

航空技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

TR-16

放物型偏微分方程式の混合境界値問題の
差分法による数値解法

樋口 一雄・三好 甫

1961年12月

航空技術研究所
NATIONAL AERONAUTICAL LABORATORY

放物型偏微分方程式の混合境界値問題の 差分法による数値解法

樋 口 一 雄・三 好 甫

On the Difference Method Solutions of the Mixed Boundary Value Problems of Parabolic Partial Differential Equations

By Kazuo HIGUCHI and Hazime MIYOSHI

The purpose of this paper is to give numerical solution of parabolic partial differential equations.

On the case of variable coefficient, a new constructing method of finite difference equation is investigated and this method may be applicable for other types of partial differential equation.

The criterion of the convergence of iteration procedure and of propagation of error is given on the basis of the matrix eigen value.

1. 緒 言

偏微分方程式の差分法による近似解法とは、与えられた偏微分方程式を適当に定義された Banach 空間において近似する多元連立代数方程式に帰着させ、この多元連立代数方程式を解いて、元の方程式の近似解を与える方法であるが、この方法は 1928 年の R. Courant, K. O. Friedrichs, H. Lewy の論文 [1] に始まり、1940 年代の半ば以後、電子計算機の発達に伴ない急速に発達してきた方法である。

この方法を非定常境界層の問題、伝熱問題あるいは、爆発の問題等において遭遇する放物型偏微分方程式の混合境界値問題に適用した場合、次の 4 つの問題が生じてくる。

1. 近似差分方程式の構成法とその近似度。
2. 近似差分方程式の混合境界値問題の解の存在と、その一意性および近似差分方程式から生ずる多元連立代数方程式の解法。
3. 計算のある段階で生じた error の伝播。
4. すべての空間座標方向および時間座標方向の格子点間かくを、相互に一定の比率を保ったまま 0 に収束させた場合、近似差分方程式の混合境界値問題の解が元の偏微分方程式の解へ収束するかという問題。

第 1 の問題に関しては、定数係数の場合、従来までに開発されてきた Taylor 展開による方

法 (L. Collatz [2], R. D. Richtmyer [3]) あるいはその延長としての多点近似法 (L. Collatz [2], J. Albrecht [4]) により構成された近似差分方程式で、十分な精度の近似解が得られることを実際の計算により示し、変数係数の場合は従来の方法により構成された近似差分方程式は十分な精度の近似解を与えないので、近似差分方程式を構成するための新たな方法を見だし、かつ、この近似差分方程式が良い近似解を与えることを示した。

第2, 第4の問題に関しては、偏微分方程式が線型の場合、問題は行列論の問題に帰着し(加藤, 橋本, 中田, 藤田 [8]), 非線型の場合、その一般的な取り扱いが困難なので、ここでは iteration method の収束性以外についてはふれない。第3の問題に関しては、これを行列の固有値問題に帰着させて論ずる。

2. 一般理論

2.1 近似差分方程式

記号の簡単化のため、1次元混合境界値問題について論じるが、2次元、3次元の場合も全く同様に問題を扱える。

いま, properly posed な1次元混合境界値問題

$$L[u(x, t)] = f(x, t) \quad a \leq x \leq b, t > 0 \quad (2.1.1)$$

$$u(a, t) = \psi_1(t) \quad u(b, t) = \psi_2(t) \quad (2.1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2.1.3)$$

を考える。ここで L は偏微分作用素である。

領域を直交直線群

$$x = x_0 + ih \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, M \quad h > 0$$

$$t = t_0 + jk \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad k > 0$$

で覆い、格子点を (i, j) で、その上の関数の値を $u_{i,j}, f_{i,j}$ 等で表わし、(2.1.1)~(2.1.3) に対する近似差分方程式を

$$l_h(u_{i,j}) = f_{i,j} \quad i = 1, 2, \dots, M-1, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1.4)$$

$$u_{0,j} = \psi_{1,j} \quad u_{M,j} = \psi_{2,j} \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.1.5)$$

$$u_{i,0} = \varphi_i \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (2.1.6)$$

で表わす。ここで l_h は近似差分作用素である。

l_h は L が線型ならば線型となり、 L が非線型ならば非線型となる。ここでは L を線型とする。

j を固定し、 $u_{0,j} \cdots u_{M,j}$ を成分とする M 次元ベクトルを $\mathbf{u}_j = (u_{0,j}, u_{1,j}, \dots, u_{M,j})$ とし、他にも同様にしてベクトル記号を用いる。ある j に関する $l_h(u_{i,j})$ に着目し、(2.1.4) 式を次のよ

うに分解する。

$$A(\Delta_{j+1})\mathbf{u}_{j+1}=B(\Delta_j)\mathbf{u}_j+c(\Delta_{j-1})\mathbf{u}_{j-1}+\cdots+\mathbf{f}_j \quad (2.1.7)$$

$A(\Delta_{j+1}), B(\Delta_j)$ 等は l_h において $\mathbf{u}_{j+1}, \mathbf{u}_j$ 等の各成分の係数により作られた行列である。ゆえに, (2.1.1)~(2.1.3) の近似解は (2.1.7) を (2.1.5) と (2.1.6) の条件のもとに $j=0$ から出発して逐次 \mathbf{u}_j を計算していくことに帰着する。

2.2 近似差分方程式の解法

(2.1.7) の計算は l_h が explicit な場合と implicit な場合に分けて考えなければならない。

a) explicit な場合, $A(\Delta_{j+1})$ は単位行列となり, \mathbf{u}_{j+1} の計算は行列の乗積に帰着する。

b) implicit な場合, $A(\Delta_{j+1})$ の逆行列は一般に簡単には求まらない。特に, 偏微分方程式が変数係数で係数関数が t にも依存する場合には, $A(\Delta_{j+1})$ の逆行列の計算は $A(\Delta_{j+1})$ の要素が j の値につれて変化するので, 計算機を用いたとしても時間的に不利である。そのため, 一般には iteration method を用いて計算する。まず, (2.1.7) を分解して

$$\mathbf{u}_{j+1}=A'(\Delta_{j+1})\mathbf{u}_{j+1}+B(\Delta_j)\mathbf{u}_j+\cdots+\mathbf{f}_j \quad (2.2.1)$$

とおき, これより iteration formula を

$$\mathbf{u}_{j+1}^{q+1}=A'(\Delta_{j+1})\mathbf{u}_{j+1}^q+B(\Delta_j)\mathbf{u}_j+\cdots+\mathbf{f}_j \quad (2.2.2)$$

とおく。(iteration formula の作り方はいろいろあるが, できるだけ収束性の速いものを作ることが望ましい。)

その収束性を吟味するために, まず差分方程式の解および iteration の各近似を含む Banach 空間を作り, その norm を内積により定義する。(2.2.1) と (2.2.2) より

$$\|\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_{j+1}^{q+1}\|=\|A'(\Delta_{j+1})(\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_{j+1}^q)\| \quad (2.2.3)$$

となり, これより

$$\|\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_{j+1}^{q+1}\|=\|A(\Delta_{j+1})^{q+1}(\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_{j+1}^0)\| \quad (2.2.4)$$

となり, 上式を用いて iteration formula の収束性が評価できる。

いま, $A'(\Delta_{j+1})$ の固有値を λ_r' , 固有ベクトルを $\mathbf{w}_r', \mathbf{w}_r'$ と $\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_{j+1}^0$ の内積を α_r' とすれば

$$\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_{j+1}^0=\sum_r \alpha_r' \mathbf{w}_r'$$

ゆえに

$$A'(\Delta_{j+1})(\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_{j+1}^0)=\sum_r \alpha_r' \lambda_r' \mathbf{w}_r' \quad (2.2.5)$$

$A'(\Delta_{j+1})$ が対角化できれば* (2.2.5) より

$$A'(\Delta_{j+1})^{q+1}(\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_{j+1}^0)=\sum_r \alpha_r' \lambda_r'^{q+1} \mathbf{w}_r' \quad (2.2.6)$$

* 遠山啓 行列論

これより

$$\|A'(\Delta_{j+1})^{q+1}(\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_{j+1}^0)\|=(\sum_r \alpha_r'^2 \lambda_r'^{2(q+1)})^{1/2} \quad (2.2.7)$$

ゆえに

$$\lambda'=\max_r |\lambda_r'| < 1 \quad (2.2.8)$$

ならば iteration formula は収束する。また、(2.2.7) より明らかなように第0近似が差分方程式の真の解に近ければ近いほど (Banach 空間の norm の意味で) 収束は速い。

2.3 誤差の伝播

いま l_h を 2-level の近似差分方程式とし、 $f(x, t) \equiv 0$ とすると (2.1.7) は

$$A(\Delta_{j+1})\mathbf{u}_{j+1}=B(\Delta_j)\mathbf{u}_j \quad (2.3.1)$$

となり、これより

$$\mathbf{u}_{j+1}=A(\Delta_{j+1})^{-1}B(\Delta_j)\mathbf{u}_j \quad (2.3.2)$$

となる。いま、ある \mathbf{u}_j の計算において $\boldsymbol{\epsilon}_j$ の誤差が生じたとする。 $A(\Delta_{j+1})^{-1}B(\Delta_j)$ が対角化できて、その固有値を $\lambda_r^{(j+1)}$ 、固有ベクトルを $\mathbf{w}_r^{(j+1)}$, $\mathbf{w}_r^{(j+1)}$ と $\boldsymbol{\epsilon}_j$ の内積を $\alpha_r^{(j)}$ とすると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_j &= \sum_r \alpha_r^{(j)} \mathbf{w}_r^{(j+1)} \\ \|\boldsymbol{\epsilon}_j\| &= (\sum_r (\alpha_r^{(j)})^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

この $\boldsymbol{\epsilon}_j$ は次の \mathbf{u}_j 計算において $A(\Delta_{j+1})^{-1}B(\Delta_j)\boldsymbol{\epsilon}_j$ となる。 $\boldsymbol{\epsilon}_j^{j+1}=A(\Delta_{j+1})^{-1}B(\Delta_j)\boldsymbol{\epsilon}_j$ とおけば

$$\boldsymbol{\epsilon}_j^{j+1}=\sum_r \alpha_r^{(j)} \lambda_r^{(j+1)} \mathbf{w}_r^{(j+1)} \quad (2.3.4)$$

ゆえに

$$\|\boldsymbol{\epsilon}_j^{j+1}\|=(\sum_r (\alpha_r^{(j)})^2 (\lambda_r^{(j+1)})^2)^{1/2} \quad (2.3.5)$$

ゆえに、 $\max_r |\lambda_r^{(j+1)}| < 1$ ならば (2.3.3) と (2.3.5) から $\|\boldsymbol{\epsilon}_j^{j+1}\| < \|\boldsymbol{\epsilon}_j\|$ 、ゆえに

$$\max_{r,j} |\lambda_r^{(j+1)}| < 1 \quad (2.3.6)$$

ならばある \mathbf{u}_j の計算において生じた誤差は計算過程において 0 に収束する。

3. 定数係数の場合

定数係数放物型偏微分方程式に関しては、具体的な例について Taylor 展開法、多点近似法により近似差分方程式を構成し、2で述べた一般論をそれらの近似差分方程式の誤差の伝播、iteration formula の収束性について適用し、計算を当研究所データロン 205 を用いて行なったが、その結果、定数係数の場合には、Taylor 展開法、多点近似法によって構成された近似差分方程式が誤差の伝播、iteration formula の収束性、近似解の精度、計算速度に関して十分実用にたえることを示した。

次に、その中で典型的であると思われる具体例について各種の近似差分方程式、その誤差の

伝播, iteration formula の収束性の評価式をあげ結果を示す。

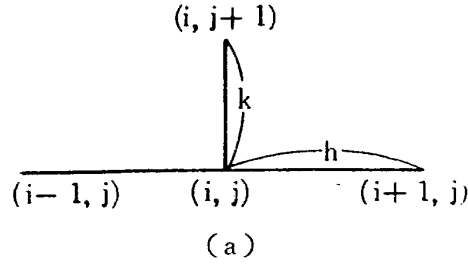
ex. 1

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad |x| < 1, t > 0 \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2} \quad |x| \leq 1 \quad (3.2)$$

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0 \quad (3.3)$$

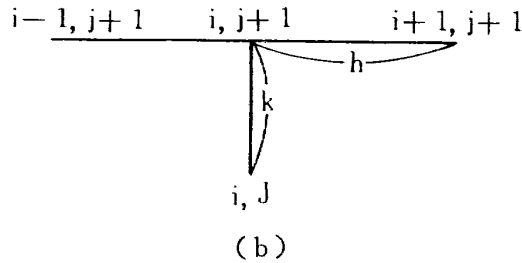
a) [1] による式は図 (a) に示したような格子点を用いて, 差分方程式を構成する。



$$l_h \equiv \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (3.4)$$

$L - l_h = O(h^2) + O(k)$ で, $k/h^2 = l < 1/2$ で (2.3.6) を満足する。 l_h は explicit である。

b) [5] による式は図 (b) に示したような格子点を用いて, 差分方程式を構成している。



$$l_h \equiv \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} = 0 \quad (3.5)$$

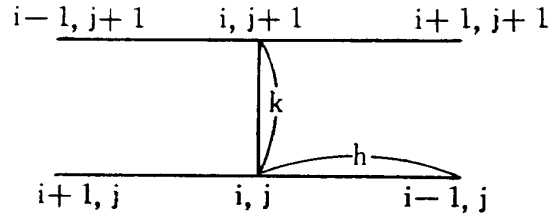
$L - l_h = O(h^2) + O(k)$ で, 任意の $l > 0$ に対して (2.3.6) を満足する。 l_h は implicit だから iteration により u_{j+1} を計算する。

$$A'(\mathcal{A}_{j+1}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{l}{1+2l} & & 0 \\ \frac{l}{1+2l} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{l}{1+2l} & \\ 0 & & & \frac{l}{1+2l} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_r| = \left| \frac{-2l}{1+2l} \cos \frac{r\pi}{M} \right| < 1, \quad r=1, \dots, M-1$$

ゆえに (2.2.8) を満足する。

c) [6] による式は図 (c) のような格子点を用いて差分方程式を構成している。



(c)

$$l_h \equiv \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{\theta}{h^2} (u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) - \frac{(1-\theta)}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = 0 \quad (3.6)$$

$$L - l_h = O(k) + O(h^2), \quad \theta = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12k} \quad \text{ならば} \quad L - l_h = O(k^2) + O(h^4)$$

となる。誤差の伝播に関しては

$$|\lambda_r| = \left| \frac{1 - 4l(1-\theta) \sin^2 \frac{r\pi}{2M}}{1 + 4l\theta \sin^2 \frac{r\pi}{2M}} \right| < 1, \quad r=1, \dots, M-1$$

であり, (2.3.6) を満足する。iteration formula の収束性に関しては

$$A'(\Delta_{j+1}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2r\theta}{1+2r\theta} & & 0 \\ \frac{2r\theta}{1+2r\theta} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{r\theta}{1+2r\theta} \\ 0 & & & \frac{r\theta}{1+2r\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

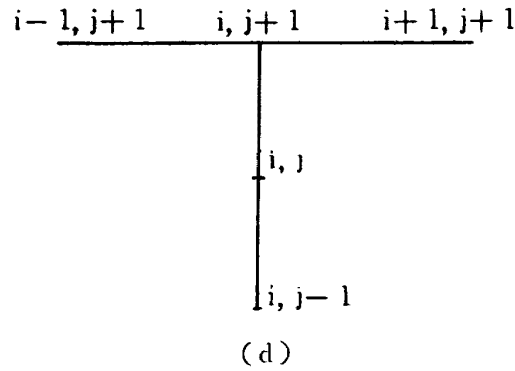
であり

$$|\lambda_r| = \left| \frac{-2l\theta}{1+2l\theta} \cos \frac{r\pi}{M} \right| < 1, \quad r=1 \dots M-1$$

ゆえに (2.2.8) を満足する。

d) [3] による式は図 (d) におけるような格子点を用いて差分方程式を構成したもので,

$$l_h \equiv (1+\theta) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \theta \frac{u_{i,j} - u_{i,j+1}}{k} - \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} = 0 \quad (3.7)$$



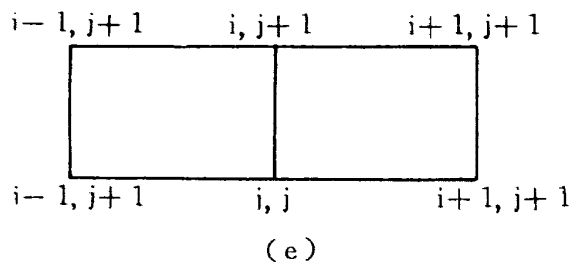
$L-l_h=O(k)+O(h^2)$, $\theta=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12k}$ ならば $L-l_h=O(k^2)+O(h^4)$ これは任意の θ, l に関して (2.3.6) を満足する。ゆえに誤差の伝播に関して安定である。iteration formula の収束性に関しては

$$A'(\Delta_{j+1}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{l}{1+2l+\theta} & & 0 \\ \frac{l}{1+2l+\theta} & 0 & \dots & \\ & \dots & \dots & \frac{l}{1+2l+\theta} \\ 0 & & \frac{l}{1+2l+\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_r'| = \left| \frac{-2l}{1+2l+\theta} \cos \frac{r\pi}{M} \right| < 1, \quad r=1 \dots M-1$$

ゆえに (2.2.8) を満足する。

e) c) と同じ格子点を取り, さらに精度を高めるために多点近似法を適用して差分方程式を作れば,



$$l_h \equiv \frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j}}{12} + \frac{5}{6} \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} + \frac{1}{12} \frac{u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j}}{k}$$

$$-\frac{1}{2h^2} (u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}) = 0 \quad (3.8)$$

$L-l_h=O(k^2)+O(h^4)$ で誤差の伝播に関しては

$$|\lambda_r| = \left| \frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{6} \cos \frac{r\pi}{M} - l \left(1 + \cos \frac{r\pi}{M}\right)}{\frac{5}{6} - \frac{1}{6} \cos \frac{r\pi}{M} + l \left(1 + \cos \frac{r\pi}{M}\right)} \right| < 1 \quad r=1, 2, \dots, M-1$$

で (2.3.6) を満足する。iteration formula の収束性に関しては

$$|\lambda_r'| = \left| \frac{6l-1}{5+6l} \cos \frac{r\pi}{M} \right| < 1$$

で (2.2.8) を満足する。

差分方程式, a), b), c), d), e) を用いて ex. 1 を計算した結果を第1表にあげる。

第1表から明らかのように、計算時間および近似解の精度は a) の $l=1/6$ とした時が最良であるが、これは $L(u) \equiv u_t - cu_{xx} = 0$ なる偏微分方程式に適用した場合に限られ、c) の $\theta=5/12$ の場合も同様なことがいえる。そこで e) の方法を適用するのが一般的に望ましいことが結論される。

表1 ex. 1 のデータトロン 205 による計算結果 $h=0.05$

l_h	l	θ	$t=0.1$		$t=0.5$		$t=0.5$ までに 要した計算時間
			$x=0.9$	$x=0$	$x=0.9$	$x=0$	
真の値			0.122229	0.781344	0.0455558	0.291213	
(a)	$\frac{1}{2}$		0.122104	0.780546	0.0453236	0.289729	1分41秒
(a)	$\frac{1}{6}$		0.122229	0.781344	0.0455555	0.291212	4分25秒
(b)	1		0.122656	0.784073	0.0463566	0.296333	16分11秒
(c)	1	$\frac{1}{2}$	0.122281	0.781542	0.0460003	0.292441	11分23秒
(c)	1	$\frac{5}{12}$	0.122228	0.781335	0.0455532	0.291207	27分47秒
(c)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0.122228	0.781338	0.0455533	0.291207	11分6秒
(d)	1	$\frac{1}{2}$	0.122626	0.783883	0.0461136	0.294321	19分21秒
(d)	1	$\frac{5}{12}$	0.122263	0.781392	0.0455561	0.291281	21分38秒
(e)	1		0.122227	0.781329	0.0455512	0.291278	8分15秒
(e)	$\frac{1}{2}$		0.122228	0.781337	0.0455532	0.291196	11分50秒

4. 変数係数の場合

4.1 従来の方法による近似差分方程式の構成

計算結果, 誤差伝播の評価式, iteration formula の収束性の評価式から明らかなように定数係数の場合, 多点近似法, Taylor 展開法により構成された近似差分方程式は十分な精度をもって近似解を与えることがわかる。

そこで, 同様な方法により構成された近似差分方程式を

ex. 2

$$u_t - \frac{x^2}{3(t+2)} u_{xx} = 0 \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (4.1.1)$$

$$u(x, 0) = 4x^3 \quad (4.1.2)$$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = (t+2)^2 \quad (4.1.3)$$

に適用する。

Lowan [7] によれば, $l = k/h^2$ として,

$$l \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{x^2}{3(t+2)} \right| \leq \frac{1}{2} \quad (4.1.4)$$

ならば

$$l_h \equiv \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - p_{ij} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (4.1.5)$$

は (4.1.1) の近似差分方程式となるが, 実際に計算を行なえば結果は表 2 のとおりで満足すべきものではない。ここに $P(x, t) = x^2/3(t+2)$ とする。

表 2 (4.1.5) による ex. 2 の計算

$x \backslash t$	0.5	真の値	
0.25	0.628697	0.632813	12 分 28 秒
0.5	0.777320	0.78125	25 分 3 秒

また,

$$l_h \equiv \frac{1}{12} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{k} + \frac{5}{6} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + \frac{1}{12} \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}}{k} - \frac{p_{i,j}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j+1})}{2h^2} = 0 \quad (4.1.6)$$

を ex. 2 に適用すれば, 結果は表 3 のとおりでかなり良好であるが, これを ex. 3 に適用すれば良い結果を与えない。

そこで, 従来までの方法とは異なった観点から近似差分方程式を構成しなければならない。

表 3 (4.1.6) による ex. 2 の計算

$t \backslash l$	0.5	1	2	真の値
0.1	0.5510128	0.5510276	0.5511003	0.5512500
所要時間	72分11秒	21分41秒	15分11秒	

4.2 常微分方程式の一般解を求めて差分方程式を構成する方法

いま、方程式 $u_t = p(x, t)u_{xx}$ を分解して

$$u_t = v(x, t) \quad (4.2.1)$$

$$p(x, t)u_{xx} = v(x, t) \quad (4.2.2)$$

とする。 $p(x, t)$, $v(x, t)$ を格子点 (i, j) の近傍で固定して、それぞれ $p_{i,j}$, $v_{i,j}$ とすれば、(4.2.1), (4.2.2) は解けて、それぞれ

$$u = v_{i,j}t + c_1 \quad (4.2.3)$$

$$u = \frac{1}{2} \frac{v_{i,j}}{p_{i,j}} x^2 + c_2 x + c_3 \quad (4.2.4)$$

となる。次に $u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j}$, $u_{i,j+1}$ を用いて c_1, c_2, c_3 を消去し、同時に $v_{i,j}$ と $u_{i,j}$, $u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j+1}$ の関係式を求めれば

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = v_{i,j} \quad (4.2.5)$$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{v_{i,j}}{p_{i,j}} \quad (4.2.6)$$

となり、上の2つの式から $v_{i,j}$ を消去して

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - p_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (4.2.7)$$

が求まる。しかしながら、この近似式が良好な結果を与えないことは先の計算結果より明らかである。その原因は格子点 (i, j) の近傍で $p(x, t)$, $v(x, t)$ を固定したため、 $p(x, t)$, $u(x, t)$ が h, k に関して相対的に急激に変動する場合には (4.2.7) が (4.2.1), (4.2.2) に対する良い近似式でなくなることにある。そこで $p(x, t)$, $v(x, t)$ を固定せずにこの理論を (4.2.1), (4.2.2) に適用する。(4.2.2) を満足する解は

$$u = \iint \frac{v(x, t)}{p(x, t)} dx dx + c_2 x + c_3 \quad (4.2.8)$$

であるが、 $v(x, t)/p(x, t)$ を $(i-1, j)$, (i, j) , $(i+1, j)$ において点 $v_{i-1,j}/p_{i-1,j}$, $v_{i,j}/p_{i,j}$, $v_{i+1,j}/p_{i+1,j}$ を通る2次曲線で近似し、(4.2.8) に代入し、 $u_{i+1,j}$, $u_{i,j}$, $u_{i-1,j}$ を用いて c_2, c_3 を消去し、 $v_{i,j}$, $v_{i+1,j}$, $v_{i-1,j}$ との関係式を定めれば

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{1}{12} \left(\frac{v_{i+1,j}}{p_{i+1,j}} + 10 \frac{v_{i,j}}{p_{i,j}} + \frac{v_{i-1,j}}{p_{i-1,j}} \right) \quad (4.2.9)$$

が得られ、同様に

$$\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2} = \frac{1}{12} \left(\frac{v_{i+1,j+1}}{p_{i+1,j+1}} + 10 \frac{v_{i,j+1}}{p_{i,j+1}} + \frac{v_{i-1,j+1}}{p_{i-1,j+1}} \right) \quad (4.2.10)$$

が得られる。次に (4.2.1) より同様の操作により

$$\frac{u_{n,j+1}-u_{n,j}}{k} = \frac{1}{2} (v_{n,j}+v_{n,j+1}), \quad n=i+1, i, i-1 \quad (4.2.11)$$

が得られる。(4.2.9)~(4.2.11) より

$$\begin{aligned} l_h \equiv & \frac{1}{12} \left[\left(\frac{1}{p_{i+1,j+1}} + \frac{1}{p_{i+1,j}} \right) \left(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j}}{k} \right) + 10 \left(\frac{1}{p_{i,j+1}} + \frac{1}{p_{i,j}} \right) \left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{p_{i-1,j+1}} + \frac{1}{p_{i-1,j}} \right) \left(\frac{u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j}}{k} \right) \right] \\ & - \frac{1}{2h^2} (u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

が得られる。(4.2.12) において $p_{n,j+1}=p_{n,j}$, $n=i+1, i, i-1$ とおけば

$$\begin{aligned} l_h \equiv & \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p_{i+1,j}} \frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j}}{k} + 10 \frac{1}{p_{i,j}} \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} + \frac{1}{p_{i-1,j}} \frac{u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j}}{k} \right) \\ & - \frac{1}{2h^2} (u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}+u_{i-1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i+1,j+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

が得られる。この式は (4.2.12) において $p(x, t)$ の t 方向の変動を無視した式にあたる。

(4.2.12), (4.2.13) は implicit であるから iteration method により計算する。iteration formula は (4.2.12) に対しては

$$\begin{aligned} & \left[2\lambda + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{p_{i,j+1}} + \frac{1}{p_{i,j}} \right) \right] u_{i,j+1} = u_{i+1,j+1} \left[\lambda - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p_{i+1,j+1}} + \frac{1}{p_{i+1,j}} \right) \right] \\ & - u_{i-1,j+1} \left[\lambda - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p_{i-1,j+1}} + \frac{1}{p_{i-1,j}} \right) \right] + u_{i+1,j} \left[\lambda + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p_{i+1,j}} + \frac{1}{p_{i+1,j+1}} \right) \right] \\ & + u_{i-1,j} \left[\lambda + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p_{i-1,j}} + \frac{1}{p_{i+1,j+1}} \right) \right] + u_{i,j} \left[\frac{5}{6} \left(\frac{1}{p_{i,j+1}} + \frac{1}{p_{i,j}} \right) - 2\lambda \right] \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

から $\mathbf{u}_{j+1}^q = A'(\Delta_{j+1})\mathbf{u}_j^q + B(\Delta_j)\mathbf{u}_j$ により構成する。この収束性については 2 で述べた一般論が適用できる。

(4.2.13) については iteration formula を

$$\begin{aligned} & \left(2\lambda + \frac{5}{6} \frac{1}{p_{i,j}} \right) u_{i,j+1} = u_{i+1,j+1} \left(\lambda - \frac{1}{12} \frac{1}{p_{i+1,j}} \right) + u_{i-1,j+1} \left(\lambda - \frac{1}{12} \frac{1}{p_{i-1,j}} \right) \\ & + u_{i+1,j} \left(\lambda + \frac{1}{12} \frac{1}{p_{i+1,j}} \right) + u_{i-1,j} \left(\lambda + \frac{1}{12} \frac{1}{p_{i-1,j}} \right) + u_{i,j} \left(\frac{5}{6} \frac{1}{p_{i,j}} - 2\lambda \right) \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

から $\mathbf{u}_{j+1}^q = A'(\Delta_{j+1})\mathbf{u}_j^q + B(\Delta_j)\mathbf{u}_j$ により構成する。

ここで得られた近似差分方程式を

ex. 3

$$u_t = \frac{(x+1)^2}{3(t+2)} u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (4.2.16)$$

$$u(x, 0) = 4(x+1)^3 \quad (4.2.17)$$

$$u(0, t) = (t+2)^2, u(1, t) = 8(t+2)^2 \quad (4.2.18)$$

に適用すれば、結果は第4表のごとくであって、きわめて良好である。

表4 ex. 3 を (4.2.12), (4.2.13) により計算した結果

l_h	$t=0.1$	$x=0.1$	$x=0.5$	$x=0.9$	所要時間
	l				
(4.2.12)	10	5.8697158	14.883638	30.248087	9 分 15 秒
(4.2.12)	20	5.8697316	14.883470	30.248004	6 分 48 秒
(4.2.13)	2	5.8701881	14.885378	30.249721	22 分 28 秒
(4.2.13)	1	5.8699376	14.884526	30.248713	27 分 11 秒
真の値		5.86971	14.88375	30.24819	

(4.2.12), (4.2.13) はいずれも任意の l に関して (2.2.8), (2.3.6) を満足する。特に, (4.2.12) は $p(x, t)$ の t 方向の変動を考慮しているので大きな l に対しても良い結果を与える。このことは、所定の t の値における u_{j+1} を計算する計算時間をいちぢるしく短縮する結果となる。

4.3 4.2 の方法のより一般的な偏微分方程式の混合境界値問題への応用

4.2 の方法の根本思想は偏微分方程式を (4.2.1), (4.2.2) のごとく分解し、それにより生じた一組の常微分方程式の境界値問題の局所的な解を求め、それより一組の差分方程式を構成し、これらの方程式系から形式的に導入された共通関数 (4.2 では $v(x, t)$) を消去することにある。したがって、4.2 では常微分方程式の一般解を積分により求めたが、このことはこの方法にとって何ら本質的な事がらではない。このことを示すために ex. 3 よりもさらに一般的な偏微分作用素

$$L(u) \equiv u_t - p(x, t)u_{xx} - q(x, t)u_x + r(x, t)u + f(x, t) = 0 \quad (4.3.1)$$

の近似差分作用素を、同じ思想のもとに別の常微分方程式の解法を用いて構成する。まず、(4.2.1), (4.2.2) のごとく (4.3.1) を分解して

$$u_t = v(x, t) \quad (4.3.2)$$

$$p(x, t)u_{xx} + q(x, t)u_x + r(x, t)u + f(x, t) = v(x, t) \quad (4.3.3)$$

とする。次に $f(x, t)$ を格子点 $(i+1, j), (i-1, j), (i, j)$ において $f_{i+1, j}, f_{i-1, j}, f_{i, j}$ を通る 2 次曲線で近似する。

$$f(x, t) \cong \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{2h^2} x^2 + \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} x + f_{i,j} \quad (4.3.4)$$

煩雑さをさけるため (4.3.4) を

$$f(x, t) = \sum_{i=0}^{12} f_{(i)} x^i \quad (4.3.5)$$

とおき, 同様にして $p(x, t), q(x, t), r(x, t)$ もそれぞれ

$$p(x, t) = \sum_{i=0}^{12} p_{(i)} x^i \quad (4.3.6)$$

$$q(x, t) = \sum_{i=0}^{12} q_{(i)} x^i \quad (4.3.7)$$

$$r(x, t) = \sum_{i=0}^{12} r_{(i)} x^i \quad (4.3.8)$$

$$v(x, t) = \sum_{i=0}^{12} v_{(i)} x^i \quad (4.3.9)$$

とおく, ここで

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i \quad (4.3.10)$$

とおき, (4.3.5)~(4.3.10) を (4.3.3) に代入すれば, α_i は α_0, α_1 をのこして一意に定まる。(4.3.10) において $x=0$ とすれば $u_{i,j} = \alpha_0$ および

$$\frac{\partial}{\partial x} \{u(x, t)\}_{x=0} = \alpha_1 \quad (4.3.11)$$

これより $u(x, t)$ における 1 階偏導関数を $(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})/2h$ でおきかえれば α_1 が $u_{i+1,j}, u_{i-1,j}$ の値により定まる。ゆえに, (4.3.3) の格子点 (i, j) の近傍における解は

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i,j} (p_{(n)j}, q_{(n)j}, r_{(n)j}, f_{(n)j}, v_{(n)j}, u_{i-1,j}, u_{i,j}, u_{i+1,j}) x^i \quad (4.3.12)$$

と定まる。同様に

$$u(x, t+h) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i,j+1} (p_{(n)j+1}, q_{(n)j+1}, r_{(n)j+1}, v_{(n)j+1}, u_{i-1,j+1}, u_{i,j+1}, u_{i+1,j+1}) x^i \quad (4.3.13)$$

また, (4.3.2) より 4.2 と同様にして (4.2.11) 式を求め, これと (4.3.12), (4.3.13) より $v_{i-1,j}, v_{i,j}, v_{i+1,j}$ を消去すれば近似差分方程式が求まる。例として, $u_t = p(x, t) u_{xx}$ の近似差分方程式をこの方法で求めれば

$$\begin{aligned} l_h \equiv & 6lp_{i,j}^3(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + 6lp_{i,j+1}^3(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \\ & - 0.25(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j})(A_j + A_{j+1}) - 0.25(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j})(B_j + B_{j+1}) \\ & - (u_{i,j+1} - u_{i,j})(c_j + c_{j+1}) \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

$$A_m = p_{i,m}(p_{i-1,m} + 2p_{i,m} - p_{i+1,m}) \quad m = j, j+1 \quad (4.3.15)$$

$$B_m = p_{i,m}(p_{i+1,m} + 2p_{i,m} - p_{i-1,m}) \quad m = j, j+1 \quad (4.3.16)$$

$$\begin{aligned} C_m = & [5p_{i,m}^2 + 0.25\{p_{i+1,m}(p_{i+1,m} - 2p_{i,m}) + 2(2p_{i,m}^2 - p_{i+1,m}p_{i-1,m}) \\ & + p_{i-1,m}(p_{i-1,m} - 2p_{i,m})\}], \quad m = j, j+1 \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

となる。この級数展開による方法は、単に 4.2 でのべられた思想を別の常微分方程式の解法を用いて例として述べたものである。

次に 2 次元の問題、たとえば、偏微分方程式

$$p(x, y, t)u_{xx} + q(x, y, t)u_{yy} = u_t \quad (4.3.18)$$

にこの思想を適用すれば、その近似差分方程式

$$p(x, y, t)u_{xx} = P(x, y, t) \quad (4.3.19)$$

$$P(x, y, t) + q(x, y, t)u_{yy} = R(x, y, t) \quad (4.3.20)$$

$$u_t = R(x, y, t) \quad (4.3.21)$$

と分解し、3 つの常微分方程式の一般解を求めて構成する。

非線型の問題に関しては、たとえば

$$5u^4 u_{xx} = u_t \quad (4.3.22)$$

に対しては $5u^4$ を係数関数のごとく考えれば、そのあとは同様に扱かえる。ただし、非線型の場合、このようにして構成された近似差分方程式の解が、元の方程式の解に格子点間かくを 0 に収束させたとき、収束するかどうかはまた別の問題である。

5. 結 言

1. 変数係数の差分方程式を構成するにあたり、新たに開発された方法は定数係数の場合にももちろん適用できる。この場合は、一般解は論文でのべたように、近似的にではなく厳密解が求まる。
2. 新たな差分方程式の構成法の優れた点は、従来の方法に比べてより高精度の差分方程式が求まること、従来の方法により構成された差分方程式もこの方法により構成できることがあるが、欠点は、常微分方程式の近似解を求める時の方法によっては近似式が複雑になることであり、したがって、常微分方程式の近似一般解を決定する最良の方法を決定することが残された課題である。
3. 誤差の伝播、iteration formula の収束性に関する判別式は Banach 空間の norm の定義により異なった形式をとるが、差分方程式から生ずる行列の型が特殊なもので、比較的簡単に固有値が求まるので、この場合は固有値を用いる方法が良いように思われる。
4. 差分方程式の構成に関して本論文において開発された方法は、他の型の偏微分作用素の近似差分作用素の構成に対してもそのまま適用できる。

6. あとがき

計算にはすべて当研究所データロン 205 計数型電子計算機を使用したもので、計算時間の評

価は絶対的なものではない。

計算時間はまた、プログラムの巧拙にも依存するし、特に変数係数の場合、第0近似の良否は計算時間に影響するところ大である。

空間方向の格子点間かくを $1/n$ にすれば、 $k=lh^2$ より明らかなように所定の t の値に対する u_j の値を計算するに要する時間は約 n^2 倍かかる。

文 献

- (1) R. Courant, K.O. Friedrichs, H. Lewy: Über die partiellen Differential gleichungen der Mathematischen physik. Math annalen Bd 100 32-74.
- (2) L. Collatz: Numerical treatment of differential equation, Springer.
- (3) R. D. Richtmyer: Difference method for in itial value problem, Interscience.
- (4) J. Albrecht: Zum differenzenverfahren bei parabolischen differential-gleichungen ZAMM Bd 37 202-212.
- (5) P. Lassonen: Über eine methode zur Lösung der Wärmeleitungs gleichungen Acta Math Bd 81 309-317.
- (6) J. Crank, P. Nicolson: A practical method for numerical evaluation of solution of patial differential equations of heat-conduction type, Proc Cambridge Philoss Soc, Vol. 43, 50-67.
- (7) A. N. Lowan: The operator approach to the problems of stability and convergence of solutions of difference equations, Scripta Mathematica.
- (8) 加藤, 橋本, 中田, 藤田: 微分方程式の近似解法 II, 岩波講座, 現代応用数学 B. 4.1.

<p>NAL TR-16 航空技術研究所 放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法</p> <p>1961年12月 15頁</p> <p>放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法を定数係数, 変数係数の両者について研究し, 近似差分方程式の解の収束条件, 誤差伝播の安定性の条件を近似差分方程式の係数の作る行列の固有値に基づいて決定し, 従来まで開発されてきた近似差分方程式の中のすぐれたものを選び出した。また, 変数係数の場合には新たな近似差分方程式の構成を開発し, この方法が他の型の偏微分方程式の近似差分方程式の構成に關しても有力である事を示した。計数型電子計算機データロン205による数値計算例を記載した。</p>	<p>I. 樋口一雄 三好甫 II. NAL TR-16 III. 518.6</p>	<p>NAL TR-16 航空技術研究所 放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法</p> <p>1961年12月 15頁</p> <p>放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法を定数係数, 変数係数の両者について研究し, 近似差分方程式の解の収束条件, 誤差伝播の安定性の条件を近似差分方程式の係数の作る行列の固有値に基づいて決定し, 従来まで開発されてきた近似差分方程式の中のすぐれたものを選び出した。また, 変数係数の場合には新たな近似差分方程式の構成を開発し, この方法が他の型の偏微分方程式の近似差分方程式の構成に關しても有力である事を示した。計数型電子計算機データロン205による数値計算例を記載した。</p>	<p>I. 樋口一雄 三好甫 II. NAL TR-16 III. 518.6</p>
<p>NAL TR-16 航空技術研究所 放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法</p> <p>1961年12月 15頁</p> <p>放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法を定数係数, 変数係数の両者について研究し, 近似差分方程式の解の収束条件, 誤差伝播の安定性の条件を近似差分方程式の係数の作る行列の固有値に基づいて決定し, 従来まで開発されてきた近似差分方程式の中のすぐれたものを選び出した。また, 変数係数の場合には新たな近似差分方程式の構成を開発し, この方法が他の型の偏微分方程式の近似差分方程式の構成に關しても有力である事を示した。計数型電子計算機データロン205による数値計算例を記載した。</p>	<p>I. 樋口一雄 三好甫 II. NAL TR-16 III. 518.6</p>	<p>NAL TR-16 航空技術研究所 放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法</p> <p>1961年12月 15頁</p> <p>放物型偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法を定数係数, 変数係数の両者について研究し, 近似差分方程式の解の収束条件, 誤差伝播の安定性の条件を近似差分方程式の係数の作る行列の固有値に基づいて決定し, 従来まで開発されてきた近似差分方程式の中のすぐれたものを選び出した。また, 変数係数の場合には新たな近似差分方程式の構成を開発し, この方法が他の型の偏微分方程式の近似差分方程式の構成に關しても有力である事を示した。計数型電子計算機データロン205による数値計算例を記載した。</p>	<p>I. 樋口一雄 三好甫 II. NAL TR-16 III. 518.6</p>

既 刊 報 告

TR-1	遷音速風洞測定部に関する予備実験 Preliminary Investigation of N. A. L. Transonic Wind-Tunnel Test-Section	1960年2月	平木一, 石井孝雄 大島信彦
TR-2	遷音速風洞用 22.5 MW 主送風機 I. 模型送風機による性能試験 22.5 MW Main Blower for N. A. L. Transonic Wind Tunnel I. Performance Test of the Model Blower	1960年5月	山内正男, 松木正勝 塩入淳平, 富永守之
TR-3	風洞用角度計の試作実験 An Experiment on Angle Measuring Instruments of Airplane Models in Wind Tunnel Test	1960年8月	小橋安次郎, 長洲秀夫 高島一明, 波木井潔
TR-4	回転円板の強度 Strength of Rotating Discs	1960年9月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-5	航空技術研究所 (60 cm×60 cm) 遷音 速フラッタ試験設備の計画と整備試験 Design and Development of N. A. L. 60 cm×60 cm Transonic Blowdown Wind Tunnel for Flutter Testing	1960年12月	中井暎一, 橋爪宏 中村泰治
TR-6	高温歪ゲージの温度特性 Temperature Characteristics of High Temperature Strain Gage	1960年12月	竹中幸彦
TR-7	遷音速風洞の測定部 On the Transonic Test Section	1961年1月	村崎寿満
TR-8	繰返し荷重試験装置の予備試験 Preliminary Study for Development of Repeated Load Testing Rigs for Full-Scale Aircraft Structures	1961年3月	竹内和之, 飯田宗四郎
TR-9	遷音速流小擾乱理論の研究 (I) —非線型補正理論— Studies on the Small Disturbance Theory of Transonic Flow (I) —Non-Linear Correction Theory—	1961年3月	細川 巖
TR-10	喰違い角の大きい減速翼列の研究 Cascade Tests of High Stagger Compressor Blades	1961年3月	松木正勝, 高原北雄 西脇英夫, 森田光男
TR-11	軟鋼円板の回転による降伏 Yielding of Rotating Discs of Mild Steel	1961年4月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-12	薄肉開断面梁の自由振動について On the Natural Vibration of Thin- Walled Beams of Open Cross Section	1961年5月	川井忠彦, 埴 武敏
TR-13	衝撃波と境界層の干渉についての 実験的研究 Experimental Results of the Inter- action between Shock Wave and Turbulent Boundary Layer	1961年7月	須郷道也, 伝田幸雄
TR-14	電磁流体の圧縮性境界層 On Compressible Boundary Layer in Magnetodynamics	1961年7月	須郷道也, 小沢五郎
TR-15	振動翼用圧力ピックアップの試作・較正 Miniature Pressure Pickups for Measuring the Pressure on Oscillating Airfoils in Supersonic Flow	1961年8月	石井孝雄, 柳沢三憲

航空技術研究所報告 16号

昭和36年12月 発行

発 行 所 航空技術研究所
東京都三鷹市新川700
電話武蔵野(0422)(3)5171(代表)

笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町1の53