

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-102

ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (II)

—迎角のあるとき—

谷 喬

1966 年 3 月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-80 変分法直接解法において解に及ぼす束縛の数値的影響  
—薄肉開断面片持梁の純振り振動の例—  
Numerical Effect of Constraints in Calculus of the Direct Variational Method  
—in Case of Pure Torsional Vibration of Thin Walled Beams of Open Cross Section— 1965年1月 塙 武敏, 越出慎一
- TR-81 FRP コーティングの断熱特性  
Thermal Insulation Characteristics of FRP Coating 1965年1月 竹中幸彦, 江川幸一  
小川 敏一
- TR-82 多段軸流圧縮機の部分負荷特性の簡易計算法  
A Simple Method of Calculating the Off-Design Performance of Multi-Stage Axial-Flow Compressor 1965年2月 松木正勝, 藤井昭一
- TR-83 亜音速流中のパネルフラッターとダイバージェンス (I)  
—非圧縮流理論—  
Theoretical Study of Two-Dimensional Panel Flutter and Panel Divergence in Subsonic Flow (I)  
—Incompressible Flow Case— 1965年2月 石井孝雄
- TR-84 遷音速タービン翼列二次元試験 (II)  
Experimental Investigation on Transonic Turbine Cascades (II) 1965年3月 近藤 博, 義田光弘  
山崎紀雄
- TR-85 回転翼の線型理論 (II)  
—揚力線理論—  
Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (II)  
—Lifting-Line Theory— 1965年3月 市川輝雄
- TR-86 高速多段軸流圧縮機の部分負荷特性の一計算法  
A Method for Predicting the Off-Design Performance of Multi-Stage Axial-Flow Compressors Operating in the Transonic Flow 1965年5月 松木正勝, 藤井昭一,  
五味光男
- TR-87 亜音速流中のパネルフラッターとダイバージェンス (II) 圧縮流理論 (III) 実験的研究  
Study of Two Dimensional Panel Flutter and Panel Divergence in Subsonic Flow (II) Compressible Flow Case (III) Experimental Study 1965年6月 石井孝雄
- TR-88 尾翼, 胴体結合構造物の地上振動試験結果に関する定性的な吟味  
Qualitative Examinations on the Results of Ground Vibration Tests of Tail Wing-Fuselage Combination Structure 1965年6月 塙 武敏, 越出慎一
- TR-89 垂直突風および航空機の突風応答に関する実験的研究  
An Experimental Investigation on Vertical Gusts and the Airplane Response 1965年6月 小野幸一, 山根皓三郎
- TR-90 ヒステリシスループの形, 繰返しによる形の変化および繰返し後の塑性流動応力の上昇  
第一報 実験, 第二報 ねじりの場合の理論  
The Shape of Mechanical Hysteresis Loop, its deformation due to Stress Repetition and Resulting Increase in Flow Stress  
(Part 1. Experiment, Part 2. Theory for Torsion) 1965年7月 中西不二夫, 佐藤和郎  
永井文雄
- TR-91 固体プロペラントの割れ目内への火炎伝ば (I)  
Flame Propagation into the Gap of Solid Propellant Grain (I) 1965年7月 五代富文
- TR-92 ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (I) —迎角0のとき—  
An Approximate Calculation for Supersonic Flow Past Bodies of Rocket Vehicles (I)  
—Linearized Flow with Axial Symmetry— 1965年8月 谷 喬
- TR-93 遷音速動安定試験  
Dynamic Testing at Transonic Speed 1965年10月 小橋安次郎, 河野長正  
西 武徳
- TR-94 翼幅方向に一様な揚力分布をもつ半無限の後退翼  
On the Camber Lines of Semi-Infinite Sweptback Wings which give Uniform Spanwise Load Distribution 1965年10月 河崎俊夫

# ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (II)\*

—迎角のあるとき—

谷 喬\*\*

## An Approximate Calculation for Supersonic Flow Past Bodies of Rocket Vehicles (II)

—Linearized Flow with Attack Angle—

By Takashi TANI

In a previous report, the author transformed the equation for axisymmetric linearized supersonic flow to the two-dimensional equation in the vicinity of the body surface. In this report he applies similar transformation for the cross flow eruption. The normal force distribution can then be easily calculated at the downstream of the sharp corner. For example, the normal force on boattail, flare and cylindrical afterbody of cone cylinder is treated.

### 1. ま え が き

高速で飛しょうするロケットの胴体部に働く空気力の簡単な計算法は設計上からしばしば要求される。前回の報告においては基礎方程式が線型で、しかも迎角のない場合、したがって軸対称の流れを扱ったが、今回は胴体そのものは軸対称であるが迎角のある場合について考察する。前回と同様の方法により方程式を簡単化することができ、垂直力計算が容易に行なうことを示す。実例として頭部の後に続く胴体部や、後端のボートテイルあるいはフレヤーをまわる流れを計算した。

### 2. 序 論

前回の報告<sup>1)</sup>にも述べたように、ロケットの高速時性能を推定する際高マッハ数における翼の揚力低下に伴い胴体部に働く空気力は相対的に重要性を増してくる。従来、ロケットの先端部については円錐あるいはその他の断面形についても比較的多くの研究がなされており、抵抗、揚力などについて設計上十分なデータが発表されている。しかしそれに続く断面積一定の胴体部まわりの流れについては実用上便利なスレンダーボディ理論からは解を求めることができず<sup>2)</sup>、また、線型理論

\* 昭和 41 年 3 月 1 日受付

\*\* 空気力学第二部

によってもごく限られた数値結果しか発表されていない<sup>3)</sup>。これはこのような流れが3変数の波動方程式を取り扱わねばならず、しかも、たとえば円錐—円筒物体の場合、そのつぎめ、いわゆる肩の直後の解析は軸上の特異性を伴うため取り扱いが容易でないからである。同様の理由から、ロケットの安定性に重要な後端のポートテイル、あるいはフレヤーの解析についてもごくわずかの計算例がみられるにすぎない。

本報告においては、前回の軸対称流の場合と同様な変換によって方程式を最も簡単な2次元線型流と同型の2変数波動方程式で近似し、所要の解が解析的に簡単な形で得られることを示す。このような解は設計に際してよい見通しを与えるものと思われる。なお初等積分で表わし得ない解について一部電子計算機による数値計算を行なったが、この場合も計算は簡単であってパラメータを変化させて有用な解が系統的に求められた。これらの結果は実験値、あるいは他の著者の結果と比較しよい一致を示している。

### 3. 記 号

- $C_N$  : 垂直力係数,  $N/q_\infty\pi R^2$   
 $C_{N\alpha}$  : 垂直力係斜,  $(dC_N/d\alpha)_{\alpha=0}$   
 $C_{pc}$  : 横断流による圧力係数  
 $G$  : 変換された擾乱ポテンシャル  
 $G_0$  :  $G$  の第 1 近似  
 $G_1$  :  $G_0$  の補正項  
 $g_+$  :  $G$  の一般解中  $\xi$  のみの関数項  
 $g_-$  : 同上  $\eta$  のみの関数項  
 $\mathcal{L}$  :  $G$  の近似方程式における省略項  
 $K$  : 円錐まわりの解の係数  
 $L$  : フレヤー, ポートテイルの全長  
 $M$  : マッハ数  
 $m$  : 変換中の常数  
 $N$  : 垂直力  
 $n$  : 変換式中の  $r$  の巾数  
 $R$  : 物体半径  
 $r$  : 半径方向座標  
 $s$  : 変換された軸方向座標  $x/\beta$   
 $t$  : 変換された半径方向座標,  $t=y-y^3/4$

- $U$  : 一様流の速さ
- $U_a$  : 同上軸方向成分
- $U_c$  : 同上横断流成分
- $u$  :  $x$  方向擾乱速度成分
- $v$  :  $r$  方向擾乱速度成分
- $x$  : 軸方向座標
- $y$  : 変換された半径方向座標  $y=r-1$
- $\alpha$  : 迎角
- $\beta$  :  $\sqrt{M^2-1}$
- $A$  : フレヤー, ボートテイルの半径差
- $\delta$  : フレヤー, ボートテイル, 円錐の開き角
- $\zeta$  : 円錐の解において  $\zeta=(1/\beta) \cot \delta$
- $\eta$  :  $x-\beta y$
- $\theta$  : 円筒座標成分
- $\xi$  :  $x+\beta y$
- $\phi$  : 擾乱速度ポテンシャル
- $\phi_a$  : 同上軸方向流成分
- $\phi_c$  : 同上横断流成分
- $\phi_{c0}$  : 同上横断流成分の既知の上流解

#### 4. 解析 その 1

一様な速度  $U$  で飛行するロケット胴体のような軸対称物体を扱う場合, 物体の対称軸が流れに對しある角度すなわち迎角  $\alpha$  をもつときも座標系としては物体に固定した円筒座標によるのが普通である (図 1)。このとき物体の形状は  $r=R(x)$  で与えられ, これによる擾乱を与える擾乱速度ポテンシャル  $\phi$  を

$$U\phi_x=u, \quad U\phi_r=v$$

で定義する。ここに  $u, v$  はそれぞれ軸方向  $x$ , および半径方向  $r$  の擾乱速度成分である。 $\phi$  に対する方程式としては線型化された

$$\beta^2\phi_{xx}=\phi_{rr}+\phi_r/r+\phi_{\theta\theta}/r^2 \tag{1}$$

とする。流れは超音速とすれば

$$\beta^2=M^2-1 > 0$$

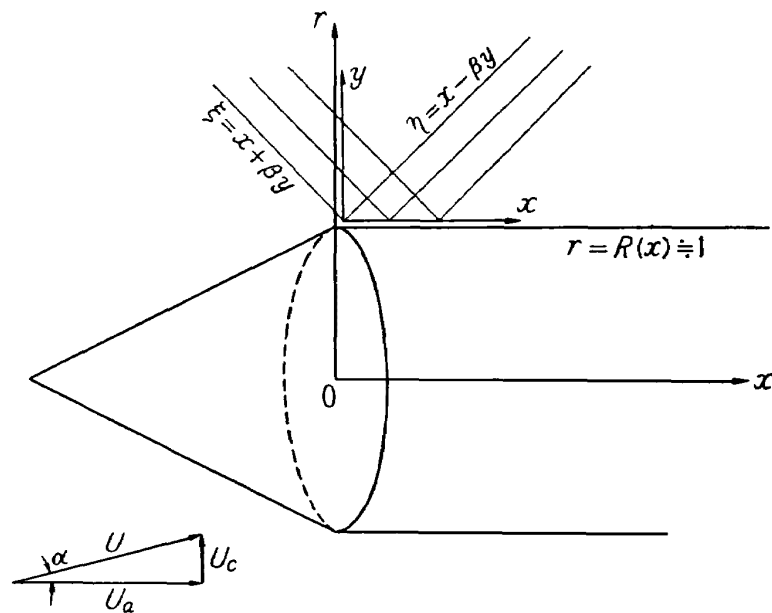


図 1 座標系とその変換

である。これに対する境界条件としては、物体前方で擾乱がないこと

$$\phi(x < 0, r, \theta) = 0$$

および流れが物体に沿うことが課せられる。

$$\phi_r(x, R, \theta) + \sin\alpha \cos\theta = \frac{dR}{dx} \cos\alpha$$

なお以下では  $\alpha$  の十分小さい場合を考えることとして

$$\sin\alpha \doteq \alpha, \quad \cos\alpha \doteq 1$$

とおくこととする。

よく知られたように擾乱速度ポテンシャル  $\phi$  は軸流成分と横断流成分との和として表わすことができる、すなわち

$$U\phi = U_a\phi_a(x, r) + U_c\phi_c(x, r) \cos\theta \quad (2)$$

とするとき\*、 $\phi_a$ 、 $\phi_c$  のみたすべき方程式および境界条件はそれぞれ

$$\beta^2\phi_{axx} = \phi_{arr} + \phi_{ar}/r$$

$$\phi_a(x < 0, r) = 0, \quad \phi_{ar}(x, R) = \frac{dR}{dx} \quad (3.a)$$

$$\beta^2\phi_{cxx} = \phi_{crr} + \phi_{cr}/r - \phi_c/r^2$$

$$\phi_c(x < 0, r) = 0, \quad 1 + \phi_{cr}(x, R) = 0 \quad (3.b)$$

となる。(3.a) 式については前回の報告に述べた軸対称流であるから、今回は (3.b) 式の解について考察する。

注) \* この表現は Van Dyke<sup>15)</sup> によるもので、 $\phi$  のディメンションが一部の教科書 (たとえば文献 4)) などと多少異なるが内容は同一である。境界条件についても同様である。

方程式 (3.b) 式は戦前 Tsien によって解かれ、その一般解も求められている<sup>5)</sup>。しかし軸上のダブレット分布に対応するそのような一般解は前述のように物体表面の傾斜の不連続に対応する点で特異性を示し取り扱いが容易でない。以下には前報告同様考える胴体表面が半径一定の円筒面に近いという多くのロケット胴体に適用できる仮定のもとに方程式を簡単化することを試みる。

先端部を別としてロケット胴体の半径がほぼ一様 (傾斜の大きさは制限しない) として、一般性を失うことなくこの定半径を基準長にとることとする。すなわち胴体表面は

$$R(x) \doteq 1$$

をみたしているものと仮定する。軸対称の場合同様次の変換

$$\phi_c = e^{-m} r^n e^{mr} G(x, r) \tag{4}$$

を導入すると、 $G$  に関する方程式は  $r \neq 0$  においては

$$\begin{aligned} \beta^2 G_{xx} = & G_{rr} + (2mr + 2n + 1)G_r/r \\ & + \{m^2 r^2 + (2nm + m)r + n^2 - 1\}G/r^2 \end{aligned} \tag{5}$$

が得られる。この式は軸対称の場合と比べて最終項のかけこ内に  $-1$  の項が加わっている。ここで

$$m = 3/4, \quad n = -5/4$$

ととれば  $r=1$  の定円筒上では右辺第 2, 第 3 項を 0 とすることができる (軸対称の場合  $m = n = -1/4$  であった)。

$r=1$  の近傍をみるため独立変数も

$$r = 1 + y \tag{6}$$

とすると便利である。このとき

$$G_r = G_y, \quad G_{rr} = G_{yy}$$

であり、前記の  $m, n$  に対して方程式 (5) は

$$\beta^2 G_{xx} = G_{yy} + (3/2) y G_y + y^2 (\dots) \tag{7}$$

の形に書くことができる。胴体表面付近の流れの場を考えているから当然

$$y \ll 1$$

とすることができ、(7) 式右辺の  $y$  を含んだ項は十分小さいことが期待される。このようにして  $y$  の十分小さい範囲、すなわち定円筒  $r=1$  の近傍では  $G$  を支配する方程式として

$$\beta^2 G_{xx} = G_{yy} \tag{8}$$

を用いることができるであろう。

なお形式的には前回の報告と同様

$$t = y - y^3/4$$

とおくことにより (8) 式を

$$\beta^2 G_{xx} = G_{tt} + t^2 (\dots)$$

のように係数として  $t$  の 1 次すなわち  $y$  の 1 次のかかった項が陽に現われないようにすることができる。しかし多くの場合この置き換えは精度的には効果が少ないようである。それは  $G$  の巾級数展開を考えると、 $t^2 G_{tt}$  は消去した  $y G_v$  と同位の量となるからである。結局精度を上げるためには無視した右辺の項について逐次近似を行なう必要がある。ただし方程式 (7) はこの際

$$G_{\xi\eta} = \mathcal{Q}(\xi, \eta), \quad \mathcal{Q}(\xi, \eta) = \text{既知}$$

の形にすることができるから逐次近似は容易に行ないうるがこれについては後に述べることとする。

実用上からは多くの場合 (8) 式を第 1 近似として得た解がある程度有用なことが示される。以下はまずこのような解について述べる：

$$\beta^2 G_{xx} = G_{yy}$$

の一般解はいうまでもなく

$$G = g_+(x + \beta y) + g_-(x - \beta y) \quad (9)$$

である。ここに  $g_+$ 、 $g_-$  はそれぞれ  $x + \beta y$ 、 $x - \beta y$  の任意関数を表わす。これらの関数形は境界条件より決定されるわけであるが、われわれが求めている静止大気中を飛行するロケットに対する解としては、第 1 近似としてロケットより出てゆく擾乱すなわち外向きの波 ( $x - \beta y$ ) による解のみを考えればよいことが推察される。したがって (9) 式のうち  $g_-$  のみを考察すればよいこととなる。なおもし上流に既知の擾乱がある場合、たとえばロケット頭部による解が与えられ以後の円筒胴体部まわりの解を求めるようなときは、このような既知の解  $\phi_{c0}$  の胴体部への延長に付加擾乱として  $g_-$  を加えて胴体上の境界条件をみたすようにするわけである。この場合横断流成分が胴体上でみたすべき境界条件としては (3・b) 式の解が

$$\begin{aligned} \phi_c &= e^{-\frac{3}{4}r - \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}r}} G(x, r) = (1+y)^{-\frac{3}{4}} e^{\frac{1}{2}y} G(x, y) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}y^2 + \dots\right) g_-(x - \beta y) \end{aligned} \quad (10)$$

であるから、これより  $\phi_{cv} = \phi_{cy}$  を作ると

$$\phi_{cv} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y + \dots\right) g_- - \beta \left(1 - \frac{1}{2}y + \dots\right) g_-'(x - \beta y)$$

であるから、境界条件は次のようになる：

$$1 + \phi_{cv}(x, R) + \left\{ \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y + \dots\right) g_- - \beta \left(1 - \frac{1}{2}y + \dots\right) g_-' \right\}_{y=R-1} = 0 \quad (11)$$

前回の軸対称流の場合にはこのような概円筒まわりの問題は、2 次元薄翼理論と同様境界条件を定円筒  $y=0$  上で与えることができたから問題は非常に簡単になった。しかし揚力問題においては物体断面積の変化が本質的に重要となるので、このような近似を行なうことは慎重を要する。たとえば先端部に続くほぼ一様断面の胴体部に働く揚力などについてはこのような近似は可能であり、(10) 式は  $g_-(x, y=0)$  の  $x$  に関する常微分方程式となって解析的に解を求めることができる。



他方胴体後端のフレアーあるいはポートテイルのように断面積変化によって揚力を生ずる部分の解析においては、正しく物体表面上で境界条件を与えることが必要となる。これについては後に実例について論ずるが、そのような場合でも物体表面を

$$r=R(x)\equiv 1+\delta(x)$$

としたとき、 $\delta$  が十分小さければ境界条件は結局  $x$  に関する常微分方程式に導くことができる。

このようにして  $g_-(x-\beta y)$  が決定されれば以下横断流による軸方向擾乱成分  $u_c$  は

$$\begin{aligned} u_c &= U_c \cos\theta \phi_{c,x} \\ &= U_c \cos\theta \left( 1 + \frac{3}{4}y + \frac{9}{32}y^2 + \dots \right) g_-'(x-\beta y) \end{aligned} \quad (12)$$

またこれより圧力係数

$$C_{pc} = -2u_c/U \quad (13)$$

を求めることができ、さらに垂直方向力としては

$$N = q_\infty \int_0^L \int_0^{2\pi} \cos\theta (-C_{pc}) R(x) d\theta dx \quad (14)$$

として求められる。ここに  $L$  は考えている物体の長さであり  $q_\infty$  は一様流の動圧である。垂直力係数  $C_N$  に直すためには

$$C_N = N/q_\infty \pi R^2(L), \quad (15)$$

また垂直力係斜  $C_{Na}$  の算出は  $U_c = U \sin\alpha \doteq U\alpha$  の関係を用いて求められる。

一方垂直力分布がわかればその合力の着力点として、圧力中心計算も容易である。

## 5 実例 その 1：ポートテイル部に働く垂直力の計算

ロケットの底面抵抗を減ずるためその後端の断面積を縮小して、いわゆるポートテイルにすることは小型ロケットでしばしば採用される方式である。前回の報告においては迎角 0 の場合のこの部分の圧力分布を計算し、抵抗値が算出できることを示したが、ポートテイルにおいて重要な問題は、この部に働く負の垂直力である<sup>6)</sup>。この垂直力はモーメントとして不安定側に働くものであるから設計上注意せねばならない。しかし単に断面積比からスレンダーボテイル理論により推定するときは、当然ポートテイルの絞り角には無関係の結果しか得られずその効果は過大に評価されるようである<sup>7)</sup>。このようなポートテイルの垂直力に関する計算は筆者の知る限りでは未公開の文献 8) の簡単な結果のみ紹介されたにすぎない。以下にはまず最も簡単な円錐状ポートテイルについて考えてみることにする。

迎角のあるロケット胴体において、その全長は十分長く先端部の影響は後端に及ばないものと仮定する。このとき問題は半無限円筒の後端を考えればよいことになる。このような単位半径円筒の

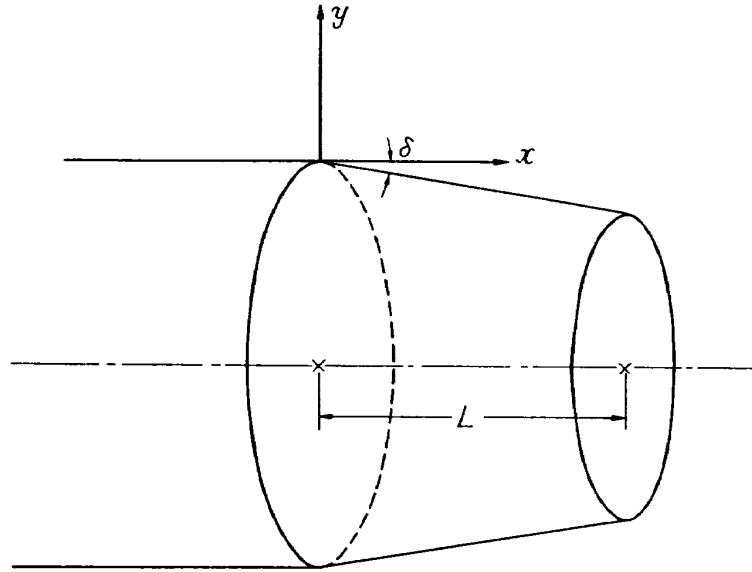


図 2 円錐状ポートテイル

後端が絞り角  $\delta$  の円錐状ポートテイルをなし、その部の長さが  $L$  であるとしよう (図 2)。式 (2) によって分離した軸方向成分  $\phi_a$  については前回の報告に述べたとおりであるから、ここには横断流成分  $\phi_c$  とそれによる垂直方向力について考察する。

軸方向成分  $\phi_a$  においては、半無限一定円筒上では擾乱  $0$  であったが、横断流成分  $\phi_c$  においてはこの部にも解をおかねばならない。これを  $\phi_{c0}$  とすれば、

$$\varphi_{c0} = 1/r \quad (16)$$

であり、この解は  $x$  を含まないから垂直力には影響しないが、ポートテイル上の境界条件には加えておく必要がある。ポートテイル上では

$$r = 1 - \delta x \quad \text{および} \quad y = -\delta x$$

であるから

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \phi_{c0}}{\partial r} \right]_{r=1-\delta x} &= \left[ -\frac{1}{r^2} \right]_{r=1-\delta x} = -(1-\delta x)^{-2} \\ &= -1 - 2\delta x - 3\delta^2 x^2 - \dots \end{aligned} \quad (17)$$

また付加すべき擾乱はポートテイル上で

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \phi_c}{\partial r} \right]_{r=1-\delta x} &= \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2} y + \frac{3}{4} y^2 + \dots \right) g_-(\eta) \right\} \right]_{y=-\delta x} \\ &= \left[ -\beta \left( 1 - \frac{y}{2} + \dots \right) \frac{dg_-}{d\eta} - \frac{1}{2} (1 - 3y + \dots) g_-(\eta) \right]_{y=-\delta x} \\ &= -\beta \left( 1 + \frac{\delta x}{2} + \dots \right) \left( \frac{\partial g_-}{\partial x} \right)_{\eta=x+\delta x} - \frac{1}{2} (1 + 3\delta x + \dots) g_-(x + \beta \delta x) \end{aligned}$$

と書くことができよう。とくに  $\delta$  が十分小さく、また  $\beta, x$  ともあまり大きくない場合を考えることとし、 $\delta$  の高次の項を無視して近似的に

$$\left[ \frac{\partial \phi_c}{\partial r} \right]_{r=1-\delta x} = -\beta \frac{dg_-(x)}{dx} - \frac{1}{2} g_-(x) \quad (18)$$

を得る。これらを境界条件 (10) 式にまとめると

$$-\beta \frac{dg_-}{dx} - \frac{1}{2} g_- - (1+2\delta x) + 1 = 0 \quad (19)$$

となる。この解は  $g_-(0)=0$  すなわち円筒部後端では揚力 0 の条件のもとに

$$g_- = -4\delta x + 8\delta\beta - 8\delta\beta e^{-\frac{x}{2\beta}} \quad (20)$$

となる。

垂直力の計算においても  $\delta$  の高次項は無視して

$$N = 2q_\infty \pi \alpha g_-(L)$$

が得られる。ポートテイルの効果として、面積の減少  $\pi\{(1-\delta L)^2 - 1^2\}$  に対応する垂直力係斜の減少を求めると

$$\Delta C_{N\alpha} = \frac{N}{q_\infty \alpha \pi \{(1-\delta L)^2 - 1^2\}} = 4 \left\{ 1 - 2\frac{\beta}{L} \left( 1 - e^{-\frac{L}{2\beta}} \right) \right\} \quad (21)$$

となる。仮定によりこの表現は  $L$  のあまり大きくない所で成立する。 $L$  の小さい所で展開すれば

$$\Delta C_{N\alpha} = 2\left(\frac{L}{2\beta}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2\beta}\right)^2 + \dots \quad (22)$$

が得られる。この表現は前述の文献 9) のものと  $L$  の小さい所でよく一致している。これよりポートテイル部の長さが短いほうが安定に対する悪影響が小さいこと、したがって面積比が与えられたときは抵抗値とくに底面圧を別問題とすれば絞角  $\delta$  が大きいほうが有利である。実際われわれの行なった風洞試験において、 $L \approx 1.1$  のロケットではポートテイルによる垂直力減少は通常の超音速領域で認められなかった<sup>7)</sup>(図 4(a)) が、 $L \approx 7.8$  の他のロケットではこの差が現われてい

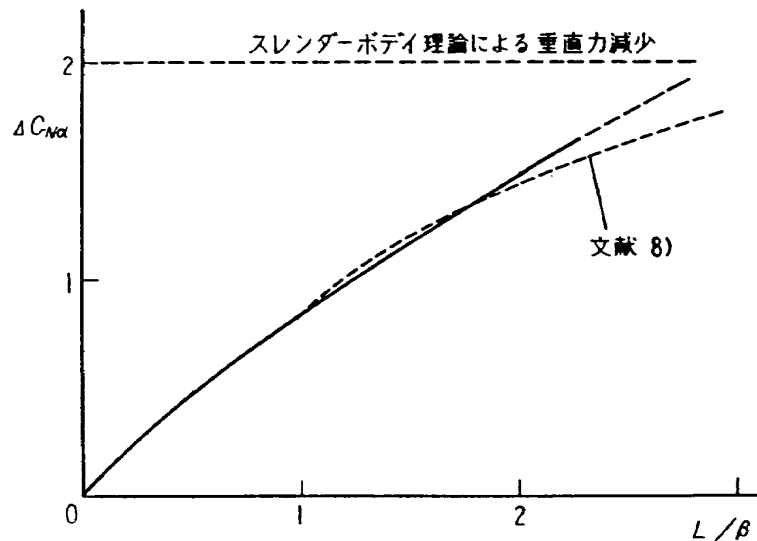


図 3 円錐状ポートテイルの効果

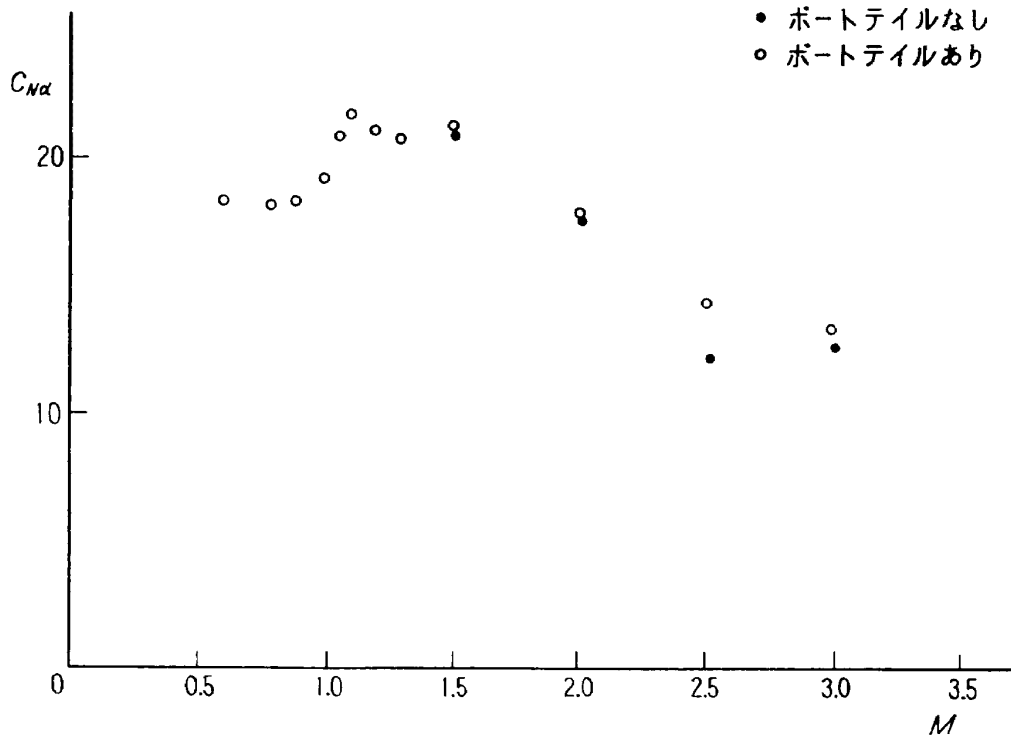


図 4(a)  $S_B/S_{\max}=0.85$ , ボートテイル部の長さ  $L=1.1R_{\max}$  のロケット実験結果

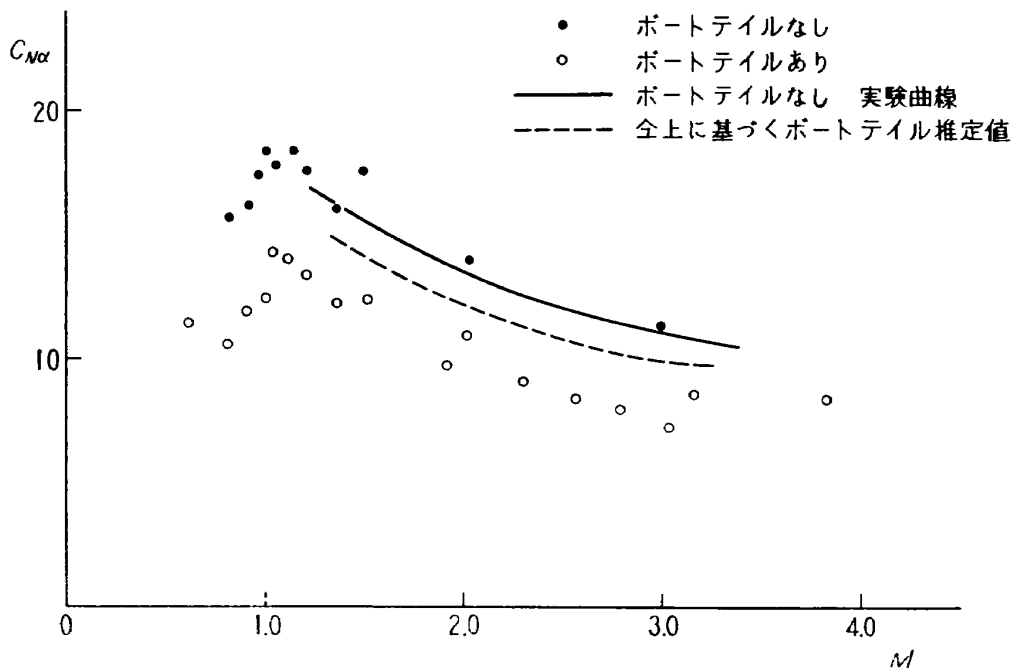


図 4(b)  $S_B/S_{\max}=0.39$ , ボートテイル部の長さ  $L=7.8R_{\max}$  のロケット実験結果

る (図 4(b))。後者の場合垂直力の差はボートテイル分だけの推定値以上であるが、これはボートテイルによりはく離が強められる影響などもあるのではないかとと思われる。このロケットでは結局ボートテイルを廃することとされた。

以上最も簡単な円錐状ボートテイルについての議論であるが、曲線断面のものについても同様に計算することができる。

## 6. 実例 その 2: フレヤーの効果

本報告の計算のおもな目的の一つは、高性能ロケットの安定保持に採用されつつあるフレヤーの効果についてである。飛しょうマッハ数の増大に伴い翼の揚力係数は急速に減少するが、一方頭部のもつ垂直力はこれによりあまり影響をうけないため、全機としての圧力中心は前進する。これは数種の機種についてわれわれの行なった風洞試験においても明らかに認められた<sup>9)</sup>。したがって高いマッハ数で飛行するロケットを尾翼のみで安定を保つことは困難となり、代わってマッハ数による影響の少ないフレヤーが採用されることとなる。しかしフレヤーについての垂直力計算は発表された例がきわめて少なく<sup>10),11)</sup> かなり大きい仮定の近似計算—たとえば円錐の一部としての計算などが実用されている。もちろんスレンダーボディ理論による推定ではマッハ数や開き角の影響はまったく現われないし、前項のポートテイルの場合と同様、このときは危険側に効果を過大評価するおそれがある。

最も簡単な計算としては、開き角の十分小さい円錐状フレヤーについては前項のポートテイルの解を符号のみ逆に考えて適用することができる。結果としてふたたび図 3 を用いることができ、もし底面積が与えられたとすれば開き角のゆるい、長いフレヤーのほうが垂直力大きく安定に有効であることがいえる。もちろん安定に効くのはモーメントであるからフレヤーの圧力中心も重要であるが、重心よりの距離がある程度大きければモーメントもほぼ垂直力の大きさに比例すると考えられる。また圧力中心も計算は容易である。一方抵抗や、実際の飛行時に問題となる衝撃波—境界層干渉によるはく離などからみても開き角の小さいフレヤーが有利と思われる。

フレヤーに関する実験値の発表されたものもごく少なく、計算と比較しうる例はほとんど見当たらない。図 5 には NASA の Kirk and Chapman<sup>10)</sup> の実験よりわれわれの計算の仮定に近いもの

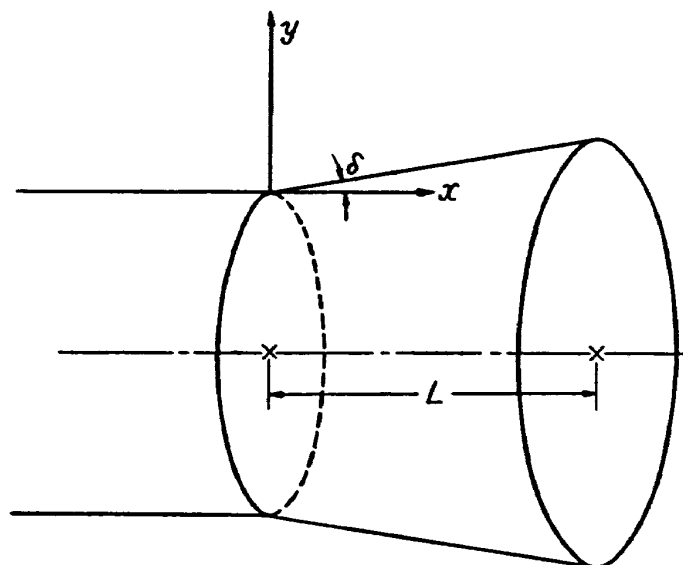


図 5 円錐状フレヤー

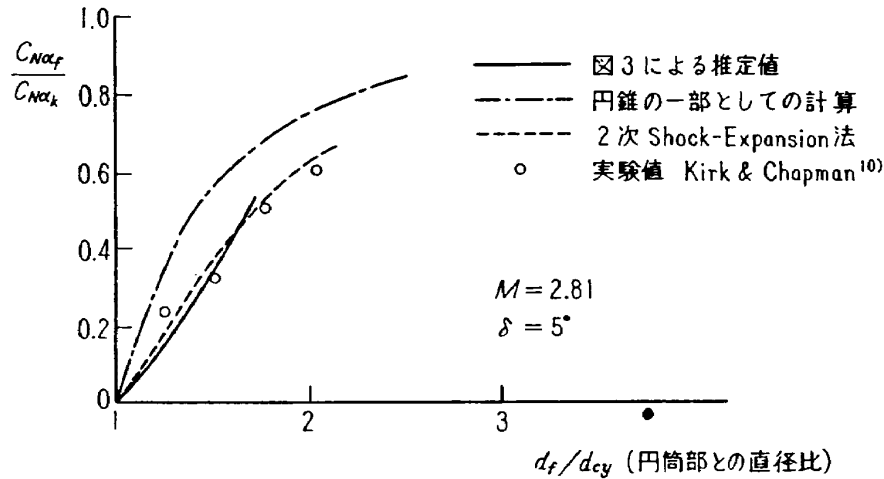


図 6 円錐状フレヤーの効果

$C_{Naf}$ : フレヤーの垂直力係数,  $C_{Nak}$ : 底面積同一の円錐の値

をとりだして比較してみた。開き角が比較的小さく、面積差のあまりないフレヤーのデータが不足であり、開き角変化によるフレヤー効果の差は定性的にしかみられないが、開き角  $5^\circ$  のものがほぼ推定値に近いことから計算は仮定の範囲では良い結果を与えるものと思われる。開き角がこれより大きいものも実用上用いられているがこれらに対しては今回省略した非線型項の影響の大きいことが予想される。このような 2 次理論の計算は次の報告に述べることにしたい。

### 7. 実例 その 3: Cone-Cylinder の肩の後に働く垂直力

先端部に続く平行胴体部に迎角時に働く垂直力はしばしば先端部にかかるものと同程度の大きさに達し、ロケット空力性能計算の際重要な問題である。これについては従来実験値はいくつか発表されているが<sup>9),12),13)</sup> 計算は高マッハ数に適切な Newtonian flow あるいは Shock-expansion 法<sup>16)</sup> によるものがほとんどである。これはすでに述べたように表面の傾斜不連続による計算の困難によるものと思われるが、以下にはわれわれの解法を最も簡単な形で適用してみた。

われわれの解は Cone-cylinder の肩以後に適用しうるものであって、Cone の上の解としては既知の解を必要とする。ここには最も簡単な Tsien による 1 次理論の解<sup>5)</sup> を用いることとする。この解  $\phi_{c0}$  は

$$\phi_{c0} = K\beta \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{\left(\frac{x}{\beta r}\right)^2 - 1} - \frac{\beta r}{2} \cosh^{-1} \frac{x}{\beta r} \right\} \quad (23)$$

で与えられるが、ここに常数  $K$  は円錐の頂角  $2\delta$  より

$$U_c \frac{\beta^2 K}{2} \{ \zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} + \cosh^{-1} \zeta \} = U \sin \alpha \quad (24)$$

ただし

$$\zeta = (1/\beta) \cot \delta \quad (25)$$

として決定される。この解より求められる  $r$  方向速度成分  $\phi_{\theta r}$  の円筒上の値を境界条件 (11) 式に入れて付加擾乱  $g_-$  が定められるが、その条件は

$$\beta \frac{dg_-}{dx} + \frac{1}{2} g_- + \frac{\frac{x}{\beta} \sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^2 - 1} + \cosh^{-1} \frac{x}{\beta}}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} + \cosh^{-1} \zeta} - 1 = 0 \tag{26}$$

となる。さらに変数を  $x$  より

$$x/\beta = S$$

により  $S$  にうつせば

$$\frac{dg_-}{dS} + \frac{1}{2} g_- + \frac{S \sqrt{S^2 - 1} + \cosh^{-1} S}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} + \cosh^{-1} \zeta} - 1 = 0 \tag{27}$$

となる。この解は公式により積分を含んだ形で書くことができるが、その積分は初等関数によっては表わすことができない。解の適用範囲は肩の直後であるからその範囲内で展開による解を求めることとする

$$S \sqrt{S^2 - 1} + \cosh^{-1} S = \zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} + \cosh^{-1} \zeta + \frac{2\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} (S - \zeta) + \dots$$

であるから  $g_-(\zeta) = 0$  を考慮して

$$g_- = - \frac{\zeta^2 / \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} + \cosh^{-1} \zeta} (S - \zeta)^2 + \dots \tag{28}$$

が得られる。円筒上の垂直力としては上流の解  $\phi_{\theta 0}$  よりの項と  $g_-$  によるものの和として求められるが、円筒部の長さを  $L$  とすると

表 1 Cone-cylinder の cylinder 部垂直力係数

$\zeta$	1.5	2.0	3.5	5.0
$\zeta + L/\beta = 1.5$	0			
2.0	0.720	0		
2.5	1.182	0.602		
3.0	1.375	0.987		
3.5	1.287	1.148	0	
4.0	0.905	1.107	0.397	
4.5	0.215	0.851	0.637	
5.0		0.401	0.727	0
5.5			0.696	0.294
6.0			0.546	0.461
6.5				0.521
7.0				0.490
7.5				0.380
8.0				0.200

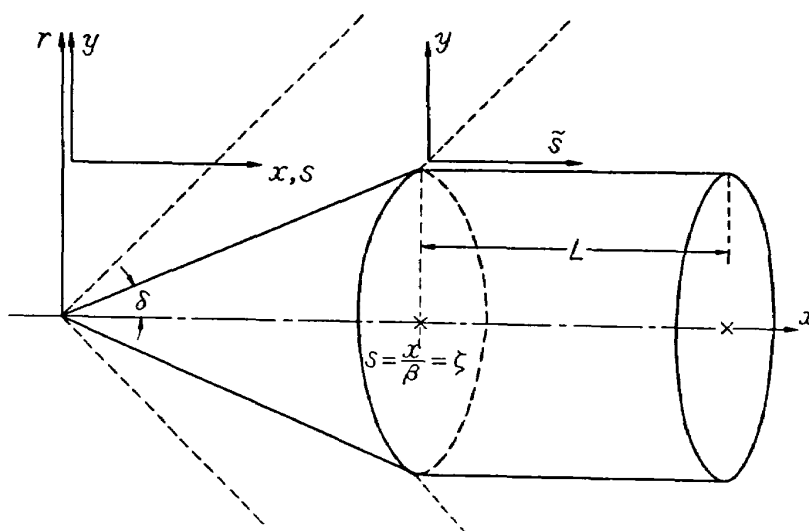
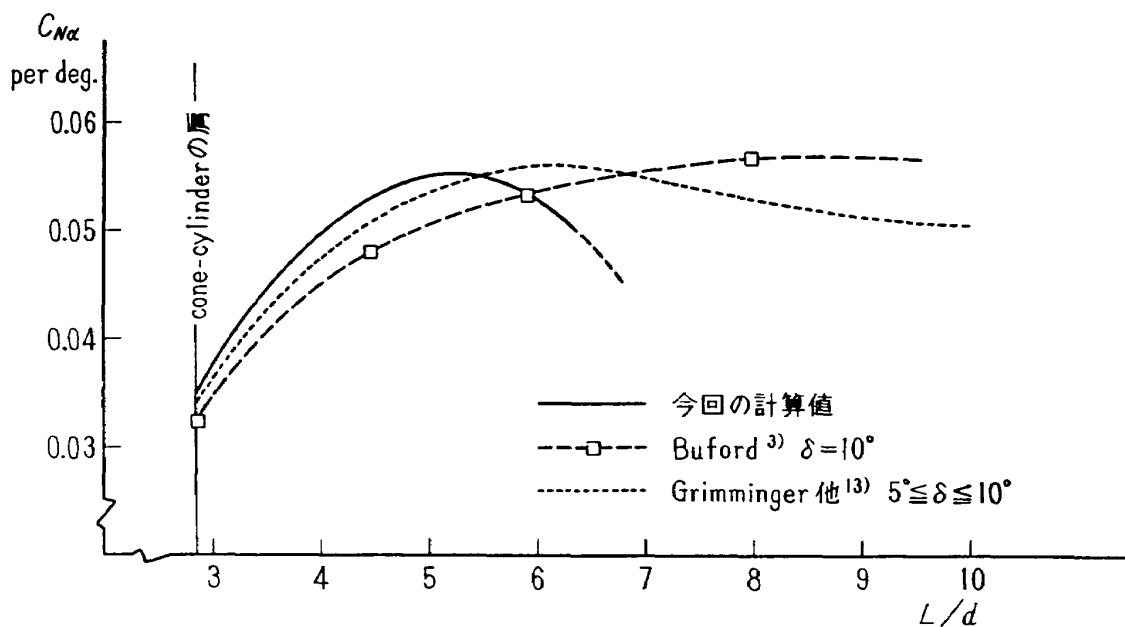


図 7 Cone-cylinder

図 8 Cone-cylinder に働く垂直力,  $M=3$ 

$$C_{N\alpha(\text{cyl})} = 2 \left[ \frac{S\sqrt{S^2-1} - \cosh^{-1} S}{\zeta\sqrt{\zeta^2-1} + \cosh^{-1} \zeta} + g(S) \right]_{\zeta}^{\zeta+L} \quad (29)$$

として求められる。

$g$ -の高次項を求めることも可能であるが、数値結果だけを得る目的には(27)式を直接電子計算機で解くほうが簡単である。表1には $\zeta$ のいくつかの場合について当研究所 Datatron 205 計算機による結果を示している\*。(S- $\zeta$ )の小さい所では上記の解(28)式はこの結果とよく一致している。またこれらの結果は変換  $x/\beta = S$  を考慮すると( $\zeta$ の値だけを数多く変えて計算しておけば)任意の頂角-マッハ数の組合せに適用できるものである。

注) \* この計算は空気力学第二部高島一明技官によるものである。とくに記して謝意を表す。



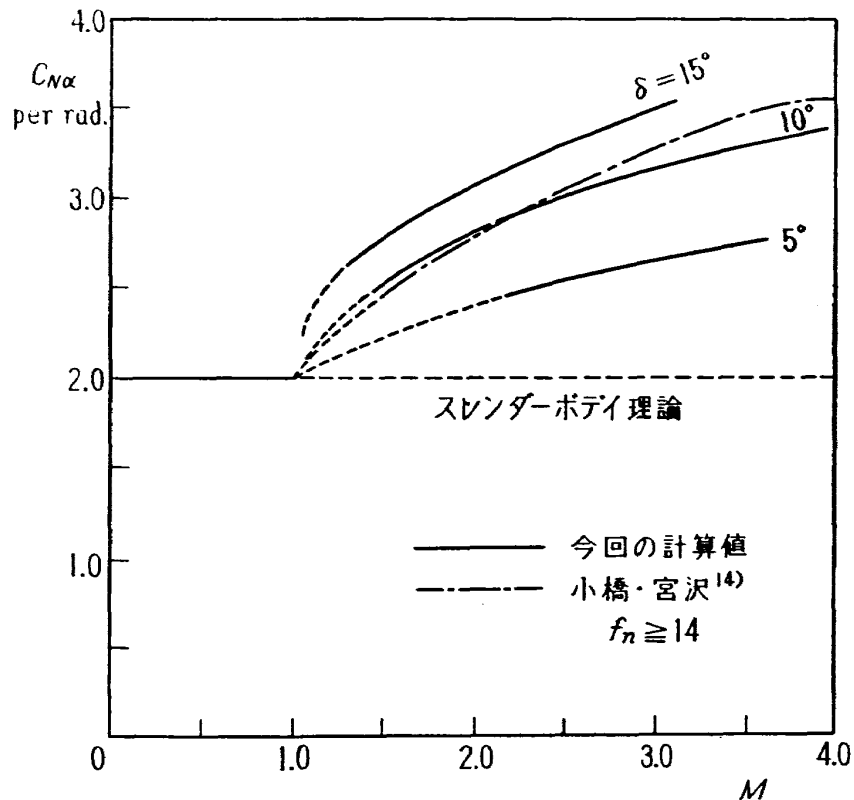


図 9 Cone-cylinder の最大垂直力

われわれの計算と直接比較できる 1 次のポテンシャル流に基づく計算はほとんどみられない。図 8 には半頂角  $10^\circ$ 、マッハ数 3 の場合を Buford<sup>9)</sup> および Grimminger ほか<sup>18)</sup> による実験結果と比較したものである。推定値は実験値に比べて円筒部長さの増加に対する垂直力変化の傾斜が大きいが絶対値としてはほぼ正しい値を与えているものと思われる。傾斜の差は方程式および圧力計算の際省略した非線型項の影響によるものであろう。すなわち実際の流れでは円筒部では過膨張により局所マッハ数が増大するが、これは傾斜をゆるくする効果をもつものである。

なお、われわれの結果は円筒部のある長さで垂直力が極大をとる結果となっている。このような極値は Shock-expansion 法<sup>16)</sup> には現われないが、ポテンシャル流の計算には出てくるもののように Ogive-cylinder に対する Buford の計算<sup>9)</sup> にも認められる。ただし実験上からはこのような極値は必ずしも確認されていないが、これは粘性による影響とくに肩以後の境界層の発達などが効いていると思われる。したがって実用上は胴体長が計算の示す極大値以上大きい場合も垂直力としては極大値を用いることが安定計算には安全である。

図 9 にはこのような見地から得られる十分長い胴体に対する垂直力の最大値のみを先に発表された小橋・宮沢による垂直力推定法の資料<sup>14)</sup> とともに示した。後者は前述の Buford の実験値<sup>9)</sup> に基づくものであるから  $\delta = 10^\circ$  に対応することとなるが、一致はほぼよいものとみられる。またこの図から少なくとも定性的に頂角の影響がわかるが、すなわちあるマッハ数についてみれば頂角の小さい円錐の場合は円筒部にあまり垂直力を生じないこと、逆に鈍い円錐の場合は大きい垂直力を生ずる可能性のあることがわかる。

## 8. 解析 その 2: 精度の向上

前節までにわれわれはロケット胴体近傍で 2 次元形に近似した方程式 (8) の解が多くの場合有用な解を与えることをみた。しかし考えている範囲が広いときや胴体の断面積変化がある程度大きいときは近似の際省略した項を考えて精度を上げる必要がある。これが原理的に可能なことはすでに述べたとおりであって、前回の報告の迎角 0 の場合と同様であるが以下に最も重要な項について簡単に述べることにする。

近似を行なう前の方程式 (7)

$$\beta^2 G_{xx} = G_{yy} + \frac{3}{2} y G_y + y^2 (\dots) \quad (7)$$

において、消去した項のうち最も重要な右辺第 2 項  $yG_y$  の影響は次のように求めることができる。

$$x + \beta y = \xi, \quad x - \beta y = \eta$$

により (7) 式を書き直すと

$$4\beta^2 G_{\xi\eta} = \frac{3}{4} (\xi - \eta)(G_\xi - G_\eta) + \dots$$

である。右辺を 0 とおいた  $G$  の近似解を  $G_0$ ,

補正項を  $G_1$  とすれば

$$G_{0\xi\eta} = 0$$

$$4\beta^2 G_{1\xi\eta} = \frac{3}{4} (\xi - \eta)(G_{0\xi} - G_{0\eta}) + \dots$$

などが得られる。 $G_1$  はただちに

$$G_1 = \frac{3}{16\beta^2} \iint (\xi - \eta)(G_{0\xi} - G_{0\eta}) d\xi d\eta + E(\xi) + H(\eta)$$

として求められる。

前にみたごとく実際問題では  $G_0$  は外向きの波による擾乱

$$G_0 = g_-(\eta)$$

のみであったから  $G_1$  としては

$$G_1 = -\frac{3}{16\beta^2} \left( \frac{\xi^2}{2} g_- - \xi\eta g_- + \xi \int g_- d\eta \right) + E(\xi) + H(\eta)$$

となる。 $E, H$  は境界条件から定められるべきものであるが、ここで  $G_1$  においても  $\xi$  のみの項はなく、また  $Y(\eta)$  は  $G_0$  と合わせて決定されるものとして  $g_-$  に合わせて考えることとすれば任意に与えることができる。迎角 0 の場合同様

$$H(\eta) = -\frac{3}{16\beta^2} \left( \frac{\eta^2}{2} g_-(\eta) \right)$$

とおくことにすれば結局

$$G_1 = -\frac{3}{8} y^2 g_- - \frac{3\xi}{16\beta^2} \int g_- d\eta$$

が補正項となる。解としては

$$\begin{aligned} G &= G_0 + G_1 \\ &= g_-(\eta) - \frac{3}{8} y^2 g_-(\eta) - \frac{3\xi}{16\beta^2} \int g_-(\eta) d\eta \end{aligned}$$

で与えられる。

$g_-$  を決定するためにはこれより  $\left(\frac{\partial\phi_c}{\partial r}\right)_{r=R(x)}$  を求めて (10) 式に入れればよいがこの場合は簡単な微分方程式とはならず、微積分方程式の形となるので解析的に解くことは困難であるが  $x$  の小さい範囲については  $g_-$  を展開の形に仮定して解くことができる。この場合補正は  $x$  の高次項に現われ、 $x=0$  の近傍では数値的にも前節までの結果と著しい変化はない。 $x$  の大きい所における補正の効果についてはさらに計算機などを用いねばならないと思われるが、これについては非線型項の影響も含めて次の機会に論じたい。

## 9. あ と が き

本報告においては前回に引続き迎角あるロケット胴体をまわる線型超音速流を、その表面近傍で2次元流の方程式で近似して解を導き、胴体部に働く垂直力の近似値が容易に求められることを示した。これにより従来のポテンシャル流計算における数学的困難をさけることができ、また Shock-Expansion 法に比しても閉じた形で使いやすい近似解が多くの場合得られるのが特徴である。一部電子計算機による数値解を求めたが、この場合もごく簡単な計算で系統的な解が求められた。

省略した項を評価し精度を上げることの可能性も示したがこれの具体的計算については同様行ないうる非線型項の考慮とともに次の機会に改めて検討したい。

末筆ながらご指導いただいた東京大学近藤次郎教授に深く感謝いたします。また、空気力学第二部河崎俊夫技官に討論いただいたこと、および高島一明技官が電子計算機の計算に協力されたことを付記します。

## 文 献

- 1) 谷 喬: ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法 (I) 迎角 0 のとき, 航技研報告 TR-92 (昭和 40)
- 2) たとえば Mac C. Adams and W.R. Sears: Slender—Body Theory—Review and Extension, J. Aero. Sci., Vol. 20, No. 2 (1953/2) pp. 85-98
- 3) W.B. Buford: The Effects of Afterbody Length and Mach Number on the Normal Force and Center of Pressure of Conical and Ogival Nose Bodies, J. Aero. Sci., Vol. 25, No. 2 (1958/2) pp. 103-108
- 4) H.W. Liepmann and A. Roshko: Elements of Gasdynamics (1956) John Wiley & Sons.
- 5) H.S. Tsien: Supersonic Flow Over an Inclined Body of Revolution, J. Aero. Sci., Vol. 5, No. 12 (1938/10) pp. 480-483
- 6) S.S. Chin: Missile Configuration Design (1961) p. 30, McGraw-Hill.
- 7) 小橋安次郎, 谷 喬, 田中博喜: LS-A ロケット高速風洞試験, 第 9 回宇宙技術講演会 (昭和 41)
- 8) H. Zienkiewicz, Unpublished work for English Elect. Co., この結果のみが J.E. Phythian and R.L. Dommett: Semi-Empirical Methods of Estimating Forces on Bodies at Supersonic Speeds, J. of Royal Aero. Soc., Vol. 62, No. 7 (1958/7) pp. 520-524 に引用されている。また Royal Aeronautical Society の Data Sheets に用いられたものも同じである。
- 9) 谷 喬, 原 亘利, 関根英夫: マッハ数によるロケット静安定変化の予備試験, 日本航空学会誌, 12 巻, 127 号 (昭和 39) pp. 3-8
- 10) D.B. Kirk and G.T. Chapman: The Stabilizing Effectiveness of Conical Flares on Bodies with Conical Noses, NASA Technical Memo, X-30 (1959)
- 11) F. Tamaki, S. Mitsuishi and S. Nagai: Aerodynamic Characteristics of Cone-Cylinder-Flare Configuration at Supersonic Speeds, Proc. 3rd International Symposium on Rockets and Astronautics, Tokyo (1961) pp. 209-215
- 12) F. Tamaki: Experimental Studies on the Aerodynamic Characteristics of the Cone-Cylinder in Supersonic Flows, Proc. 1st International Symposium on Rockets and Astronautics, Tokyo (1959) p. 157
- 13) G.W. Grimmering, E.P. Williams and G.B.W. Young, Lift on Inclined Bodies of Revolution in Hypersonic Flow, J. Aero. Sci, Vol. 17, No. 11 (1950/11) pp. 675-690
- 14) 小橋安次郎, 宮沢政文: 二段式ロケット飛しょう体の揚力および圧力中心推定法, 航技研資料 TM-30 (昭和 39)
- 15) M.D. Van Dyke: First-and Second-Order Theory of Supersonic Flow Past Bodies of Revolution, J. Aero. Sci., Vol. 18, No. 3 (1951/3) pp. 161-178
- 16) C.A. Syvertson and D.H. Dennis: A Second-Order Shock-Expansion Method Applicable to Bodies of Revolution Near Zero Lift, NACA Technical Note, 3527 (1956)

TR-95	飛行機の縦の操縦特性に関する二三の考察 A Few Comments on the Longitudinal Handling Qualities of Airplanes	1965年11月	荒木 浩
TR-96T	A Generalized Functional Formalism for Turbulence	Dec. 1965	Iwao HOSOKAWA
TR-97	圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の 作動円盤理論 (I) —軸対称流れ— A Theoretical Investigation of the Com- pressible Flow Through the Axial Turbo- Machines (I) —Non-Swirling Fluids in Ducts—	1965年12月	藤井昭一
TR-98	後退角 45°, アスペクト比 4.0 の薄い片持 翼の遷音速フラッタ特性に及ぼすテーパ比 の影響の実験的研究 Some Effects of Taper Ratio on the Tran- sonic Flutter Characteristics of a Series of Thin Cantilever Wings Having a Sweptback Angle of 45° and an Aspect Ratio 4.0	1965年12月	中井暎一, 高木俊朗 安藤泰勝
TR-99	計器のよみやすさに関する研究 A Study of Dial Legibility	1966年2月	三好範子, 岡部正典 石川澄子
TR-100	回転翼の線型理論 (III) —揚力線の方程式の解法— Linearized Aerodynamic Theory of Roter Blades (III) —Method for Solving Lifting-Line Equations—	1966年2月	市川輝雄
TR-101	航空機の着氷気象条件について (I) Meteorological Conditions on Aircraft Icing (I)	1966年2月	古関昌次, 田寺木一 泉日出夫, 太田幹雄 峰岸正勝

---

## 航空宇宙技術研究所報告 102 号

昭和 41 年 3 月 発行

発 行 所	航空宇宙技術研究所 東京都調布市深大寺町1,880 電話 武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表)
印 刷 所	笠井出版印刷社 東京都港区西新橋1の21の8

---