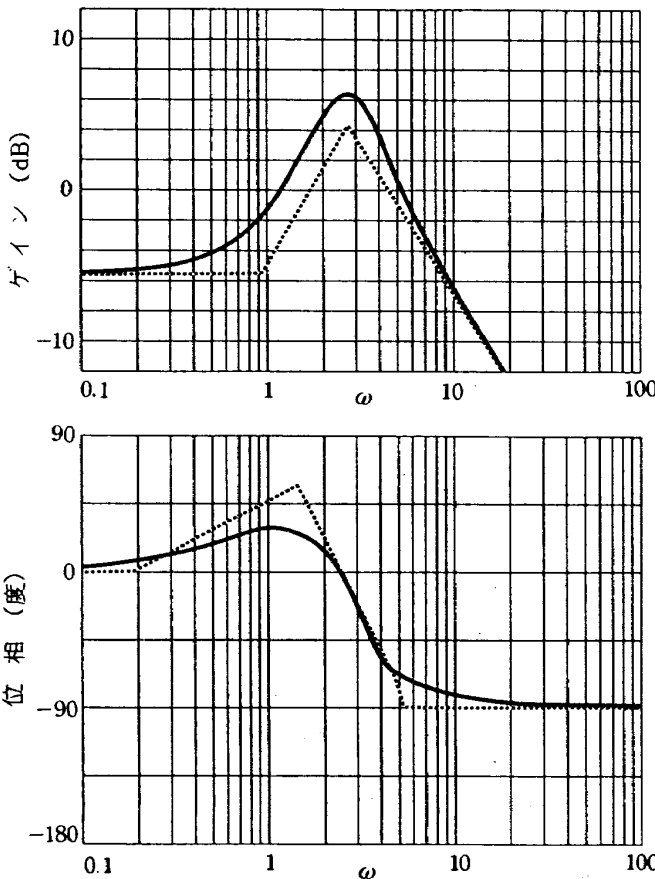


図11(b) 角速度, 角加速度フィードバック・ボード線図 ($T_a=0.2, T_q=0.2$)

$x_4(t)$ を用いて次のように表現できる。

$$u(t) = K_q T H_4' x_4(t) + K_q T h_4 v(t) \quad (4.5)$$

ここで

$$H_4' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ M_w' & M_q' & M_{\delta_e}' & -M_w' \end{bmatrix}$$

$$h_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_w' \end{bmatrix}$$

である。この制御則を(2.9)式に代入すると閉ループ系の状態方程式として、

$$\dot{x}_4(t) = (A_4 + K_q b_{41} T H_4') x_4(t) + (b_{42} + K_q b_{41} T h_4) v(t) \quad (4.6)$$

が得られる。

角加速度フィードバックを追加したときの孤立突風応答を角速度フィードバックだけの応答と比較するため、(4.6)式に3章図7と同じ条件の孤立突風を入力したときの過渡応答を図12に示す。ここでは $T_a = 0.5$, $K_q = 0.6$ に固定し、角速度のみのフィードバック ($T_q = 0.0$), $T_q = 0.2$ および $T_q = 0.5$ の場合の比較を示す。角加速度をフィードバックすることにより $q(t)$ の過渡応答の最大値が減少している様子

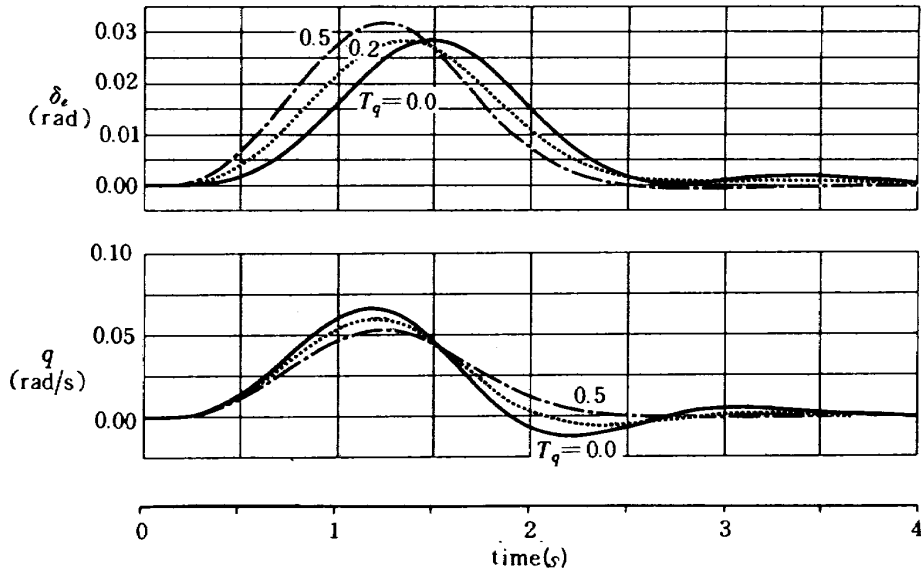


図12 角速度，角加速度フィードバック・孤立突風応答 ($T_a=0.5, K_q=0.6$)

がわかる。 $T_q = 0.5$ の場合には極・零相殺により，一次遅れサーボ系による影響がキャンセルされ，図7のサーボ遅れなしの場合の応答と一致する。

次に角加速度をフィードバックした場合で連続突風を受けたときの $\delta_e(t)$ および $q(t)$ の標準偏差を求める。サーボ入力 $u(t)$ は (2.16) 式に対応させて $x_6(t)$ で次のように記述できる。

$$u(t) = K_q T H_6' x_6(t) + K_q T h_6 u(t) \quad (4.7)$$

ここで

$$H_6' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ M_w' & M_q' & M_{\delta_e}' & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$h_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} (L/U_0) M_w' \end{bmatrix}$$

である。ただし a_{23} と a_{24} は (2.15) 式で定義された値である。この制御則を (2.16) 式に代入すると閉ループ系の状態方程式として，

$$\dot{x}_6(t) = (A_6 + K_q b_{61} T H_6') x_6(t) + (b_{62} + K_q b_{61} T h_6) n(t) \quad (4.8)$$

が得られる。

閉ループ拡張状態方程式 (4.8) 式を用いて x_6 の定常共分散を求める。連続突風外乱に対する昇降舵角 $\delta_e(t)$ および縦揺れ角速度 $q(t)$ の応答の標準偏差を，図13に示す。(a)図はサーボ時定数 $T_a = 0.2$ に対し， $T_q = 0.05, 0.2, 0.5$ とした場合，(b)図は $T_a = 0.5$ に対し， $T_q = 0.1, 0.5, 1.0$ とした場合を示しており，3章図8の角速度のみのフィードバックの場合 ($T_q = 0.0$) も重ねて書いている。この図から， $T_q =$

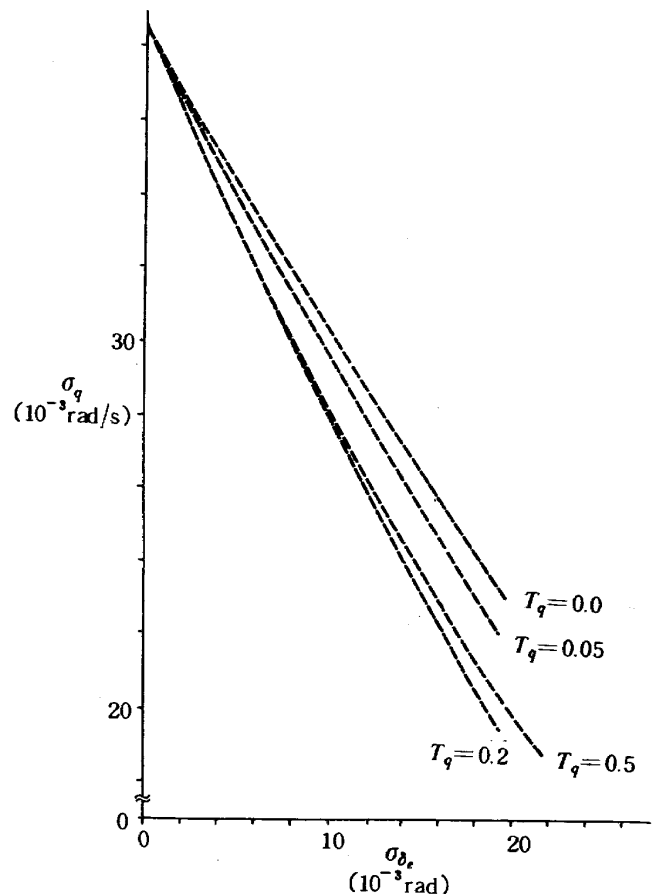


図13(a) 角速度，角加速度フィードバック・連続突風応答
昇降舵標準偏差—縦揺れ角速度標準偏差 ($T_a = 0.2$)

T_a に設定すれば，サーボ遅れなしの場合と一致し，費用対効果が最もよくなることがわかる。

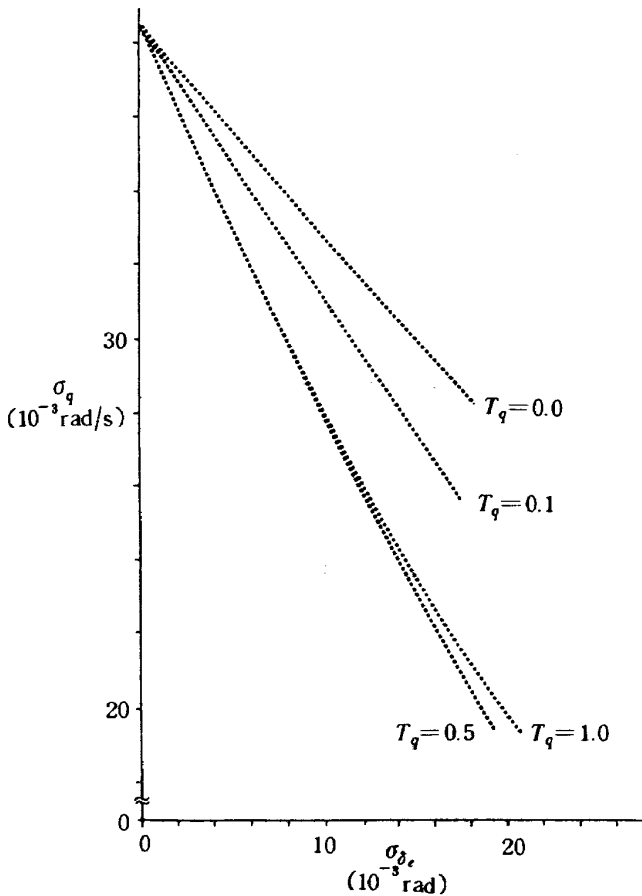


図13(b) 角速度，角加速度フィードバック・連続突風応答
昇降舵標準偏差—縦揺れ角速度標準偏差
($T_a=0.5$)

5章 まとめ

従来の角速度フィードバック(SAS)による航空機の短周期制御では，一次遅れで近似できるサーボ系を含む場合にはサーボの時定数によってはフィードバックゲインを上げていった時に必ずしもダンピングが増加しない場合のある事を根軌跡で示し，またサーボ系の時定数 T_a の値が大きくなるに従って突風外乱に対する応答特性がしだいに劣化する傾向がみられることを示した。このとき角速度に加えて，

角加速度をフィードバックすることにより，根軌跡上に零点を導入し，その零点を一次遅れサーボ系の極の位置に配置させることによって極・零相殺を行い，サーボ系の遅れを補償することが可能となり，突風外乱制御に関して有効であることを示した。角加速度の計測はレートジャイロ出力の微分によらず角加速度計⁵⁾を用いる事によってシグナル・ノイズ比の良い信号が得られれば実用上も有効な手法と考えられる。

今回は安定化としての外乱制御のみについての検討を行ったが，今後の課題としては安定化のほかに操縦性との関係の上での検討を行う必要がある。なお，本研究を進めるにあたり，予備検討のための計当所の研修生である東京電気大学の井沢克也君伝ってもらった。ここに謝意を表する。

参考文献

- 1) D. McRuer: Aircraft Dynamics and Automatic Control, Princeton Univ. Press, 1973
- 2) Military Specification, Flying Qualities of Piloted Airplanes, MIL-F-8785C, 1980
- 3) 永安正彦; 有色外乱を受ける線形フィードバック系の共分散指定問題, 航技研報告 TR-520, 1977
- 4) 永安正彦; 自動着陸用電気サーボ系の非線形シミュレーションモデル, 航技研資料 TM-300, 1976
- 5) 鈴木, 永安 他; 浮動型角加速度計の開発とその応用, 第25回飛行機シンポジウム講演集, 1987
- 6) B. Etkin: Dynamics of Atmospheric Flight, John Wiley & Sons Inc., 1972
- 7) 伊藤正美; 自動制御概論, 昭晃堂, 1970

既 刊 報 告

TM-590	矢羽根を用いた冗長型気流方向測定装置の風洞試験に関する報告	1988年7月	木村武雄, 滝沢実 内田忠夫, 藤枝郭俊 岩崎昭人, 藤田敏美
TM-591	固体画像センサ性能評価システムの試作研究	1988年7月	本間幸造, 中正夫 興石肇
TM-592	PAP1システムの飛行評価試験	1988年7月	田中敬司, 照井祐之 稲垣敏治
TM-593	オブザーバを用いたストラップダウン慣性センサによる姿勢力推定	1988年8月	佐々修一, 永安正彦 柳原正明
TM-594	宇宙往還機飛行シミュレーションプログラム	1988年8月	柳原正明
TM-595	ロケット燃焼器の熱流束分布データ収録装置の試作	1988年9月	坂本博
TM-596	多機能表示装置の飛行シミュレーション評価試験	1988年10月	川原弘靖, 若色薫 田中敬司, 渡辺顯
TM-597	宇宙ステーションの利用について(その3)	1988年10月	松本甲太郎
TM-598	宇宙往還機の重量評価と感度解析 その1 SSTO 第一報	1989年1月	白水正男
TM-599	二液式アポジエンジン用デジタルデータ処理システム	1989年1月	木皿且人, 須藤孝幸 千葉彰, 長島隆一

航空宇宙技術研究所資料600号

平成元年2月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7-44-1
電話 三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊦182

印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山5-6-17
