

UDC 534.12

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-79

引張りまたは圧縮をうける四角弾性平板の
大振幅振動の影響について

田寺木一・古関昌次・泉日出夫

1965年1月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------|
| TR-50 | 境界収縮法による偏微分方程式の境界値問題の数値解法
Numerical Method for Boundary Value Problems of Partial Differential Equations by Boundary Contraction | 1963年9月 | 樋口一雄, 能美 力 |
| TR-51 | 人間の静的不安定系の制御能力
Human Control Ability of the Statically Unstable System | 1963年9月 | 武田 峻 |
| TR-52 | 粒状加熱器の熱特性
Thermal Characteristics of a Pebble-Bed Heater | 1963年9月 | 林 二 識 |
| TR-53 | 円管流の非定常熱伝達 (第I報)
一壁温が時間と流向距離のみによる場合
Thermal Characteristics of the Unsteady Flow through a Circular Pipe whose Temperature depends on Time and Flow-Directional Distance only | 1963年10月 | 林 二 識 |
| TR-54 | 偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法
Difference Method for the Mixed Boundary Value Problems | 1963年10月 | 三好 甫 |
| TR-55 | ボスをもった車盤の回転強度
Rotating Strength of Rotor Which Has a Boss | 1963年11月 | 佐藤和郎, 永井文雄 |
| TR-56 | 亜音速および遷音速における二次元非定常空気力の測定 (第I報)
Measurements of the Unsteady Airloads for Two-Dimensional Flow at Subsonic and Transonic Speed Range (I) | 1963年11月 | 中村泰治, 田辺義一 |
| TR-57T | Measurements of the Aerodynamic Derivatives of a Biconvex-Flat Airfoil in Supersonic Flow at Mach Number 2 to 3 | January 1964 | Takao ISHII
Mitsunori YANAGISAWA |
| TR-58 | 高度 500 フィートないし 10,000 フィートにおける上下突風の測定および解析
Measurements and Analyses of Gust Velocities from 500 to 10,000 Feet Altitude | 1964年1月 | 竹内和之, 小野幸一
山根皓三郎 |
| TR-59 | 磁気テープデータ処理設備とその特性
The Magnetic Tape Data Reduction System and Its Performance | 1964年1月 | 田畑浄治, 中 正 夫
山本芳樹, 三浦雅男 |
| TR-60 | 変厚平板翼の振動について
On the Natural Vibration of Plate-Like Wings of Variable Thickness | 1964年1月 | 塙 武 敏, 越出慎一
戸川隼人, 川井忠彦 |
| TR-61 | 後退角 45°, テーパー比 0.6 の薄い片持翼の遷音速におけるフラッタ特性におよぼすマッハ数の影響の実験的研究
Some Effects of Mach Number on the Transonic Flutter Characteristics of Thin Cantilever Wings Having a Taper Ratio 0.6 and a Sweptback Angle of 45° | 1964年2月 | 中井暎一, 小原 瑛 |
| TR-62 | 超音速における翼端板効果
The Effects of End-plates at Supersonic Speeds | 1964年2月 | 尾形吉和 |
| TR-63 | 非定常流中の円柱に作用する空気力について
Aerodynamic Forces Acting on a Circular Cylinder in Unsteady Flow | 1964年3月 | 小橋安次郎, 遠藤 浩
北村清美 |
| TR-64 | 航空力学における磁わい計器の応用
Some Developments of the Magnetostriction Type Measuring Instruments for the Study of Aircraft Dynamics | 1964年3月 | 幸尾治朗 |
| TR-65 | 非定常境界層の安定に関する実験
An Experimental Investigation of Stability Characteristics of Unsteady Laminar Boundary Layer | 1964年7月 | 小橋安次郎, 恩地 瑛 |
| TR-66 | 変分法による平板翼の撓み, 振動解における自然境界条件の数値的吟味 (片持平板翼の場合)
Numerical Examination on the Fulfilment of Natural Boundary Conditions by the Approximate Solutions for Bending and Vibration of Thin Elastic Plates based on the Rayleigh-Ritz's Procedure (in Case of Cantilevered Wing Plates) | 1964年6月 | 川井忠彦, 塙 武 敏
越出慎一, 戸川隼人
落合 薫 |

引張りまたは圧縮をうける四角弾性平板の 大振幅振動の影響について*

田寺木一**古関昌次**泉日出夫**

Influence of Large Amplitude on Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates under Initial Tension or Compression

By Kiiti TADERA, Masazi KOSEKI
and Hideo IZUMI

Approximate solutions for the nonlinear vibrations of rectangular plates under initial tension or compression in the middle plane of the plates are solved employing the Galerkin's method for the case of hinged and clamped edges, and the influences of the initial stresses on the period of free vibrations are established. Some numerical examples are given in Figs. 2~4, and it is shown that the above effects are considerably large in the case of compression and consequently of heated plates.

1. ま え が き

平板の線型理論は、板のたわみが板厚に比べて小さいことを仮定しているが、最近の航空機やロケットの構造上の問題などで、たわみが板厚に比し小さくないことを考慮しなければならない場合がある。

平板の大振幅振動については、最近理論的な面^{1)~5)}ならびに実験的な面^{6)~9)}から多くの研究がなされている。ここでは初期的に引張りまたは圧縮荷重を面内にうける四角板の大振幅振動について、Herrmanの理論の第一次近似に対応する運動方程式を用いて、八巻氏³⁾と同じ方法で近似解を得、初期引張りまたは圧縮の面内応力が大振幅振動に与える影響について考察した。

2. 基礎方程式と境界条件

縦振動による慣性力と、回転慣性の影響を無視しうると仮定すると、平板の非線型振動の方程式は Herrmann^{1),2)} により

* 昭和39年12月22日受付

** 機体第一部

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D \nabla^4 w - h \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P \cos \omega t \quad (2)$$

ここに

x, y : 図1のごとく, 板の中央面にとった座標。

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

w : 板のたわみ

h : 板の厚さ

D : 板の曲げ剛性

E : ヤング率

ρ : 板の密度

$P \cos \omega t$: 加振圧

F : 応力関数

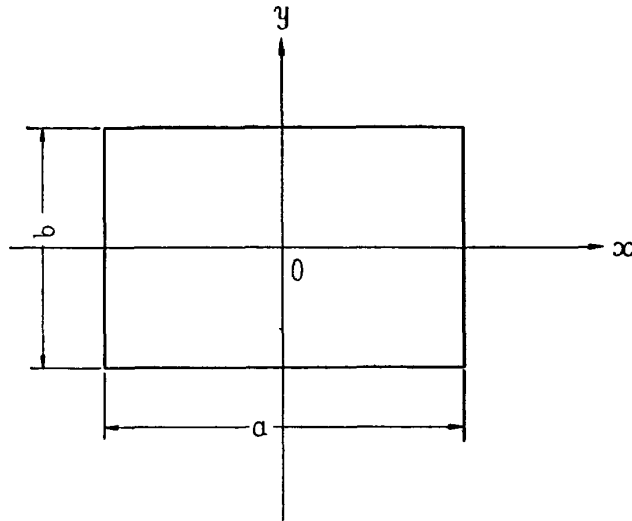


図 1

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を平板の膜応力とすると,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y, \quad -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \tau_{xy} \quad (3)$$

したがって, 板の中央面の変位成分を u, v , ポアソン比を ν とすると,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] \\ -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

境界条件は次の二つの場合について考える。

[A] の場合 (周辺単純支持で引張りまたは圧縮をうける)

$$\left. \begin{aligned} x = \pm \frac{a}{2} \text{ で, } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ u = \pm u_0, \quad v = \frac{2}{b} v_0 y \\ y = \pm \frac{b}{2} \text{ で, } w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ u = \pm \frac{2}{a} u_0 x, \quad v = \pm v_0 \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot A)$$

[B] の場合 (周辺固定で引張りまたは圧縮をうける)

$$\left. \begin{aligned} x = \pm \frac{a}{2} \text{ で, } w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad u = \pm u_0, \\ v = \frac{2}{b} v_0 y \\ y = \pm \frac{b}{2} \text{ で, } w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad u = \frac{2}{a} u_0 x, \\ v = \pm v_0 \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot B)$$

ただし u_0, v_0 は初期膜応力 σ_{0x}, σ_{0y} による初期変位とする。ただし σ_{0x}, σ_{0y} によって座屈が起こった場合については以下で考察しない。境界条件は (5・A), (5・B) で w, u および v で与えたが, (1), (2) を解くさいには w, F についての境界条件を考える必要があるので, u, v を w, F で表わす。たわみの対称性から (4) より

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_0^x \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ v &= \int_0^y \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

3. 解 法

近似解を得るために, w に関する境界条件をみたすように, 次のごとく選ぶ。

$$\left. \begin{aligned} \text{[A] の場合, } w &= \alpha h z(t) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ \text{[B] の場合, } w &= \alpha h z(t) \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$z(t)$ は時間 t の周期関数で, 最大のたわみを w_{\max} として, $\alpha = w_{\max}/h$ とおいた。 $z(t) \leq 1$ 。
 F を周期的に変動する項と, 初期歪をうけた状態に対応する項とに分けて,

$$F(x, y, t) = F_0(x, y) + F_1(x, y, t) \quad (8)$$

とおくと,

$$F_0(x, y) = \frac{1}{2}\sigma_{0x}y^2 + \frac{1}{2}\sigma_{0y}x^2 \quad (9)$$

となる。(7) を (1) に代入すると,

$$\nabla^4 F_1 = \left(\frac{\pi^4 \alpha^2 h^2 E}{a^2 b^2} \right) z^2(t) \sum_m \sum_n a_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} \quad (10)$$

a_{mn} は定数係数で容易に求められる。したがって F_1 は

$$F_1(x, y, t) = z^2(t) \cdot f(x, y) \quad (11)$$

とおくことができる。 $z^2(t) \cdot f(x, y)$ は, $z^2(t) \cdot f_0(x, y)$, $z^2(t) \cdot f_1(x, y)$ をそれぞれ (10) の余関数および特解とすると,

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= f_0(x, y) + f_1(x, y) \\ f_1(x, y) &= \alpha^2 h^2 \sum_m \sum_n b_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし, $b_{mn} = \frac{\beta^2 a_{mn}}{16(m^2 + n^2 \beta^2)^2}$, $\beta = \frac{a}{b}$

b_{mn} は次の値となる。

[A] の場合, $b_{10} = -\beta^2/32$, $b_{01} = -1/32\beta^2$, 他の $b_{mn} = 0$

[B] の場合, $b_{10} = -\beta^2/32$, $b_{01} = -1/32\beta^2$, $b_{11} = -\beta^2/\{16(1+\beta^2)^2\}$, $b_{20} = -\beta^2/512$,

$b_{21} = -\beta^2/\{32(4+\beta^2)^2\}$, $b_{12} = -\beta^2/\{32(1+4\beta^2)^2\}$, $b_{02} = -1/512\beta^2$

f_0 に関しては,

$$\nabla^4 f_0 = 0 \quad (13)$$

f_0 は x, y に関して偶関数であることを考えて¹⁰⁾,

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2}P_x y^2 + \frac{1}{2}P_y x^2 + Eh^2 \alpha^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos h \frac{2n\pi y}{a} + B_n y \sin h \frac{2n\pi y}{a} \right\} \cos \frac{2n\pi x}{a} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \cos h \frac{2n\pi x}{b} + D_n x \sin h \frac{2n\pi x}{b} \right\} \cos \frac{2n\pi y}{b} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$P_x, P_y, A_n, B_n, C_n, D_n$ は未定の定数で u, v の境界条件より定まる。いま

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{2z^2(t)} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 &= \left(\frac{\pi^2 \alpha^2 h^2}{2a^2} \right) \sum_m \sum_n c_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} \\ \left(\frac{1}{2z^2(t)} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 &= \left(\frac{\pi^2 \alpha^2 h^2}{2a^2} \right) \sum_m \sum_n b_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{b} \cos \frac{2n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

とおくと, [A], [B] の場合に対して,

[A] の場合

$$c_{00} = \frac{1}{4}, \quad c_{10} = -\frac{1}{4}, \quad c_{01} = \frac{1}{4}, \quad c_{11} = -\frac{1}{4}$$

$$d_{00} = \frac{1}{4}, \quad d_{10} = \frac{1}{4}, \quad d_{01} = -\frac{1}{4}, \quad d_{11} = -\frac{1}{4}$$

[B] の場合

$$c_{00} = \frac{3}{16}, \quad c_{01} = \frac{1}{4}, \quad c_{20} = -\frac{3}{16}, \quad c_{02} = \frac{1}{16}, \quad c_{21} = -\frac{1}{4}, \quad c_{22} = -\frac{1}{16}$$

$$d_{00} = \frac{3}{16}, \quad d_{10} = \frac{1}{4}, \quad d_{20} = \frac{1}{16}, \quad d_{02} = -\frac{3}{16}, \quad d_{12} = -\frac{1}{4}, \quad d_{22} = -\frac{1}{16}$$

(7), (12), (14) を (6), に代入して, (5) の u, v に関する境界条件より, (14) の未定の定数は, けっきょく次の連立一次方程式から決定できる。

$$\left. \begin{aligned} P_x - \nu P_y &= \left(\frac{\pi^2 \alpha^2 h^2 E}{2 a^2} \right) c_{00}, \\ P_y - \nu P_x &= \left(\frac{\pi^2 \beta^2 \alpha^2 h^2 E}{2 a^2} \right) d_{00}, \\ A_n &= \left\{ \frac{1-\nu}{2n\pi(1+\nu)} - \frac{1}{2\beta} \cot h \frac{n\pi}{\beta} \right\} a B_n, \\ C_n &= \left\{ \frac{1-\nu}{2n\pi\beta(1+\nu)} - \frac{1}{2} \cot hn\pi\beta \right\} a D_n, \\ \left\{ (3-\nu) \cos h \frac{m\pi}{\beta} - (1+\nu) \frac{m\pi}{\beta} \operatorname{cosec} h \frac{m\pi}{\beta} \right\} a B_m \\ &- \frac{4\beta^2 m(1+\nu)}{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} n^2 \sin hn\pi\beta}{(n^2\beta^2 + m^2)^2} a D_n \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{2\pi}{m} (i^2\beta^2 - \nu m^2) b_{mi} \\ \frac{4n(1+\nu)}{\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} m^2 \beta^2 \sin h \frac{m\pi}{\beta}}{(m^2 + n^2\beta^2)^2} a B_m \right\} \\ &- \{ (3-\nu) \cos hn\pi\beta - (1+\nu) n\pi\beta \operatorname{cosec} hn\pi\beta \} a D_n \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{2\pi}{n\beta} (\nu n^2\beta^2 - m^2) b_{in} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

このようにして決定した F と w は (1) を満たすが (2) は満たされないので, Galerkin の方法により, $z(t)$ を求める。

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[DV^4 w - h \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \cos \omega t \right] w dx dy = 0 \quad (17)$$

けっきょく (17) より, $z(t)$ に関して次の非線型微分方程式を得る。

[A] の場合

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left\{ \frac{\pi^4 (1 + \beta^2) D}{\rho h a^4} + \frac{\pi^2 (\sigma_{0x} + \beta^2 \sigma_{0y})}{\rho a^2} \right\} z + \left\{ \frac{\pi^2 (P_x + \beta^2 P_y)}{\rho a^2} - \frac{2 \pi^4 \beta^2 E \alpha^2 h^2}{\rho a^4} (b_{01} + b'_{01} + b_{10} + b'_{10}) \right\} z^3 = \frac{16 P}{\pi^2 h^2 \alpha \rho} \cos \omega t \quad (18)$$

[B] の場合

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left\{ \frac{16 \pi^4}{9 \rho h a^4} (3 + 2 \beta^2 + 3 \beta^4) D + \frac{4 \pi^2}{3 \rho a^2} (\sigma_{0x} + \beta^2 \sigma_{0y}) \right\} z + \left\{ \frac{4 \pi^2}{3 \rho a^2} (P_x + \beta^2 P_y) \right. \\ \left. - \frac{32 \pi^4 \beta^2 E \alpha^2 h^2}{9 \rho a^4} \{ b_{01} + b'_{01} + b_{10} + b'_{10} + b_{11} + b'_{11} + b_{02} + b'_{02} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (b_{12} + b'_{12} + b_{21} + b'_{21}) \right\} z^3 = \frac{16 P}{9 \alpha \rho h^2} \cos \omega t \quad (19)$$

ただし, b'_{mn} は f_0 を次の二重フーリエ級数で表わしたときの係数である。

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2} P_x y^2 + \frac{1}{2} P_y x^2 + a^2 h^2 E \sum_m \sum_n b'_{mn} \cos \frac{2 m \pi x}{a} \cos \frac{2 n \pi y}{b} \\ b'_{0n} &= \frac{\sin h n \pi \beta}{n \pi \beta} C_n + \left(\frac{\cos h n \pi \beta}{2 n \pi \beta} - \frac{\sin h n \pi \beta}{2 n^2 \pi^2 \beta^2} \right) a D_n \\ b'_{m0} &= \frac{\beta \sin h \frac{m \pi}{\beta}}{m \pi} A_m + \left(\frac{\cos h \frac{m \pi}{\beta}}{2 m \pi} - \frac{\beta \sin h \frac{m \pi}{\beta}}{2 m^2 \pi^2} \right) a B_m \\ b'_{mn} &= \frac{2(-1)^n m \beta \sin h \frac{m \pi}{\beta}}{\pi(m^2 + n^2 \beta^2)} A_m + \frac{(-1)^m}{\pi(m^2 + n^2 \beta^2)} \left\{ m \cos h \frac{m \pi}{\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n^2 \beta^3 - m^2 \beta}{\pi(m^2 + n^2 \beta^2)} \sin h \frac{m \pi}{\beta} \right\} a B_m + \frac{2(-1)^m n \beta \sin h n \pi \beta}{\pi(m^2 + n^2 \beta^2)} C_n \\ &\quad + \frac{(-1)^m}{\pi(m^2 + n^2 \beta^2)} \left\{ n \beta \cos h n \pi \beta + \frac{m^2 - n^2 \beta^2}{\pi(m^2 + n^2 \beta^2)} \sin h n \pi \beta \right\} a D_n \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$m \neq 0, n \neq 0$

Chu & Herrmann²⁾ および八巻氏³⁾は, 初期面内荷重のない場合の z に関する近似式を得ているが, これらの結果と (18), (19) 式を比べると, σ_{0x} , σ_{0y} の影響は z の項に [A] の場合, $(\pi^2(\sigma_{0x} + \beta^2 \sigma_{0y})/\rho a^2)z$, [B] の場合 $(4 \pi^2(\sigma_{0x} + \beta^2 \sigma_{0y})/3 \rho a^2)z$ が加わる。 z^3 の項の中に b'_{mn} を

含んでいるが、後に述べる計算結果から一般に $|b'_{mn}| \leq (|b_{mn}|/10)$ で、 σ_{0x} , σ_{0y} のない場合、Chu & Herrmann および八巻氏とほとんど同一の運動方程式となる。

4. 数 値 解

A_n , aB_n , C_n , aD_n を計算するさい、たわみを (6) 式のごとく簡単な仮定によったから、応力関数のうち、二重フーリエ級数の係数 b'_{mn} は m または n が大きくなると、非常に小さくなると考えられるので、 A_n , aB_n , C_n , aD_n も n が大となると無視しうるとして、 $n=1$ から 6 までとって計算した。(18), (19) で $P=0$ とおくと、自由振動の場合となり、(18), (19) は簡単に、次式で表わされる。

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma^2 z + \mu^2 z^3 = 0 \quad (21)$$

ここで γ , μ は時間に無関係の値で、この微分方程式の解は、Jacobi の cn 関数で表わされる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} z(t) &= cn(\omega' t, k) \\ \text{ただし、} \quad \omega' &= (\gamma^2 + \mu^2)^{1/2} \\ k &= \left\{ \frac{\mu^2}{2(\gamma^2 + \mu^2)} \right\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

したがって、非線型振動の周期 T は、 $K(k)$ を第 1 種完全楕円積分とすると、

$$T = 4K(k)/\omega' \quad (23)$$

となる。微小たわみ振動のときは、 $\alpha \rightarrow 0$ で、(18), (19) より z^3 の係数 $\mu^2 \rightarrow 0$ となり線型となる。線型振動の周期 T_0 は、

$$T_0 \equiv T(\alpha \rightarrow 0) = 2\pi/\gamma \quad (24)$$

したがって、線型振動周期に対する非線型振動周期の比 T/T_0 を求めると、

$$T/T_0 = 2\gamma K(k)/(\pi\omega') \quad (25)$$

図 2, 図 3 に T/T_0 を $\nu=0.3$ を用いて、板の縦横比 β を変え、振幅 α に対して圧縮および引張り荷重に対する大振幅振動の影響を図示した。(18), (19) より [A], [B] の場合、それぞれ $\sigma_{0x} + \beta^2 \sigma_{0y}$ が $-\pi^2 D/ha^2(1+\beta^2)^2$, $-4\pi^2 D/3ha^2(3+2\beta^2+3\beta^4)$ に等しいとき w に対して仮定したたわみ波形に対応する座屈時の応力を与える。そこで初期引張り、または圧縮荷重に対する大振幅振動の影響は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \text{[A] の場合、} \quad R &= (\sigma_{0x} + \beta^2 \sigma_{0y}) / \left\{ \frac{\pi^2 D}{ha^2} (1 + \beta^2)^2 \right\} \\ \text{[B] の場合、} \quad R &= (\sigma_{0x} + \beta^2 \sigma_{0y}) / \left\{ \frac{4\pi^2 D}{3ha^2} (3 + 2\beta^2 + 3\beta^4) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

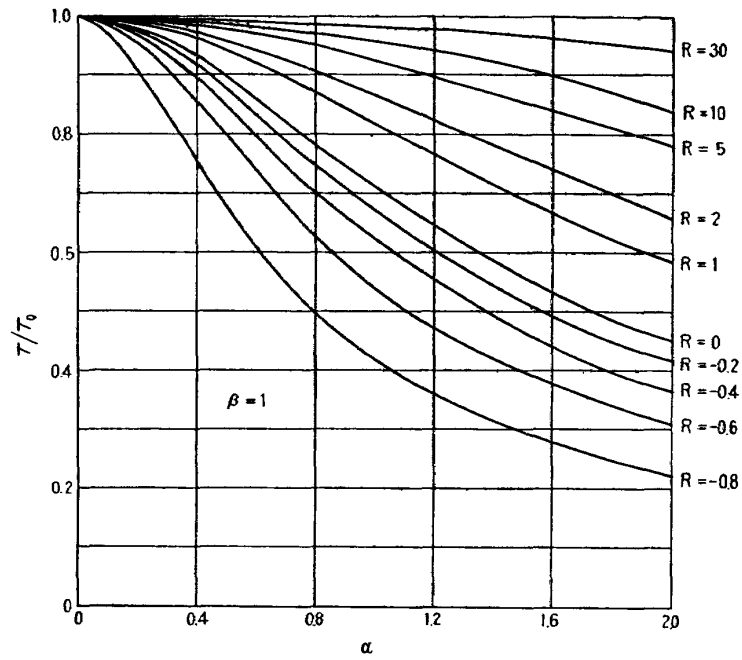


図 2.1 単純支持正方形板の振動周期に対する振幅ならびに引張りまたは圧縮の影響 $\nu=0.3$

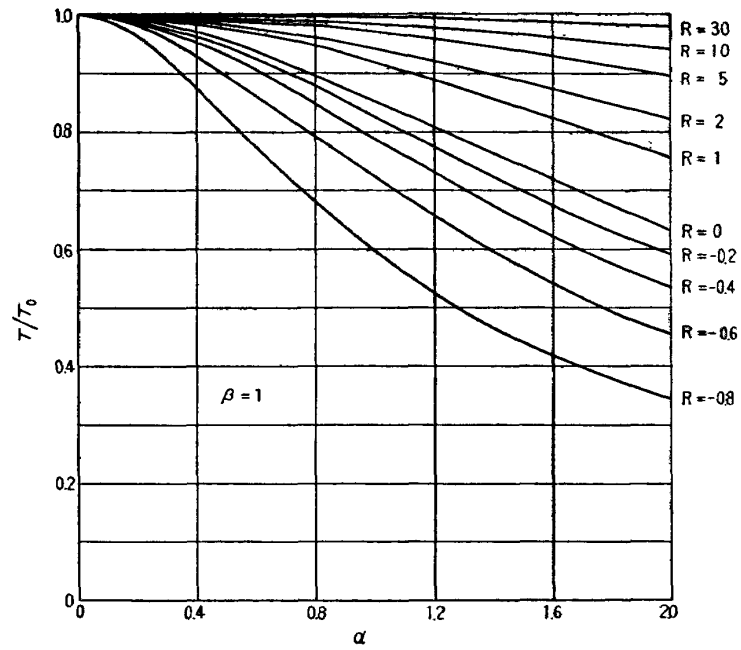


図 2.2 周辺固定正方形板の振動周期に対する振幅ならびに引張りまたは圧縮の影響 $\nu=0.3$

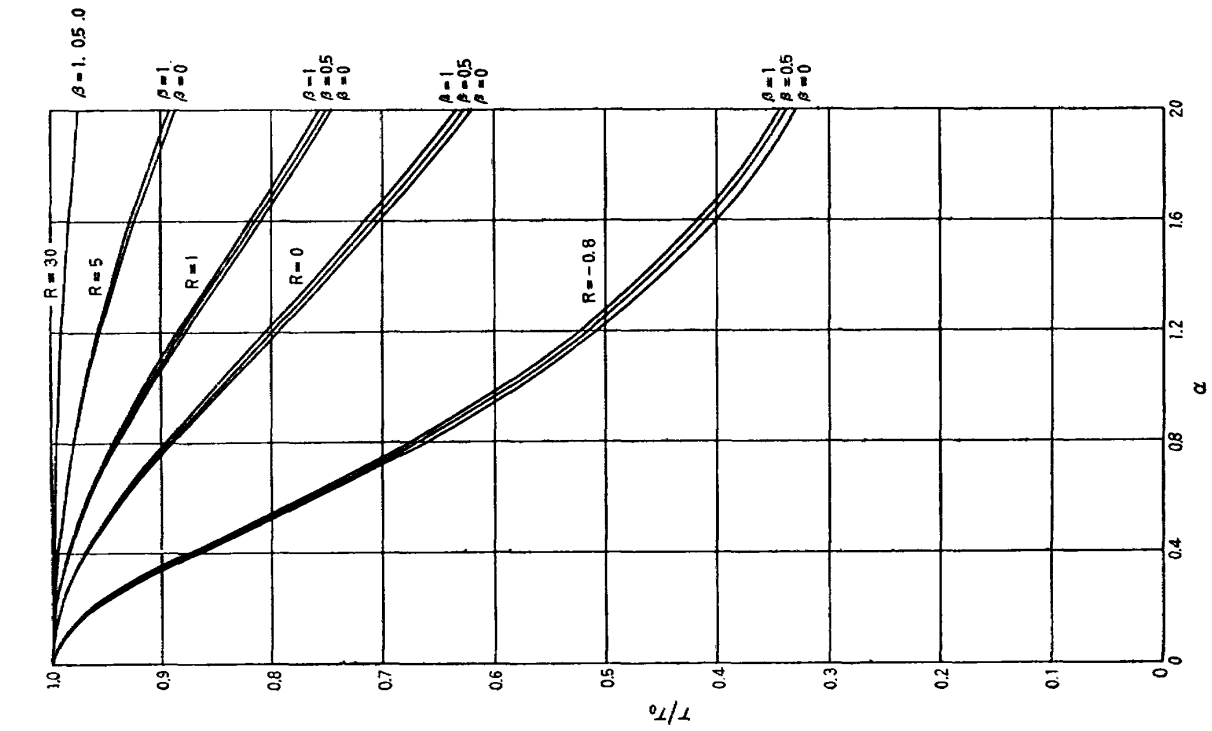


図 3.2 周辺固定四角板の振動周期に対する
縦横比 β の影響 $\nu=0.3$

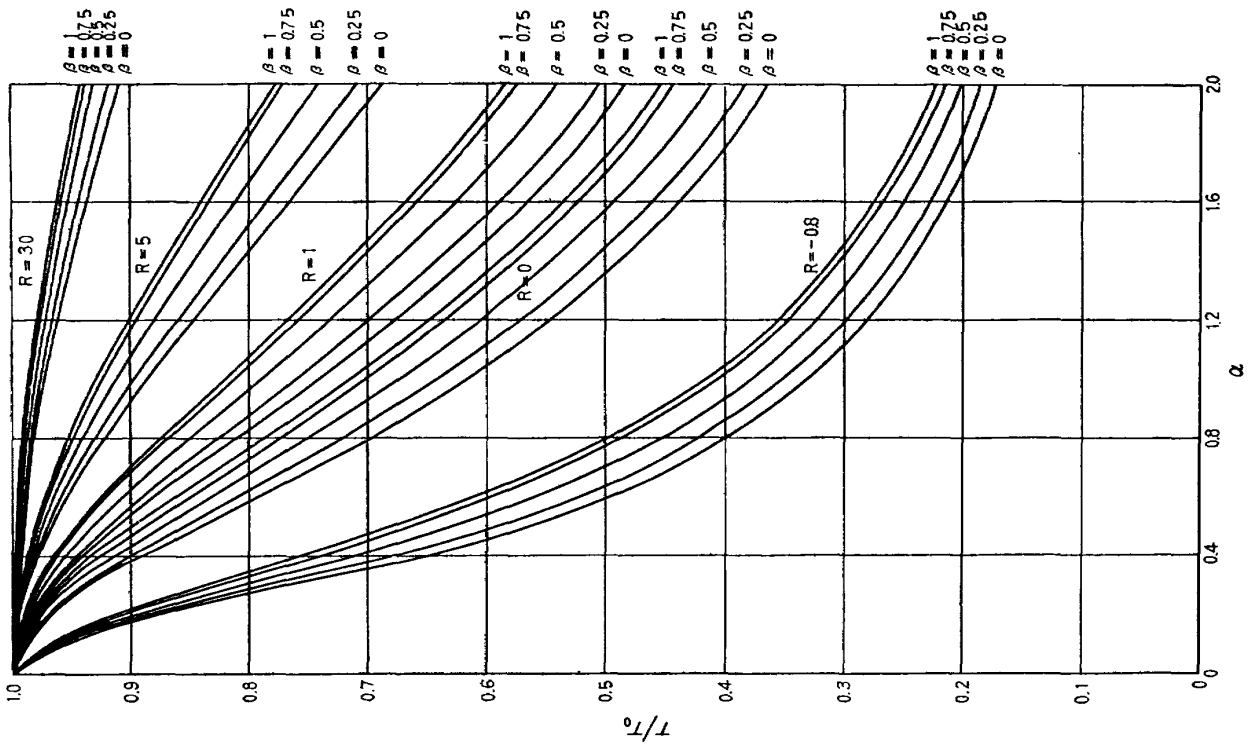


図 3.1 単純支持四角板の振動周期に対する
縦横比 β の影響 $\nu=0.3$

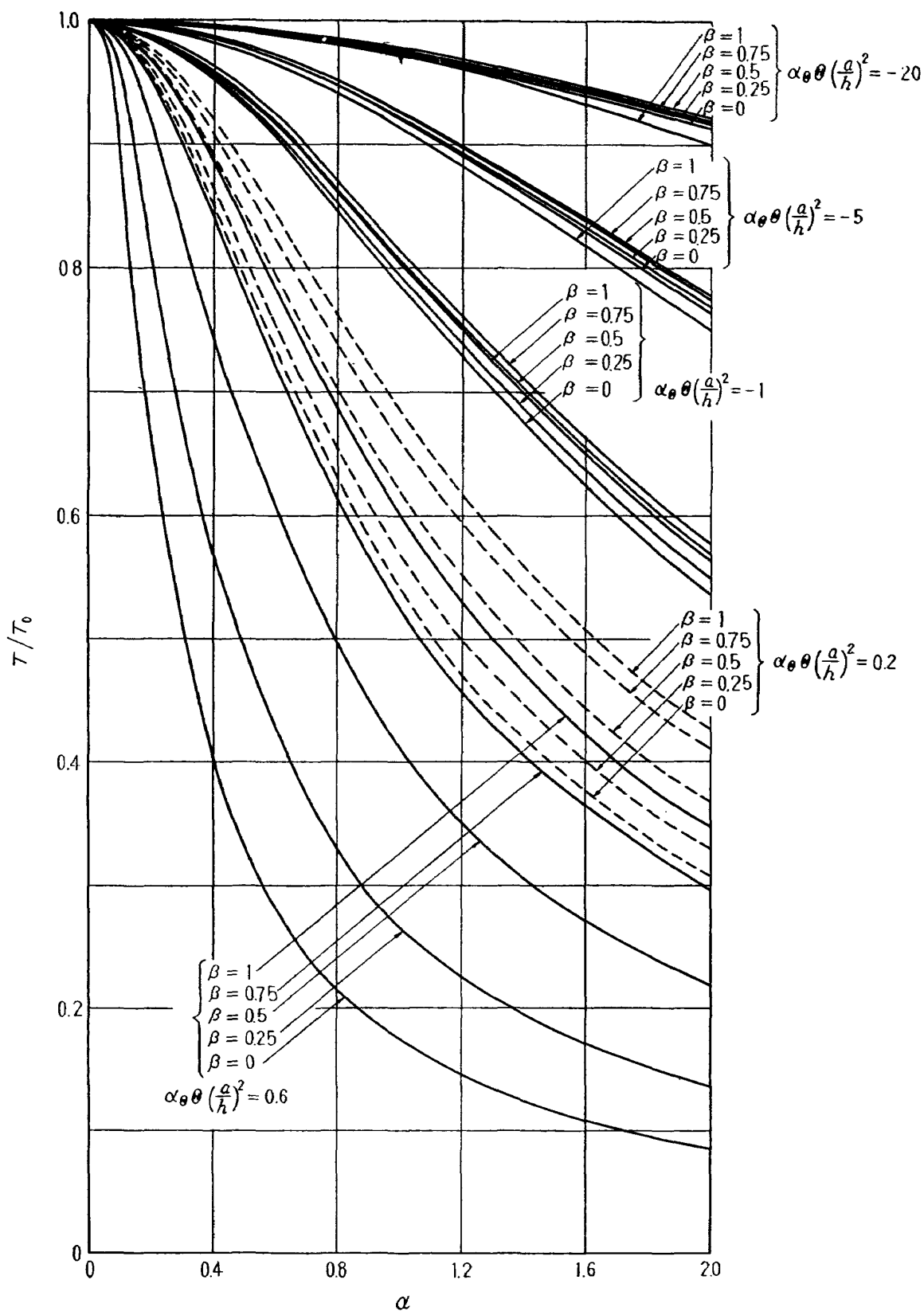


図 4.1 加熱または冷却の大振幅振動に及ぼす影響 (周辺単純支持)

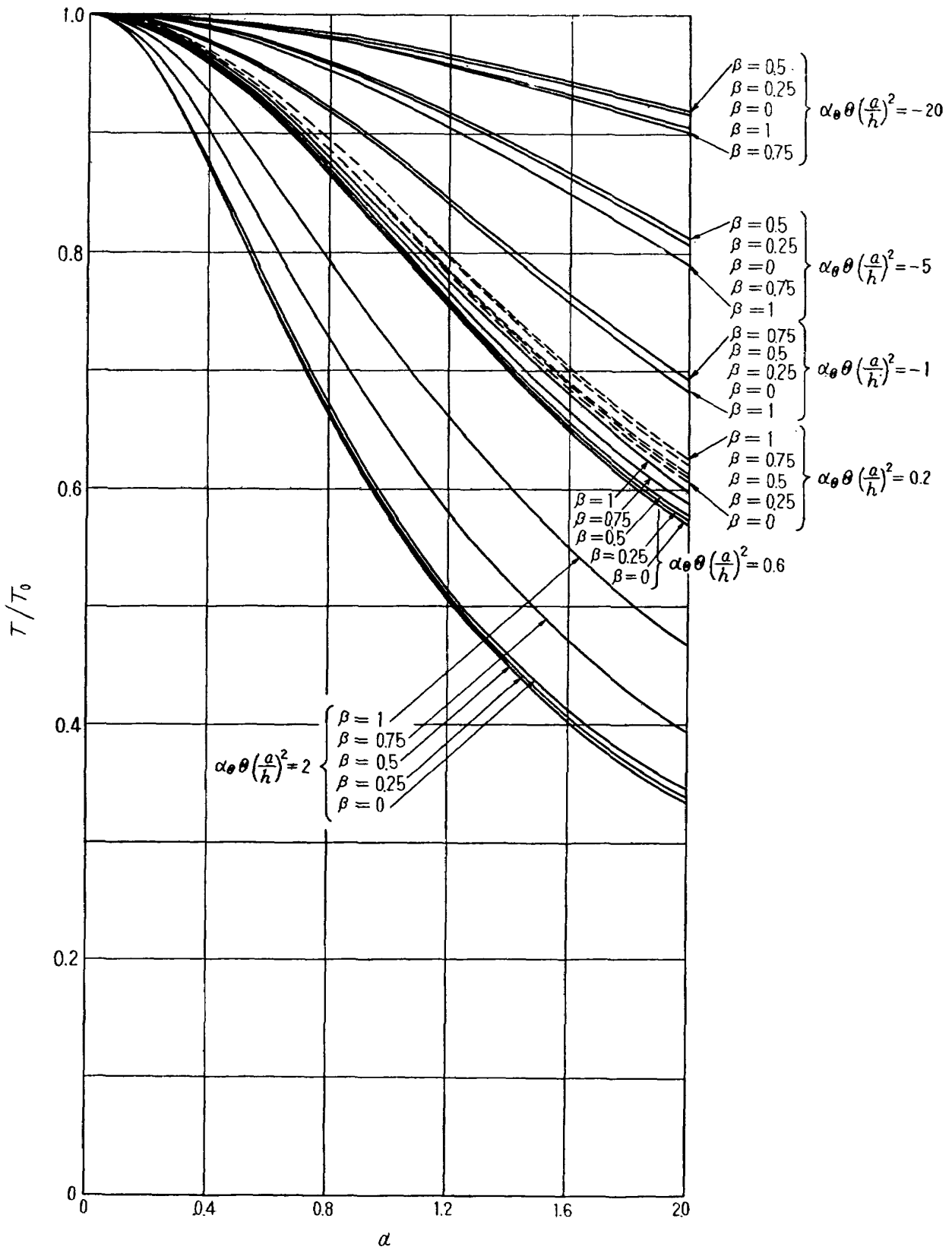


図 4.2 加熱または冷却の大振幅振動に及ぼす影響 (周辺固定)

をパラメーターにとった。図からわかるように、初期引張りまたは圧縮によって、 T/T_0 は著しく影響をうけ、周辺支持および固定のいずれの場合も、hard spring の様相を示す。図 3 は正方形板について初期引張りまたは圧縮の影響を、図 3 は縦横比 β に関する振動特性の影響を示した。特に圧縮の影響が大きい。また一様に加熱または冷却された板の場合には、板の温度上昇を $\theta^\circ\text{C}$ とし、 $\alpha\theta$ を線膨脹係数として、

$$\sigma_{0x} = \sigma_{0y} = -\alpha\theta E\theta / (1-\nu)$$

を用いると、上の結果はそのまま適用できる。このさい (26) より $\alpha\theta\theta(a^2/h^2)$ なる無次元パラメーターをとり、加熱または冷却による、大振幅振動の温度による影響が考察される*。図 4 より加熱による振動特性への影響の大きいことがわかる。

正弦加振圧による、強制振動の場合 (18), (19) は簡単に

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma^2 z + \mu^2 z^3 = P_0 \cos \omega t$$

となり、これは Duffing の式で応答曲線は、自由振動に対する曲線に漸近する³⁾。ただ図 5 のごと

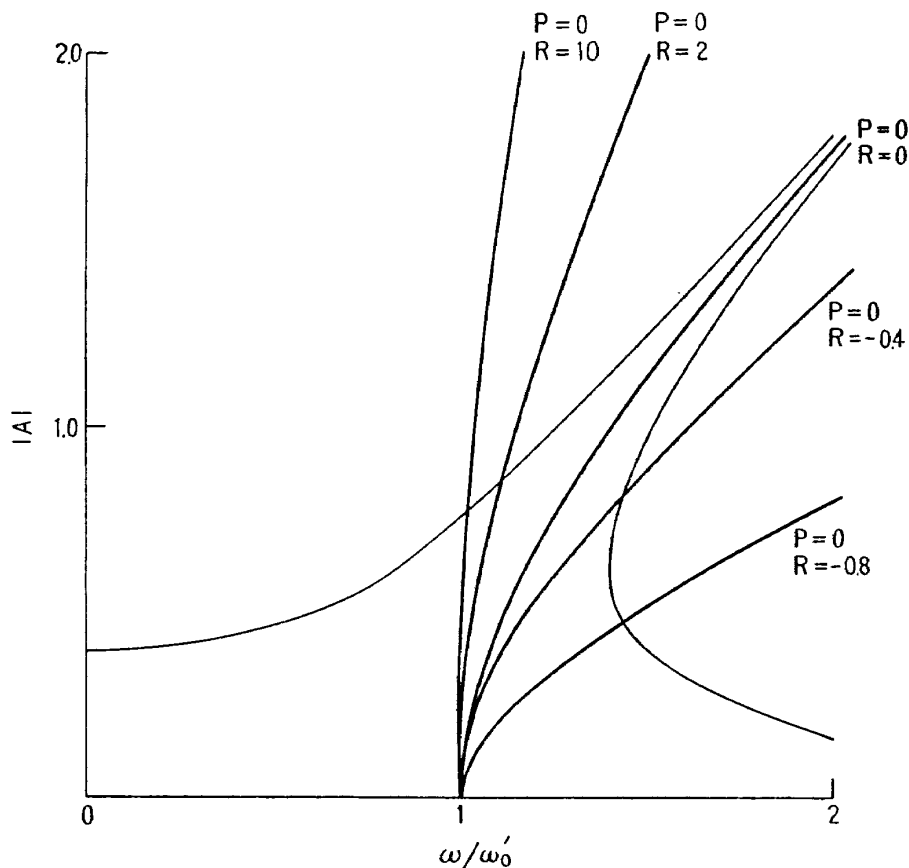


図 5 単純支持正方形板の応答線図 $|A|$ は振幅

* 最近、砂川氏は長方形平板の自由振動特性に及ぼす温度化および振幅の影響について一般的に論じている(機械学会論文集 30 巻 212 号昭和 39)が、この報告と同様に T/T_0 が振幅とともに著しく減少することを示している。

く、自由振動に対する応答曲線が初期応力によって異なる。図5の太い実線は $P=0(P_0=0)$ に対する応答曲線で、細い実線は $R=0$ に対する応答曲線群中の1例の傾向を示した。

む す び

この報告では、初期引張りまたは圧縮をうける四角板の大振幅振動特性に及ぼす影響を、近似解を求めて理論的に考察した。

1. 初期引張りまたは圧縮によって、四角板の有限振幅振動特性に大きな影響を与えることがわかった。

2. $\sigma_{0x} + \beta^2 \sigma_{0y}$ が負のとき特にその影響は著しく、振幅と共に自由振動数は著しく減少する。 $\sigma_{0x} + \beta^2 \sigma_{0y}$ が正のときは線型振動特性からのずれは小さくなる。

3. したがって2. より、加熱された板の有限振幅振動特性に与える影響が著しい。

以上最も重要な最低次の波形についてのみ検討したが、高次の波形についても同様にして解くことができる。

終わりにご助言をいただいた東北大学高速力学研究所八巻昇教授にお礼申し上げる。

文 献

- 1) G. Herrmann; Influence of Large Amplitudes on Flexural Motions of Elastic Plates, NACA TN 3578 (1955)
- 2) H. N. Chu & G. Herrmann; Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates, J. Appl. Mech. 23 (1956)
- 3) N. Yamaki; Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates, ZAMM, 41 (1961)
- 4) J. L. Nowinski; Nonlinear Transverse Vibrations of Circular Plates Built-in at the Boundary, Proc. of the fourth U. S. National Congress of appl. mechanics, ASME (1962)
- 5) J. L. Nowinski; Nonlinear Transverse Vibrations of a Spinning Disk, Trans. ASME, Ser. E. No. 1 (1964)
- 6) L. W. Lassiter & R. W. Hess; Calculated and Measured Stresses in Simple Panels Subjected to Intense Random Acoustic Loading Including the Near Noise Field of a Turbojet Engine, NACA Report 1367 (1957)
- 7) S. A. Tobias, Nonlinear Forced Vibrations of Circular Disks, Engineering, 186 (1958)
- 8) E. J. Kirchman & J. E. Greenspon, Nonlinear Response of Aircraft Panels in Acoustic Noise, J. Acoust. Soc. Am. 29 (1957)
- 9) P. W. Smith, C. I. Malme, and C. M. Gogos; Nonlinear Response of a Simple Panel, J. Acoust. Soc. Am. 33 (1961)
- 10) N. Yamaki; Stress Distribution in a Rectangular Plate under a Pair of Concentrated forces, The Reports of the Institute of High Speed Mechanics, Tohoku Univ. 8 (1957)

TR-67	プラズマ発生装置の諸特性 Characteristics of a Vortex Stabilized Plasma Generator	1964年4月	井上建二, 野村茂昭
TR-68	回転翼の線型理論 (I) Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (I)	1964年6月	市川輝雄
TR-69	高速軸流タービンの研究 (I) An Investigation of the High Speed Axial Flow Turbine (I)	1964年7月	鳥崎忠雄, 能瀬弘幸 森田光男
TR-70	汎用飛行シミュレータ設備の計画, 構造および特性 Design, Construction and Characteristics of Flight Simulator at National Aerospace Laboratory	1965年1月	松浦陽恵, 樋口一雄 池谷光栄, 堀川勇壮 村上力, 百名盛之典 三好範子, 岡部正典
TR-71	塑性の三方向せん断理論 塑性変形による異方性 塑性流動に及ぼす中間主応力の影響 応力状態と塑性変形の形 Three-Shear Theory of Plasticity Anisotropy Due to Plastic Deformation Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation	1964年7月	中西不二夫, 佐藤和郎
TR-71T	Three-Shear Theory of Plasticity Anisotropy Due to Plastic Deformation Influence of Intermediate Principal Stress on Plastic Flow Strain Ratio Relationship in Plastic Deformation Internal Shearing Resistances in the Three Shear Theory of Plasticity	September 1964	Fujio NAKANISHI Yasuo SATO
TR-72	補助翼バズに関する一実験 Some Experiments on Control-Surface Buzz	1965年1月	中村泰治, 田辺義一
TR-72T	Some Experiments on Control-Surface Buzz	November 1964	Yasuharu NAKAMURA Yoshikazu TANABE
TR-73	軸対称渦み点付近の溶融層の安定性 Stability of the Melted Layer near the Axi- symmetric Stagnation Point	1964年11月	相原康彦
TR-74	遷音速パネルフラッタの研究 The Experimental and Theoretical Studies of Transonic Panel Flutter	1964年11月	石井孝雄, 柳沢三憲
TR-75	統計流体力学の初期値問題について On the Initial-Value Problem in Statistical Hydromechanics	1964年12月	細川 巖
TR-76	高速軸流圧縮機の研究 (IV) An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor (IV)	1965年1月	大山耕一, 松木正勝 西脇英夫, 岩部柱相 片山泰治
TR-77	Galerkin 法の収束性について On the Convergence of Galerkin's Method	1965年1月	鳥海良三
TR-78	二次元準線型双曲系の特性曲線法による数値解法 Characteristic Method for the Numerical Solution of Two-Dimensional Quasi-linear Hyperbolic Systems	1965年1月	三好 甫

航空宇宙技術研究所報告79号

昭和40年1月発行

発行所	航空宇宙技術研究所 東京都調布市深大寺町1,880 電話武蔵野(0422)(4)9171(代表)
印刷所	笠井出版印刷社 東京都港区芝南佐久間町1の53
