UDC 518.6

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-117

弾性振動方程式の差分解に関するエネルギー不等式

三 好 甫

1966 年 10 月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-95	飛行機の縦の操縦特性に関する二三の考察 A Few Comments on the Longitudinal Handling Qualities of Airplanes	1965年11月	荒木　浩
TR-96T	A Generalized Functional Formalism for Turbulence	Dec. 1965	Iwao HOSOKAWA
TR-97	圧縮性と壁形状を考慮した軸流ターボ機械の作動円盤理論（I）－軸対称流れ－ A Theoretical Investigation of the Compressible Flow Through the Axial Turbo-Machines (I) —Non-Swirling Fluids in Ducts—	1965年12月	藤井昭一
TR-98	後退角 45°, アスペクト比 4.0 の薄い片持翼の遷音速フラッタ特性に及ぼすテーパ比の影響の実験的研究 Some Fffects of Taper Ratio on the Transonic Flutter Characteristics of a Series of Thin Cantilever Wings Having a Sweptback Angle of 45° and an Aspect Ratio 4.0	1965年12月	中井暎一, 高木俊朗 安藤泰勝
TR-99	計器のよみやすさに関する研究 A Study of Dial Legibility	1966年2月	三好範子, 岡部正典 石川澄子
TR-100	回転翼の線型理論（III） －揚力線の方程式の解法－ Linearized Aerodynamic Theory of Rotor Blades (III) —Method for Solving Lifting-Line Equations—	1966年2月	市川輝雄
TR-101	航空機の着氷気象条件について（I） Meteorological Conditions on Aircraft Icing (I)	1966年2月	古関昌次, 田寺木一 泉　日出夫, 太田幹雄 峰岸正勝
TR-102	ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法（II）－迎角のあるとき－ An Approximate Calculation for Supersonic Flow Past Bodies of Rocket Vehicles (II) —Linearized Flow with Attack Angel—	1966年3月	谷　喬
TR-103T	Basic Consideration for Treating Non-Equilibrium Fluids —A Functional Approach to Non-Equilibrium Statistical Mechanics—	March 1966	Iwao HOSOKAWA
TR-104	翼幅方向に一様な揚力分布をもつ三次元後退翼のそり The Camber Distribution of a Spanwise Uniformly Loaded Subsonic Wing	1966年4月	河崎俊夫, 海老原正夫
TR-105	パイロットの心理的負担に関する研究（I） －操縦時の脈拍と呼吸の変化 A Psychological Study on the Mental Stress of Pilots (I) —Pulse and respiratory rate during flight—	1966年4月	三好範子, 百名盛之 岡部正典
TR-106	遷音速における操縦面の逆効き On Reversal of Effectiveness of Control of Surfaces in Transonic Flow	1966年5月	神谷信彦, 瀬川晋策
TR-107	円錐型電磁衝撃波管内の流れ Ionized Flow in a Conical Shock Tube	1966年5月	松崎利一
TR-90T	The Shape of Mechanical Hysteresis Loop, its Deformation due to Stress Repetition and Resulting Increase in Flow Stress Part 1. Experiment Part 2. Theory for Torsion	June 1966	Fujio NAKANISHI, Yasuo SATO & Fumio NAGAI

弾性振動方程式の差分解に関するエネルギー不等式*

三　好　　甫**

Energy Inequalities for the Difference Solutions of Equations of Elastic Vibration

By Hajime MIYOSHI

In this paper, two typical difference epuations for solving the equation of elastic vibration under arbitrary physical boundary conditions are considered. Energy inequalities for their solution are deduced. From these, stability of the difference solutions and the convergence to solutions of their original problem are proved.

1. 緒　　言

一次元的弾性物体の曲げ振動は偏微分方程式 $u_{tt}+(au_{xx})_{xx}=f$ の初期値—境界値問題により記述される。この方程式において $a=\text{const}$ は弾性物体の断面が一様であることに対応し，この場合，f がつごうの良い形をしていれば問題の解は解析的に求まることは良く知られている。$a=a(x)$ の場合は弾性物体が変断面であることに対応し，問題の解を解析的に求めることは一般にはむずかしく，そのための近似解法がいくつか提案されている。しかしながら，$a=a(x,\ t)$ の場合（弾性物体が変断面かつ線密度が時間とともに変化するような場合—たとえばロケットの振動などはそれである。)，$a=a(x)$ の際に適用された近似解法を適用することは一般に困難であってこのときには上にあげたすべての場合に対し適用することができる差分近似による数値解法が最も有力になる。

論文の目的は方程式 $u_{tt}+(a(x,t)u_{xx})_{xx}=f(x,t)$，あるいはさらに一般な方程式 $u_{tt}+(a(x,t)u_{xx})_{xx}=f(x,t,u_t,u_{xx})$ の初期値—境界値問題に差分近似を適用して得られる二つの典型的な 4 階の差分方程式の初期値—境界値問題の解の a-priori な評価を差分方程式の解に関するエネルギー不等式を導びくことにより行なうことである***。解の a-priori な評価が得られれば，それから差分

---

* 昭和 41 年 9 月 24 日受付

** 計測部

*** M. Lees は一連の論文[4)~6)]で熱伝導方程式および波動方程式から生じた差分方程式の解に関して偏微分方程式論においてしばしば有用であるエネルギー不等式に類似な不等式がなりたつことを証明している。

解の微分方程式の解への収束は適当な条件のもとで容易に得られる。

弾性振動方程式の差分解法において生ずる4階の差分方程式の初期値—境界値問題の解の評価に関する研究は $a=\text{const}$ かつ境界条件が両端で単純支持の場合に J. Todd[2] および L. Collatz[1] によりなされ，$a=\text{const}$ かつ境界条件が $u(x,t)=u(x+L,t)=u(-x,t)$ の場合に R.D. Richtmeyer[3] によりなされた。彼らの方法を $a=a(x,t)$ かつ物理的に考えられる任意の境界条件の場合に適用することはそれ自身一つの研究課題である (J. Jodd, L. collatz, R. D. Richtmeyer の論文については「付録Ⅱ」を参照)。

2.　近似差分方程式

問題となる偏微分方程式および初期条件はそれぞれ

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=f(x,t);\ 0<x<1\quad 0<t\leq T \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=f_1(x)\quad \left.\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|_{t=0}=f_2(x)\quad 0\leq x\leq 1 \tag{2.2}$$

である。境界条件は弾性体が端点において単純支持であるか，はめこみであるか，自由であるかに対応してそれぞれ

$$u(c,t)=a(x,t)\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right|_{x=c}=0 \tag{2.3.1}$$

$$u(c,t)=\left.\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|_{x=c}=0 \tag{2.3 2}$$

$$a(x,t)\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right|_{x=c}=\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u(x,t)\right)\right|_{x=c}=0 \tag{2.3.3}$$

である。ここで $c=0$ または $c=1$ である。

(2.1)～(2.3) に対する差分近似を導入するために，$N.M$ を正の整数，γ を正の定数，$h=1/N$, $k=T/M$, $k=\gamma h^2$ として次の格子領域を考える。

$$\Omega_{m,n}^{p,q}=\{(x_i,t_j);\ x_i=ih,\ t_j=jk,\ i=m,\ m+1,\cdots,n,\ j=p,\ p+1,\cdots,q\}$$

$$\Delta_{m,n}^{j}=\{(x_i,t_j);\ x_i=ih,\ t_j=jk,\ i=m,\ m+1,\cdots,n\}$$

$\Omega_{m,n}^{p,q}$ または $\Delta_{m,n}^{j}$ が領域 $\Omega=\{(xt);\ 0\leq x\leq 1\quad 0\leq t<T\}$ からはみ出す場合には，そこでの $a(x,t)$, $f(x,t)$ は適当に定義しておく。

格子点関数 $u(x_i,t_j)$ を u_{ij} (他も同様) と表わし，x 方向および t 方向の shift operator をそれぞれ E_1, E_2 とすれば

$$E_1u_{i,j}=u_{i+1,j}\qquad E_1^{-1}u_{i,j}=u_{i-1,j}$$

$$E_2u_{i,j}=u_{i,j+1}\qquad E_2^{-1}u_{i,j}=u_{i,j-1}$$

これを用いて t 方向の差分商は

$$u_{i,jt}=(E_2u_{i,j}-u_{i,j})/k \qquad u_{i,j\bar{t}}=(u_{i,j}-E_2^{-1}u_{i,j})/k$$

$$u_{i,j\hat{t}}=\frac{1}{2}(u_{i,jt}+u_{i,j\bar{t}}) \qquad u_{i,jt\bar{t}}=(E_2u_{i,j}-2u_{j,i}+E_2^{-1}u_{i,j})/k^2$$

と表わされる*。x 方向についても，x，t の混合差分商についても，あるいはさらに高階の差分商について同様に逐次定義される。これらの記号を用いて（2.1）に対する二つの差分近似方程式を考える。

$$L_h^1u_{i,j}\equiv u_{i,jt\bar{t}}+(a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}=f_{i,j} \qquad (i,j)\epsilon\widetilde{\Omega}_h \tag{2.4}$$

$$L_h^2u_{i,j}\equiv u_{i,j\bar{t}\bar{t}}+(a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}=f_{i,j} \qquad (i,j)\epsilon\widetilde{\Omega}_h^{**} \tag{2.5}$$

条件 1； $0<\mu_1\leq a(x,t)\leq\mu_2<\infty \quad 0\leq x\leq 1 \quad 0\leq t\leq T$ (2.6)***

条件 2； $|a(x.t)-a(x',t')|\leq\mu\{|x-x'|+|t-t'|\}$

$0\leq x\leq 1 \qquad 0\leq t\leq T$ (2.7)****

(2.4) は explicit type であり，(2.5) は implicit type の差分方程式である。(2.2) に対する近似初期条件は

$$u_{i,0}=f_{1i,0}$$

$$u_{i,1}=f_{1i,0}+kf_{2i,0}+\frac{k}{2}\left\{f_{i,0}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x,0)\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)\Big|_{x=xi}\right\}$$

$$i\epsilon\widetilde{\Delta}^{0*****} \tag{2.8}$$

(2.3.1)～(2.3.3) に対応する近似境界条件はそれぞれ

$$u_{0,j}=a_{0,j}u_{0,jx\bar{x}}=0; \quad 0\leq j\leq M \tag{2.9.1 a}$$

$$u_{N,j}=a_{N,j}u_{N,jx\bar{x}}=0; \quad 0\leq j\leq M \tag{2.9.1 b}$$

$$u_{0,j}=u_{0,jx}=0 \quad ; \quad 0\leq j\leq M \tag{2.9.2 a}$$

$$u_{N,j}=u_{N,j\bar{x}}=0 \quad ; \quad 0\leq j\leq M \tag{2.9.2 b}$$

$$a_{0,j}u_{0,jx\bar{x}}=(a_{0,j}u_{0,jx\bar{x}})_x=0; \; 0\leq j\leq M \tag{2.9.3 a}$$

$$a_{N,j}u_{N,jx\bar{x}}=(a_{N,j}u_{N,jx\bar{x}})_{\bar{x}}=0; \; 0\leq j\leq M \tag{2.9.3 b}$$

である。したがって (2.4) または (2.5) に対する境界条件は微分方程式の境界条件に対応して，(a) 群から 1 つ，(b) 群から一つとった種々の組合せが考えられる。

注） * t は前進差分商，$\bar{t}$ は後退差分商，$\hat{t}$ は中心差分商を表わす。

** $\widetilde{\Omega}_h$ は差分方程式に対する境界条件の型により変わる。(2.4)および(2.5)の行列形については「付録 I」を参照。

*** 実際問題では $x=0$ …または $x=1$ で $a(x,t)=0$ となることもある。その場合，N. Bazley, D. W. Fox[7] は $a(x,t)u_{xx}$ は領域内部からの極限として考えれば良いということを指摘している。

**** (2.7) の仮定は (2.1)の微分可能な解の存在条件としてはゆるすぎるようであるが差分方程式の評価を与えるのにはこの条件で十分である。しかしながら差分解の微分方程式の解への収束をいう場合には もっと強い条件でおきかえることが必要になろう。

***** $\widetilde{\Delta}^0$ は $\widetilde{\Omega}_h$ と同様に境界条件により変わる。

近似境界条件に関する注意

(2.9.1a)～(2.9.3b)においては後述のエネルギー不等式の証明のつごう上 fictious grid point を使った。fictious grid point を使うことは理論的にも，実際計算の上でもなんの不つごうももたらさない。問題はむしろ，(2.9.2a)～(2.9.3b) においてはそれを (2.3.1)～(2.3.3) に対する近似と考えたときの近似度が (2.4) (2.5) に比較して一つ落ちていることである。したがって，(2.9.2a)～(2.9.3b) を使って計算を行なえば近似解の精度は (2.4)，(2.5) と同じ近似度の近似境界条件を用ちいて計算した場合に比較して悪くなると考えられる。

(2.4)，(2.5) は微分方程式の解が十分なめらかならば h^2 の近似である。(2.9.1a．b)は h^2 の近似であるが，(2.9.2a，b)，(2.9.3a，b) に対応する h^2 の近似の近似境界条件の一つはそれぞれ

$$u_{0,j}=u_{0,jx}=0 \quad ; \quad 0\leq j\leq M \tag{2.9.2a)'}$$

$$u_{N,j}=u_{N,j\bar{x}}=0 \quad ; \quad 0\leq j\leq M \tag{2.9.2b)'}$$

$$a_{0,j}u_{0,jx\bar{x}}=(a_{1,j}u_{1,jx\bar{x}}-a_{-1,j}u_{-1,jx\bar{x}})/h;\ 0\leq j\leq M \tag{2.9.3a)'}$$

$$a_{N,j}u_{N,jx\bar{x}}=(a_{N+1,j}u_{N+1,jx\bar{x}}-a_{N-1,j}u_{N-1,jx\bar{x}})/h;\ 0\leq j\leq M \tag{2.9.3b)'}$$

である。しかしながらこれらを用いてのエネルギー不等式の証明には著者は成功していない。

3. エネルギー不等式

「2」で説明した様に差分方程式 (2.4) および (2.5) に対する境界条件は各種考えられるが，ここでは議論を明僚にするために境界条件として (2.9.1a) および (2.9.1b) を取る。この場合差分方程式，初期条件および境界条件の定義域は次のとおりである。

$$L_h{}^1u_{i,j}\equiv u_{i,jt\bar{t}}+(a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}=f_{i,j},\quad (x_i,t_j)\in\Omega^{1,M-1}_{1,N-1} \tag{2.4}$$

$$L_h{}^2u_{i,j}\equiv u_{i,j\bar{t}\bar{t}}+(a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}=f_{i,j},\quad (x_i,t_j)\in\Omega^{2,M}_{1,N-1} \tag{2.5}$$

$$u_{i,0}=f_{1i,0} \qquad (x_i,t_j)\in\Delta^{0}_{1,N-1}$$

$$u_{i,1}=f_{1i,0}+kf_{2i,0}+\frac{k}{2}\left\{f_{i,0}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x,0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f_1(x))\right)\bigg|_{x=x_i}\right\}$$

$$(x_i,t_j)\in\Delta^{1}_{-1N+1} \tag{2.8}$$

$$u_{0,j}=a_{0,j}u_{0,jx\bar{x}}=0 \quad ; \quad 0\leq j\leq M \tag{2.9.1a)*}$$

$$u_{N,j}=a_{N,j}u_{N,jx\bar{x}} \quad ; \quad 0\leq j\leq M \tag{2.9.1b)}$$

その他の境界条件の組合せについては「4」で考えることにする。

定義 線型空間 $S^j_{1,1}$

$\Delta^j_{-1,N+1}$ の上の格子点関数の集合で (2.9.1a) および (2.9.1b) を満足するものの全体は線型空間を作るが，これを $S^j_{1,1}$ と表わす。$S^j_{1,1}$**の上で内積を

注) * (2.9.1a，b) と (2.8) は (0.0) および (1.0) で compatible でなければならない。

** S^j_{11} の suffix は境界条件の組合せを示す。境界条件が単純支持には1が，はめこみには2が，自由には3が対応し，一番目の suffix が左端を，2番目の suffix が右端を示す。

$$<f,g>^{j}_{0,N}=h\sum_{i=0}^{N} f_i g_i$$

$$<f,g>^{j}_{1,N-1}=h\sum_{i=1}^{N-1} f_i g_i$$

とし，ノルムを

$$<f,f>^{j}_{0,N}=||f||_j^2$$

$$<f\ f>^{j}_{1,N-1}=||\widetilde{f}||_j^2$$

で定義する。

エネルギー不等式を証明するのに必要な補題をあげておく。

補題 1

$$2uu_{\bar{t}}=(u^2)_{\bar{t}}+k(u_{\bar{t}})^2 \tag{3.1}$$

$$2uu_t=(u^2)_t-k(u_t)^2 \tag{3.2}$$

$$2u_{\bar{t}}u_{\bar{t}\bar{t}}=(u_{\bar{t}}{}^2)_{\bar{t}}+k(u_{\bar{t}\bar{t}})^2 \tag{3.3}$$

$$2u_{x\bar{x}}u_{x\bar{x}\bar{t}}=(u_{x\bar{x}}{}^2)_t+k(u_{x\bar{x}\bar{t}})^2 \tag{3.4}$$

$$2u_{\bar{t}}u_{t\bar{t}}=(u_{\bar{t}}{}^2)_t-k(u_{t\bar{t}})^2 \tag{3.5}$$

$$2u_t\mu_{t\bar{t}}=(u_t{}^2)_{\bar{t}}+k(u_{t\bar{t}})^2 \tag{3.6}$$

$$2u_{\hat{t}}u_{t\bar{t}}=(u_t{}^2)_{\bar{t}} \tag{3.7}$$

$$4u_{x\bar{x}}u_{x\bar{x}\hat{t}}=2(u_{x\bar{x}}{}^2)_{\hat{t}}-k(u_{x\bar{x}t})^2+k(u_{x\bar{x}\bar{t}})^2 \tag{3.8}$$

証明

$$(f,g)_{\bar{t}}=f_{\bar{t}}g+g_{\bar{t}}E_2{}^{-1}f=g_{\bar{t}}f+f_{\bar{t}}E_2{}^{-1}g=f_{\bar{t}}g+fg_{\bar{t}}-kf_{\bar{t}}g_{\bar{t}} \tag{3.9}$$

$$(f,g)_t=f_tg+g_tE_2f=g_tf+f_tE_2g=f_tg+fg_t+kf_tg_t \tag{3.10}$$

(3.1) は (3.9) において $f=g=u$ とおけば良い。(3.2) は (3.10) で $f=g=u$ とおけば良い。(3.3) は (3.1) の u に $u_{\bar{t}}$ を代入する。(3.4) は (3.1) の u に $u_{x\bar{x}}$ を代入する。(3.5)は(3.2) の u に $u_{\bar{t}}$ を代入する。(3.6)は(3.1)の u に u_t を代入する。(3.7)は $u_{\hat{t}}$ の定義と $(u_{\bar{t}}{}^2)_t=(u_t{}^2)_{\bar{t}}$ から (3.5) と (3.6) を辺々加えれば良い。(3.8) は $u_{\hat{t}}$ の定義と $2u_{x\bar{x}t}u_{xx}=(u_{x\bar{x}})_t-k(u_{x\bar{x}t})^2$ ((3.2) の u に $u_{x\bar{x}}$ を代入すれば得られる。) からこれと (3.4) を加えれば得られる。 証明終

補題 2

$\Delta^{j}_{0,N}$ 上の格子点関数に関して

$$h^4||\widetilde{u_{x\bar{x}t}}||_j^2\leq 16||u_t||_j^2$$

である。

証明

$$h^4||u_{x\bar{x}t}||^2=h^5\sum_{i=1}^{N-1}(\mu_{i+1,jt}-2u_{i,jt}+u_{i-1,jt})^2/h^4$$

$$=h\sum_{i=1}^{N-1}u_{i+1,jt}^2+u_{i-1,jt}^2+4u_{i,jt}^2+2u_{i-1,jt}\ u_{i+1,jt}-4u_{i-1,j\bar{t}}\ u_{i,jt}-4u_{i+1,jt}u_{ijt}$$

$$\leq h\sum_{i=1}^{N-1}4u_{i+1,jt}^2+8u_{i,jt}^2+4u_{i-1,jt}^2\leq 16||u_t||^2$$

証明終

補題3（M. Lees[6] による。）

f_i, g_i を $t_j \epsilon (pk, (p+1)k, \cdots, qk)$ で定義された非負の関数とする。さらに g_j は非減少（j に関して）とする。そこで $p<m\leq q$ なる任意の m に対して

$$f_m \leq g_m + ck\sum_{j=p}^{m-1} f_j \quad c\geqq 0$$

ならば

$$f_m \leq g_m \exp[c(m-p)k]$$

である。

証明

$$f_j = h_j \exp[c(j-p)k] \text{ とおき, } h_J = \max_{p\leq i\leq m} hj \text{ とする。}$$

$$f_J = h_J \exp[c(J-p)k] \leq g_J + ckh_J \sum_{j=p}^{J-1} \exp[c(j-p)k]$$

$$\leq g_J + ch_J \int_{pk}^{Jk} \exp[c(s-pk)]ds$$

$$= g_J + h_J\{\exp[c(J-p)k]-1\}$$

$$g_J - h_J \leq 0$$

ゆえに $$f_m \leq g_m \exp[c(m-p)k]$$ 証明終

最初に（2.4）の解に関するエネルギー不等式の証明を行なう。そのために次の等式

$$2hk\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{N} u_{i,j\hat{t}} L_h^1 u_{i,j} = 2hk\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{N} u_{i,j\hat{t}} f_{j,j} \tag{3.11}$$

から出発する。(3.11) の右辺は

$$2hk\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{N} u_{i,j\hat{t}} f_{i,j} \leq k\sum_{j=i}^{M-1}(||f||_j^2 + ||u_{\hat{t}}||_j^2) \tag{3.12}$$

(3.11) の左辺は

$$2hk\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{N} u_{i,j\hat{t}} L_h^1 u_{i,j} \equiv 2hk\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=1}^{N} u_{i,j\hat{t}} u_{i,jt\bar{t}} + u_{i,j\hat{t}}(a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}$$

上式右辺第1項は補題1の（3.7）により

$$2hk\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{N} u_{i,j\hat{t}} u_{i,jt\bar{t}} = k\sum_{j=1}^{M-1}(||u_t||_j^2)_{\bar{t}} = \sum_{j=1}^{M-1}(||u_t||_j^2 - ||u_t||_{j-1}^2)$$

$$= ||u_t||_{M-1}^2 - ||u_t||_0^2 \tag{3.13}$$

右辺第2項は $u_{i,j} \epsilon S_{1,1}^j$ により

$$2hk\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{N} u_{i,j\hat{t}}(a_{i+1,j}u_{i+1,jx\bar{x}} - 2a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}} + a_{i-1,j}u_{i-1x\bar{x}})/h^2$$

$$= 2hk[\sum_{j=1}^{M-1}\{a_{-1,j}u_{0,j\hat{t}}u_{-1,jx\bar{x}} - 2a_{0,j}u_{0,jx\bar{x}} + a_{0,}u_{1,j\hat{t}}u_{0,jx\bar{x}}$$

$$+ a_{N+1,j}\mu_{N,j\hat{t}}u_{N+1jx\bar{x}} - 2a_{N,j}u_{N,\hat{t}}u_{N,jx\bar{x}} + a_{N,j}u_{N-1,j\hat{t}}u_{N,jx\bar{x}}\}$$

$$+ \sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1} a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}\hat{t}}u_{i,jx\bar{x}}]$$

$$= 2hk\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N=1} a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}\hat{t}}u_{i,jx\bar{x}}$$

補題1の（3.8）と $a(x,t)$ に関する条件（2.6）および（2.7）を使い $u_{i,jx\bar{x}\bar{t}} = u_{i,j-1x\bar{x}t}$ を考慮すれば

$$2hk\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}\hat{t}}u_{i,jx\bar{x}}$$

$$=(hk/2)\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1}a_{i,j}\{u_{i,jx\bar{x}}{}^{2})_{\bar{t}}+(u_{i,jx\bar{x}}{}^{2})_{t}-k(u_{i,jx\bar{x}t})^{2}+k(u_{i,jx\bar{x}\bar{t}})^{2}\}$$

$$=(h/2)\sum_{i=1}^{N-1}(a_{i,M-1}u_{i,Mx\bar{x}}{}^{2}+a_{i,M-2}u_{i,M-1x\bar{x}}{}^{2})-(h/2)\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{i=2}^{M-2}(a_{i,j+1}-a_{i,j-1})u_{i,jx\bar{x}}{}^{2}$$

$$-(h/2)\sum_{i=1}^{N-1}(a_{i,2}u_{i,1xx}{}^{2}+a_{i,1}u_{i,0x\bar{x}}{}^{2})-(hk^{2}/2)\sum_{j=1}^{M-1}a_{i,M-1}u_{i,M-1x\bar{x}t}$$

$$+(hk^{2}/2)\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i}^{M-2}(a_{i,j+1}-a_{ij})\mu_{i,jxx}{}^{2}+(hk^{2}/2)\sum_{i=1}^{N-1}a_{i,1}\mu_{i,0x\bar{x}t}{}^{2}$$

$$\geq(\mu_1/2)(||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_M^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_{M-1}^2)-(\mu/2)k\sum_{j=1}^{M-2}(||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_{j+1}^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2)$$

$$-(\mu_2/2)(||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_1^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_0^2)-(\mu_2k^2/2)||\widetilde{u_{x\bar{x}t}}||_{M-1}^2-(\mu k^3/2)\sum_{j=1}^{M-2}||\widetilde{u_{xxt}}||_j^2$$

$$+(\mu_1k^2/2)||\widetilde{u_{x\bar{x}_t}}||_0^2 \tag{3.14}$$

(3.12), (3.13), (3.14) をまとめると

$$||u_t||_{M-1}^2+(\mu_1/2)(||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_M^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_{M-1}^2)-(u_2k^2/2)||\widetilde{u_{x\bar{x}t}}||_{M-1}^2$$

$$\leq||u_t||_0^2+(\mu_2/2)(||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_0^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_1^2)+k\sum_{j=1}^{M-1}||f||_j^2+(uk^3/2)\sum_{j=1}^{M-2}||\widetilde{\mu_{x\bar{x}t}}||_j^2$$

$$+(\mu k/2)\sum_{j=1}^{M-2}(||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_{j+1}^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2)+k\sum_{j=1}^{M-1}||u_{\hat{t}}||_j^2 \tag{3.15}$$

ここで

$$k\sum_{j=1}^{M-1}||u_{\hat{t}}||_j^2\leq(k/2)||u_t||_{M-1}^2+k\sum_{j=1}^{M-2}||u_t||_j^2+(k/2)||u_t||_0^2$$

なることと $k^2=\gamma^2h^4$ から (3.15) の左辺第3項に補題2を適用すれば

$$(1-8\mu_2\gamma^2-(k/2))||u_t||_{M-1}^2+(\mu_1/2)(||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_M^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_{M-1}^2)$$

$$\leq(1+(k/2))||u_t||_0^2+(\mu_2/2)(||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_1^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_0^2)+k\sum_{j=1}^{M-1}||f||_j^2$$

$$+(8\mu\gamma^2+1)k\sum_{j=1}^{M-2}||u_t||_j^2+(\mu/2)k\sum_{j=1}^{M-1}(||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_{j+1}^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2) \tag{3.16}$$

(3.16) において

$$1-8\mu_2\gamma^2-(k/2)\geq\sigma>0$$

なるように γ^2 と k を選び

$$\min(\sigma_1,\mu_1)=\mu_3$$

$$\max(\mu_2,1+8\mu\gamma^2)=\mu_4$$

$$(1+(k/2))||u_t||_0^2+(\mu_2/2)(||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_0^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_1^2)+k\sum_{l=1}^{j}||f||_l^2=g_j$$

$$||u_t||_j^2+(1/2)(||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_{j+1}^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2)=f_j$$

とすれば補題3が (3.16) に適用できて

$$f_{M-1}\leq g_{M-1}\exp[(\mu_4/\mu_3)(M-2)k] \tag{3.17}$$

なりたつ。(エネルギー不等式)

ここで $f_j\equiv|||\mu|||_j^2$ により差分方程式の解に新たにノルムを導入すると, (3.17) から次の条件付安定性に関する定理が導かれる。

定理 1.

explicit な差分方程式 (2.4) の初期条件 (2.8) および境界条件 (2.9.1a, b) のもとにおけ

る解は $1-8\mu_2\gamma^2-(k/2)\geq\sigma>0$ なるように γ と k を選べばノルム $|||u|||$ に関して一様有界である。（すなわち安定である。）*

次に (2.5) に対するエネルギー不等式の証明を行なう。(2.5) については次の等式

$$2hk\sum_{j=2}^{M}\sum_{i=0}^{N}u_{i,j\bar{t}}L_h^2u_{i,j}\equiv 2hk\sum_{j=2}^{M}\sum_{i=0}^{N}u_{i,j\bar{t}}f_{i,j} \tag{3.18}$$

から出発する。(3.18) の右辺は前と同様に

$$2hk\sum_{j=2}^{M}\sum_{i=1}^{N}u_{i,j\bar{t}}f_{i,j}\leq k\sum_{j=2}^{M}(||u_{\bar{t}}||_j^2+||f||_j^2) \tag{3.19}$$

左辺は

$$2hk\sum_{j=2}^{M}\sum_{i=0}^{N}u_{i,j}L_h^2u_{i,j}\equiv 2hk\sum_{j=2}^{M}\sum_{i=0}^{N}u_{i,j\bar{t}}u_{i,j\bar{t}\bar{t}}+u_{i,j\bar{t}}(a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}} \tag{3.20}$$

(3.20) の右辺第1項は補題1の (3.3) により

$$2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}u_{i,j\bar{t}\bar{t}}=k(\sum_{j=2}^{M}(||u_{\bar{t}}||_j^2)_{\bar{t}}+k||u_{\bar{t}\bar{t}}||_j^2)\geq||u_{\bar{t}}||_M^2-||u_{\bar{t}}||_1^2 \tag{3.21}$$

(3.20) の右辺第2項は $u_{i,j}\epsilon S_{1,1}^{j}$ なることと補題1の (3.4) および $a(x,t)$ に関する条件(2.6), (2.7) を使えば

$$\begin{aligned}
&2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}(a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}\\
&=2hk\{\sum_{j=2}^{M}a_{-1,j}u_{0,j\bar{t}}u_{-1,jx\bar{x}}-2a_{0,j}u_{0,j\bar{t}}u_{0,jx\bar{x}}+a_{0,j}u_{i,j\bar{t}}u_{0,jx\bar{x}}\\
&\quad+a_{N+1,j}u_{N,j\bar{t}}u_{N+1,jx\bar{x}}-2a_{N,j}u_{N,j\bar{t}}u_{N,jx\bar{x}}+a_{N,j}u_{N-1,j\bar{t}}u_{N,jx\bar{x}}+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{M}a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}}u_{i,jx\bar{x}\bar{t}}\}\\
&=2hk\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{M}a_{i,jx\bar{x}}u_{i,jx\bar{x}}u_{i,jx\bar{x}\bar{t}}\\
&=hk\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{M}a_{i,j}\{(u_{i,jx\bar{x}}{}^2)_{\bar{t}}+k(u_{i,jx\bar{x}\bar{t}})^2\}\\
&\geq hk\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{M}a_{i,j}(u_{i,jx\bar{x}}{}^2)_{\bar{t}}\\
&=h\sum_{i=1}^{N-1}a_{i,M}u_{i,Mx\bar{x}}{}^2+h\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{M-1}(a_{i,j}-a_{i,j+1})u_{i,jx\bar{x}}{}^2-h\sum_{i=1}^{N-1}a_{i,2}u_{i,1x\bar{x}}{}^2\\
&\geq\mu_1||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_M^2-\mu k\sum_{j=2}^{M-1}||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2-\mu_2||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_1^2
\end{aligned} \tag{3.22}$$

(3.19), (3.21) および (3.22) をまとめると

$$\begin{aligned}
&(1-k)||u_{\bar{t}}||_M^2+\mu_1||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_M^2\leq||u_{\bar{t}}||_1^2+u_2||\widetilde{\mu_{x\bar{x}}}||_1^2+k\sum_{j=2}^{M}||f||_j^2\\
&+k\{\sum_{j=2}^{M-1}||u_{\bar{t}}||_j^2+\sum_{j=2}^{M-1}||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2\}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

ここで

$$\mathrm{mix}(1-k,\ \mu_1)=\mu_5$$

$$\max(1,\ \mu)=\mu_6$$

$$||u_{\bar{t}}||_1^2+\mu_2||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_1^2+k\sum_{l=2}^{j}||f||_l^2=g_j$$

$$||u_{\bar{t}}||_j^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2=f_j$$

とおき補題3を (3.23) に適用すれば

注) * ここで得られた解の安定のための条件 $1-8\mu_2\gamma^2-(k/2)\geq\sigma>0$ は a=const の場合にこれまで得られた条件から推論されたものより強くなっている。「付録II」参照

なお，安定の定義については「付録I」参照

$$f_M \leq g_M \exp[(\mu_6/\mu_5)(M-2)k] \tag{3.24}$$

が成りたつ。

ここで $f_j \equiv |||u|||_j^2$ により新たにノルムを導入すれば (3.24) より次の無条件安定の定理が導かれる。

定理 2.

implicit な差分方程式 (2.5) の初期条件 (2.8) および境界条件 (2.9.1a, b) のもとにおける解はノルム $|||u|||$ に関して一様有界である。

エネルギー不等式 (3.17) および (3.24) より差分解の微分方程式の解への収束は容易に証明できる。

定義

微分方程式 (2. 1) の初期条件 (2.2) および境界条件 (2.3.1)*のもとにおける解 $w(x, t)$ の格子点の上の値を $w_{i,j}$ とし，差分方程式の解 $u_{i,j}$ と $w_{i,j}$ により誤差関数 $\vartheta_{i,j}$ を格子点上で $\vartheta_{i,j}=w_{i,j}-u_{i,j}$ により導入する。その時差分方程式の解 $u_{i,j}$ が微分方程式の解に収束するというのは $\vartheta_{i,j}$ に適当なノルム $|||\vartheta|||$ を導入したとき

$$\lim_{k\to 0}|||\vartheta|||=0$$

となることをいう。

今，微分方程式の解 $w(x, t)$ は t に関して 4 階，x に関して 6 階導関数が有界とする。$w(x, t)$ を (2.4) に代入すれば

$$L_h{}^1 w_{ij} \equiv w_{i,jt\bar{t}}+(a_{i,j}w_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}+A_1{}^{**}(h^2+k^2)=f_{i,j} \tag{3.25}$$

初期条件 (2.8) 境界条件 (2.9.1a, b) から

$$w_{i,0}=u_{i,0} \tag{3.26}$$

$$w_{i,j}=u_{i,0}+A_2k^3 \tag{3.27}$$

$$w_{0,j}=w_{N,j}=0, \quad a_{0,j}w_{0,jx\bar{x}}=A_3h^2, \quad a_{N,j}w_{N,jx\bar{x}}=A_4h^2 \tag{3.28}$$

(3.25)～(3.28) からそれに対応する $u_{i,j}$ の式を引くことにより $\vartheta_{i,j}$ に関する差分方程式とその初期条件および境界条件が次のように得られる。

$$L_h{}'\vartheta_{i,j} \equiv \vartheta_{i,jt\bar{t}}+(a_{i,j}\vartheta_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}=A_1{}'(h^2+k^2) \tag{3.29}$$

$$\vartheta_{i0}=0 \tag{3.30}$$

$$\vartheta_{i1}=A_2k^3 \tag{3.31}$$

$$\vartheta_{0,j}=\vartheta_{N,j}=0, \quad a_{0j}\vartheta_{0,jx\bar{x}}=A_3h^2, \quad a_{N,j}\vartheta_{N,jx\bar{x}}=A_4h^2 \tag{3.32}$$

ここで $\vartheta_{i,j}$ のノルムとして $|||\vartheta|||_j^2=||\vartheta_t||_j^2+(1/2)(||\vartheta_{x\bar{x}}||_{j+1}^2+||\vartheta_{x\bar{x}}||_j^2)$ を取ればエネルギー不等

注) * 両端で (2.3.1) とする。

** A_i は constant である。

式 (3.17) より

$$|||\vartheta|||_j^2 \leq ch^2 \qquad 0 \leq j \leq M \tag{3.33}$$

ここで c は $A'_1, \cdots, A_4, \mu_3, \mu_4, t$ にのみ依存し，h，k に依存しない定数である。(3.33) から次の収束定理が導かれる。

定理 3.

差分方程式 (2.4) の (2.8)，(2.9.1a) および (2.9.1b) のもとにおける解は微分方程式 (2.1)，(2.2) および(2.3.1)のもとにおける解が十分になめらかならば*その解にh^2の収束率で収束する。 implicit type の差分方程式 (2.5) についても同様な方法で同様な収束定理が導かれる。

4. 種々の境界条件のもとでのエネルギー不等式

「3」において証明の簡単のために格子点関数の空間を S_{11}^j に限ったが (すなわち，境界条件を両端で単純支持とした。)，ここでは境界条件の任意の組合せのもとでのエネルギー不等式について考える。そのためには $S_{2,3}^j$ および $S_{3,2}^j$ について考えれば十分であって，その他の組合せについては，「3」の議論と本章の議論から明らかとなる。

まず $S_{2,3}^j$ について考える。すなわち境界条件は左端がはめ込み，右端が自由である場合である。

差分方程式は

$$L_h^1 u_{i,j} = f_{i,j} \qquad (x_i, t_j) \in \Omega_{2,N-1}^{1,M-1} \tag{2.4$'$}$$

$$L_h^2 u_{i,j} = f_{i,j} \qquad (x_i, t_j) \in \Omega_{2,N-1}^{1,M-1} \tag{2.5$'$}$$

境界条件は (2.9.2a) および (2.9.3b) であり，初期条件は境界条件に適合するように $\Delta_{0,N+1}^0, \Delta_{0,N+1}^1$ 上で定める。

(2.4)$'$ の解のエネルギー不等式の証明は次の等式

$$2hk\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1} u_{i,j\hat{t}} L_h^1 u_{i,j} = 2hk\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1} u_{i,j\hat{t}} f_{i,j} \tag{4.1}$$

から出発するノルムを

$$||f||_j^2 = \langle f, f \rangle_{0,N-1}^j$$

$$||\tilde{f}||_j^2 = \langle f, f \rangle_{1,N-2}^j$$

と定めれば「3」の場合と同様に (4.1) より

$$k\sum_{j=1}^{M-1}(||f||_j^2 + ||u_{\hat{t}}||_j^2) \geq ||u_t||_{M-1}^2 - ||u_t||^2 + 2hk[\sum_{j=1}^{M-1}\{a_{-1,j}u_{0,j\hat{t}}u_{-1,jx\bar{x}}$$

$$-2a_{0,j}u_{0,j\hat{t}}u_{0,jx\bar{x}} + a_{0,j}u_{1j\hat{t}}u_{0,jx\bar{x}} + a_{N,j}u_{N-1j\hat{t}}u_{N,jx\bar{x}} - 2a_{N-1,j}u_{N-1,j\hat{t}}u_{N-1jx\bar{x}}$$

$$+a_{N-1,j}u_{N-2,j\hat{t}}u_{N-1,jx\bar{x}}\} + \sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=2}^{N-2} a_{i,j}u_{i,j\hat{t}x\bar{x}}u_{i,jx\bar{x}}\} \tag{4.2}$$

注) * 十分なめらかな解が存在するためには方程式の係数，非斉次項，初期条件に関してここで述べられているよりもっと強い条件が必要となる。

境界条件（2.9.2a）より

$$u_{0,j\hat{t}}=u_{1,j\hat{t}}=0 \tag{4.3}$$

（2.9.3b）より $a_{i,j}\neq 0$ を使えば

$$u_{0,jx\bar{x}}=u_{N-1,jx\bar{x}}=0 \tag{4.4}$$

（4.3）および（4.4）から（4.2）の右辺の {……} の中は0となり，

$$k\sum_{j=1}^{M-1}(|u|_{\hat{t}}||_j^2+||f||_j^2)\geq ||u_t||_{M-1}^2-||u_t||_0^2+2hk\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-2}a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}}f_{i,jx\bar{x}\hat{t}}$$

が導かれる。これからエネルギー不等式の証明Ⅲと同様にできる。同じことが（2.5）についてもいえる。

境界条件が左端で自由，右端ではめ込みの場合差分方程式は

$$L_h^1u_{i,j}=f_{i,j}, \quad (x_i,t_j)\epsilon\Omega_{1,N-2}^{1,M-1} \tag{2.4}''$$

$$L_h^2u_{i,j}=f_{i,j}, \quad (x_i,t_j)\epsilon\Omega_{1,N-2}^{2,M} \tag{2.5}''$$

となる。境界条件は（2.9.3a）および（2.9.2b）であって初期条件は境界条件と適合するように（2.8）により $\Delta_{-1,N}^0$ および $\Delta_{-1,N}^1$ の上で定義される。ノルムを

$$||f||_j^2=\langle f,f\rangle_{1,N}^j$$

$$||\widetilde{f}||_j^2=\langle f\ f\rangle_{2,N-1}^j$$

と定義すれば（2.4）″および（2.5）″の初期値—境界値問題の解に対するエネルギー不等式は，$S_{2,3}^j$ の場合と同様に導かれる。

5. 一様有界および収束ノルム

これまでに導かれた差分方程式の初期値—境界値問題の解の一様有界性および差分解の微分方程式の解への収束は差分方程式が explicit type の場合は $|||u|||=||u_t||_j^2+\frac{1}{2}(||u_{x\bar{x}}||_{j+1}^2+||u_{x\bar{x}}||_j^2)$ の型のノルムで，差分方程式が implicit type の場合は $|||u|||=||u_t||_j^2+||u_{x\bar{x}}||_j^2$ の型のノルムで証明された。本章では以上の結果から差分解の一様有界性と収束が境界条件の種類に対応して別のノルムについてもいえることを示す。

$S_{1,1}$ の場合

これまでの結果から $||f||_j^2=k\sum_{i=0}^{N}f_{i,j}^2$，$||\widetilde{f}||_j^2=h\sum_{i=1}^{N-1}f_{i,j}^2$ としたとき $||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2$ が一様有界，したがって境界条件から $||u_{x\bar{x}}||_j^2$ も一様有界である。

補題4

$S_{1,1}^j$ において

$$A||u||_j^2\leq||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2$$

である。ここで A は h と k に依存しない正数である。

証明

今, $u=(u_{1,j},u_{2,j},\cdots,u_{N-1,j})$ とおくと

$$||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2=h\sum_{i=1}^{N-1}u_{i,jx\bar{x}}\cdot u_{i,jx\bar{x}}=h<Au,Au>=h<u,A^*Au>$$

$$A=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}-2, & 1 & & & 0\\ 1, & -2, & 1 & & \\ & & & & \\ & & 1, & -2, & 1\\ 0 & & & 1, & -2\end{pmatrix}$$

$$AA^*=A^*A=\frac{1}{h^4}\begin{pmatrix}5, & -4, & 1 & & \\ -4, & 6, & -4, & 1 & \\ 1, & -4, & 6, & -4, & 1\\ & & & & \\ & & & 1, & -4, & 5\end{pmatrix}$$

ここで A^*A の固有値と大きさの順に $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_{N-1}$ と並べたとき

$$\lambda_1=\min_{u}\frac{<u,A^*Au>}{<u,u>}$$

ゆえに $\lambda_1\leq<u,A^*Au>/<u,u>$ である。A^*A の固有値は $(16/h^4)\sin^4(ih\pi)/2\ (i=1\cdots N-1)$, したがって

$$\lambda||\widetilde{u}||_j^2\leq||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2$$

境界条件から

$$\lambda_1||u||_j^2\leq||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2$$ 証明終

補題4とエネルギー不等式から (2.4) および (2.5) の初期値—境界値問題はそれぞれ

$|||u|||_j^2=||u_t||_j^2+\frac{1}{2}(||u||_{j+1}^2+||u||_j^2+||u_{x\bar{x}}||_j^2+||u_{x\bar{x}}||_j^2)$ のノルムおよび

$|||u|||=||u_{\bar{t}}||_j^2+||u||_j^2+||u_{x\bar{x}}||_j^2$ のノルムに関して一様有界である。

$S_{2,2}^j$ の場合

エネルギー不等式から $||f||_j^2=h\sum_{i=0}^{N}f_{i,j}^2$, $||\widetilde{f}||_j^2=h\sum_{i=1}^{N-1}f_{i,j}^2$ としたとき $||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2$ が一様有界*, したがって境界条件から $||u_{x\bar{x}}||_j^2$ も一様有界である。

補題5

$S_{2,2}^j$ において

$$||u||_j^2\leq||\hat{u}_x||_j^2\overset{**}{\leq}||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2$$

証明

$u_{i,j}\epsilon S_{2,2}^j$ より $u_{i,j}=h\sum_{l=1}^{i-1}u_{l,jx}$, $u_{ix}=h\sum_{l=1}^{i}u_{l,jx\bar{x}}$ ゆえに schwartz の不等式から

注) * $S_{i,2}^j$ の場合のエネルギー不等式とそのノルムは「4」の議論から明かであろう。

** $||\hat{u}_x||_j^2=h\sum_{i=0}^{N-1}u_{ijx}^2$ である。

$$||\widetilde{u}||_j^2=h\sum_{i=1}^{N-1}u_{i,j}^2=h\sum_{i=1}^{N-1}(h\sum_{l=1}^{i-1}u_{l,jx})^2\leq h^3\sum_{i=1}^{N-1}(\sum_{l=1}^{i-1}1^2)$$
$$\times(\sum_{l=1}^{i-1}u_{l,jx}{}^2)\leq h\sum_{i=1}^{N-1}\widetilde{u_{i,jx}}{}^2=||u_x||_j^2$$

同様にして $||\widetilde{u_x}||_j^2\leq||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2$ も証明できる。しかるに $u_{i,j}\epsilon S_{2,2}^j$ より $||\widetilde{u_x}||_j^2=||\hat{u}_x||_j^2$, $||\widetilde{u}||_j^2=||u||_j^2$ である。 証明終

補題5から (2.4) および (2.5) の解は $S_{2,2}^j$ においては $|||u|||_j^2=||u_t||_j^2+(1/2)(||u||_{j+1}^2+||u||_j^2+||\hat{u}_x||_{j+1}^2+||\hat{u}_x||_j^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_{j+1}^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2)$ のノルム, $|||u|||_j^2=|||u_{\bar{t}}||_j^2+||u||_j^2+||\hat{u}_x||_j^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2$ のノルムに関して一様有界である。*

$S_{2,1}^j$, $S_{2,3}^j$, $S_{1,2}^j$ および $S_{3,2}^j$ の場合についてもそれぞれに関するエネルギー不等式とそのノルムおよび補題5から $S_{2,2}^j$ の場合と同様な結果が得られる。

$S_{3,3}^j$, $S_{3,1}^j$ および $S_{1,3}^j$ の場合については補題4および補題5は適用できない。(したがって一様有界のノルムは「3」および「4」のままである)。しかしながら $S_{3,3}^j$ の場合 $a(x,t)$ が x に依存しない, すなわち $a=a(t)$ かつ $f_{x\bar{x}}$ が一様に有界ならば $u_{x\bar{x}}=z$ とおき (2.4) または (2.5) の2階差分商を取ることにより (2.4) および (2.5) はそれぞれ

$$L'^1_h z_{i,j}\equiv z_{i,jt\bar{t}}+(a_j z_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}=f_{i,jx\bar{x}} \tag{5.1}$$

$$L'^2_h z_{i,j}\equiv z_{i,j\bar{t}\bar{t}}+(a_j z_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}=f_{i,jx\bar{x}} \tag{5.2}$$

となり, これは (2.4) とよび (2.5) と同じ形である。

$\mu_{i,j}$ に対する境界条件が $S_{3,3}^j$ であるから $z_{i,j}$ に対する境界条件は $S_{2,2}^j$ となり, この境界条件のもとでの (5.1) および (5.2) のエネルギー不等式から

$$||\widetilde{z_{x\bar{x}}}||_j^2=||\widetilde{u_{xx\bar{x}\bar{x}}}||_j^2 \qquad (||\widetilde{z_{x\bar{x}}}||_{j+1}^2+||\widetilde{z_{x\bar{x}}}||_j)=(1/2)(||\widetilde{u_{xx\bar{x}\bar{x}}}||_{j+1}^2+||\widetilde{u_{xx\bar{x}\bar{x}}}||_j^2)$$

の一様有界性が結論できる。

補題6

$S_{3,3}^j$ において

$$||\widetilde{u}||_j^2\leq||\widetilde{u_{xx\bar{x}\bar{x}}}||_j^2$$

がなりたつ。

補題6の証明は補題4と同様にしてできる。この補題から $S_{3,3}^j$ においても a が t のみの関数で $f_{x\bar{x}}$ が一様に有界ならば (2.4) および (2.5) の解はそれぞれ $|||u|||_j^2=||u_t||_j^2+(1/2)(||\widetilde{u}||_{j+1}^2+||\widetilde{u}||_j^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_{j+1}^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2)$ のノルムおよび $|||u|||_j^2=||u_{\bar{t}}||_j^2+||\widetilde{u}||_j^2+||\widetilde{u_{x\bar{x}}}||_j^2$ のノルムで一様有界であることが結論できる。

注) * 補題5と同じに $||u||_j^2\leq||\hat{u}_{\bar{x}}||_j^2\leq||\widetilde{u_{xx}}||_j^2$ も証明できるから $||\hat{u}_x||$ を $||\hat{u}_{\bar{x}}||$ または $||\hat{u}_x||$ を $||\hat{u}_{\bar{x}}||$ でおきかえてもよい。このとき $||u_{\bar{x}}||=h\sum_1^N u_{i,j\bar{x}}$ である。また $||u_{\bar{x}}||^2=h\sum_{i=1}^{N-1}u_{i,j\bar{x}}^2$ である。

6. 低位の項を含む差分方程式に対するエネルギー不等式

前章までに取り扱かった差分方程式はすべて (2.1) の偏微分方程式に対するものであったが，本章では次の形の方程式

$$L\mu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=F(x,t,q,r) \tag{6.1}$$

に対する近似差分方程式の初期値—境界値問題の解に対するエネルギー不等式を導く。ここで，$q=u_t$, $r=u_{xx}$ である。初期条件は (2.8) とし，境界条件は両端で単純支持，すなわち (2,9,1 a，b) とする。

まず，方程式の右辺に対して次の仮定をおく。

関数 $F(x,t,q,r)$ は x，t，q および r の連続関数であって，すべての q および r に対して F_q および F_r は有界，すなわち

$$\sup_q|F_q|<M_q<\infty,\quad \sup_r|F_r|<M_r<\infty \tag{6.2}$$

である。すると

$$F(x,t,u_t,u_{xx})=f(x,t)+\widetilde{F}_q u_t+\widetilde{F}_r u_{xx} \tag{6.3}$$

である。ここで $\widetilde{F_q}$ および $\widetilde{F}_r$ はそれぞれ F_q および F_r の 0 と u_t，0 と u_{xx} の間の適当な中間値での値であり（中間値の定理），$f(x,t)=F(x,t,0,0)$ である。

「3」の議論から明かなようにエネルギー不等式の証明においてここで問題になるのは右辺の評価のみである。今，(6.1) に対する差分方程式として implicit type のものを考える。explicit type のものに対するエネルギー不等式も同様に導びかれる。

$$L_h^2 u_{i,j}\equiv u_{i,j\bar{t}\bar{t}}+(a_{ij}u_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}=F(x_i,t_j,u_{i,j\bar{t}},u_{i,jx\bar{x}})$$
$$(x_i,t_j)\in\Omega^{2,M}_{1,N-1} \tag{6.4}$$

前と同じく等式

$$2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}L_h^2u_{i,j}=2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}F_{i,j} \tag{6.5}$$

について考える。左辺については「3」と同じ，右辺については (6.2) および (6.3) を考慮することにより

$$2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}F_{i,j}\leq k\left(\sum_{j=2}^{M}\{\|f\|_j^2+(1+M_q+M_r)\|u_{\bar{t}}\|_j^2+M_r\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_j^2\}\right) \tag{6.6}$$

左辺は「3」より

$$2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}L_h^2u_{i,j}\geq\|u_{\bar{t}}\|_M^2-\|u_{\bar{t}}\|_1^2+\mu_1\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_M^2-\mu_2\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_1^2-\mu k\sum_{j=2}^{M}\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_j^2 \tag{6.7}$$

(6.6) および (6.7) より

$$\{1-k(1+M_q+M_r)\}\|u_t\|_M^2+(\mu_1-kM_r)\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_M^2$$
$$\leq\|u_{\bar{t}}\|_1^2+\mu_2\|u_{x\bar{x}}\|_1^2+k\sum_{j=2}^{M}\|f\|_j^2+(M_r+\mu)k\sum_{j=2}^{M-1}\|u_{x\bar{x}}\|_j^2$$

$$+(1+M_q+M_r)k\sum_{i=2}^{M-1}\|u_{\bar{t}}\|_j^2 \tag{6.8}$$

$$1-k(1+M_q+M_r)\geq\sigma_1>0,\quad \mu_1-kM_r\geq\sigma_2>0$$

なるようにkを十分小さくとり

$$\min(\sigma_1,\sigma_2)=\mu_3$$

$$\max(1+M_q+M_r,M_r+\mu)=\mu_4$$

とし，f_i および g_j を「3」のようにとれば補題3より

$$f_M\leq g_M\exp[(\mu_4/\mu_3)(M-2)k] \tag{6.9}$$

がなりたつ。(エネルギー不等式)

注意

(6.4) の形の方程式に関するエネルギー不等式は境界条件が任意の場合にはここの方法と同一の方法で常に証明できることとは限らない。そのときには境界条件の形に応じて種々の証明法が考えられるがその変化を一つ一つ取り上げることはやめる。

7. 結　　言

論文は物理的に考えられる任意の境界条件のもとにおいて一般的な弾性振動方程式に対する二つの典型的な近似差分方程式の研究を行ない，次の結論を得た。

(1) 熱伝導および波動方程式に対する差分近似方程式において導かれたと同様なエネルギー不等式がこれら差分方程式の場合にも導かれる。

(2) エネルギー不等式から explicit type の差分方程式は条件付安定であり，implicit type の差分方程式の無条件安定であること。

(3) 解の安定性から差分解の微分方程式の解の収束は微分方程式の解に十分のなめらかさがあれば容易に得られること。

(4) 方程式が半線型の場合でも，半線型に適当な条件をつければエネルギー不等式は容易に得られ，したがってそこから解の安定性，収束性も得られる。

文　　献

1) L. Collatz; Zur Stabilitätdes Differenzen verfahrens bei der Stab schwingungsgleichung., Z. A. M. M, Bd 31 Nr. 11/12 1951 pp 392～393.

2) J. Todd; A Direct Approach to the problem of Stability in the Numerical Solution of partial Differential Eqations, C. P. A. M, vol. 9 1956 299～314.

3) R. D. Richtmeyer; Difference methods for initial-value problems 1957 pp 173～188, Interscience Pub.

4) M. Lees; Approximate Solutions of Parabolic Equations, J. Soc. Indust. Appl. math. vol 7,

1959 pp 167～183

5) M. Lees; Von Noumann Difference Approximation to hyperbolic Equations. Pacific J. math vol 10, 1960, pp 213～222

6) M. Lees. A-priori Estimate for the Solutions of Difference approximations to parabolic Differential Equations, Duke math. J. vol 27, 1960, 297～311.

7) N. Bazley and D. W. Fox; methods for Lower Bounds to Frequencies of Continuous Elastic Systems. Z. A. M. P, vol 17, 1966 pp.1～37

付　　録 I

(2. 1) および (2. 5) の $S^{i}_{1,1}$ および $S^{j}_{2,3}$ における行列型を示す。

$S^{i}_{1,1}$ において (2. 4), (2. 5) はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \\ \\ u_{N-2,j+1} \\ u_{N-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\gamma^2(4a_{1,j}+a_{2,j}), & 2\gamma^2(a_{1,j}+a_{2,j}), -\gamma^2 a_{2,j} & & & 0 \\ 2\gamma^2(a_{1,j}+a_{2,j}), & 2-\gamma^2(a_{1,j}+4a_{2,j}+a_{3,j}), & 2\gamma^2(a_{2,j}+a_{3,j}), -r^2 a_{3,j} & & \\ -\gamma^2 a_{2,j}, & 2\gamma^2(a_{2,j}+a_{3,j}), & 2-\gamma^2(a_{2,j}+4a_{3,j}+a_{4,i}), & 2\gamma^2(a_{3,j}+a_{4,j}), & -\gamma^2 a_{4,j} \\ \\ \\ 0 & -\gamma^2 a_{N-3,i}, & 2\gamma^2(a_{N-3,i}+a_{N-2,i}), & 2-\gamma^2(a_{N-3,j}+4a_{N-2,j}+a_{N-1,j}, & 2\gamma^2(a_{N-2,j}+a_{N-1,j}) \\ & & -\gamma^2 a_{N-2}, & 2\gamma^2(a_{N-1,j}+a_{N-1,j}), & 2-\gamma^2(4a_{N-1}+a_{N-1,j}+a_{N-2,j}) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{N-2,j} \\ u_{N-1,j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2 f_{1,j}-u_{1,j-1} \\ k^2 f_{2,j}-u_{2,j-1} \\ \\ \\ k^2 f_{N-2,j}-u_{N-2,j-1} \\ k^2 f_{N-1,j}-u_{N-1,j-1} \end{pmatrix} \tag{2. 4}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\gamma^2(4a_{1,j+1}+a_{2,j+1},), -2\gamma^2(a_{1,j+1}+a_{2,j+1}), & \gamma^2 a_{2,j+1} & & & 0 \\ -2\gamma^2(a_{1,j-1}+a_{2,j+1}), & 1+\gamma^2(a_{1,j+1}+4a_{2,j+1}+a_{3,j+1})-2\gamma^2(a_{2,j+1}), & \gamma^2 a_{1,j+1} & & \\ \gamma^2 a_{2,j+1}, & -2\gamma^2(a_{2,j+1}+a_{3,j+1}), & 1+\gamma^2(a_{2,j+1}+4a_{3,j+1}+a_{4,j+1})-2\gamma^2(a_{3,j+1}+a_{4j+1}), & \gamma^2 a_{4,j+1} & \\ \\ \\ \gamma^2 a_{N-3,j+1}, & -2\gamma^2(a_{N-3,j+1}+a_{N-2,j+1}), & 1+\gamma^2(a_{N-3,j+1}+4a_{N-2,j+1}+a_{N-1,j+1}), & -2\gamma^2(a_{N-1,j+1}+a_{N-1,j+1}) & \\ 0 & & \gamma^2 a_{N-1,j+1}, & -2\gamma^2(a_{N-3,j+1}+a_{N-1,j+1}), & 1+\gamma^2(a_{N-3,j+1}+4a_{N-2,j+1}) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{N-1,j+1} \\ u_{N-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{1,j}-u_{1,j-1}+k^2 f_{1,j+1} \\ 2u_{1,j}-u_{2,j-1}+k^2 f_{2,j+1} \\ \\ \\ 2u_{N-2,j}-u_{N-2,j-1}+k^2 f_{N-2,j+1} \\ 2u_{N-1,j}-u_{N-1,j-1}+k^2 f_{N-1,j+1} \end{pmatrix} \tag{2. 5}$$

$S^{j}_{2,3}$ においては

$$\begin{pmatrix} u_{2i+1} \\ u_{3j+1} \\ u_{4j+1} \\ \vdots \\ u_{N-2j+1} \\ u_{N+1j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\gamma^2(a_{j,}+4a_{2,j}+a_{3,i}), & 2\gamma^2(a_{2,i}+a_{3,i}), & -\gamma^2 a^{\varepsilon}{}_{,j} & & & 0 \\ 2\gamma^2(a_{2,j}+b_{3,j}), & 2-\gamma^2(a_{2,j}+4a_{,j}+a_{4,j}), & 2\gamma^2(a_{3,j}+a_{4,j})-\gamma^2 a_{4,i} & & & \\ -\gamma^2 a_{3,j} & 2\gamma^2(a_{3,j}+a_{4,j}), & 2-\gamma^2(a_{3,j}+4a_{4,j}+a_{5,j}), & 2\gamma^2(a_{4,j}+a_{5,j}), & -\gamma^2 a_{5,j} & \\ & & & & & \\ 0 & -\gamma^2 a_{N-3,j}, & 2(a_{N-2,j}+a_{N-3,j}), & 2-\gamma^2(4a_{N-2j}+a_{N-3,j}), & 2\gamma^2 a_{N-2,j} & \\ & & -\gamma^2 a_{N-2,j} & 2\gamma^2 a_{N-2,i} & 2-\gamma^2 a_{N-2,j} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2j} \\ u_{3,j} \\ u_{4,j} \\ \vdots \\ u_{-N2,j} \\ u_{N-1,j} \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} k^2 f_{2,j}-u_{2j-1} \\ k^2 f_{3,j}-u_{3j-1} \\ k^2 f_{4j}-u_{4j-1} \\ \\ k^2 f_{N-1,j}-u_{N-2,j-1} \\ k^2 f_{N-}{}^{1}{}_{,j}-u_{N-1,j-1} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\gamma^2(a_{1,j+1}+4a_{2,j+1}+a_{3,j+1}), & -2\gamma^2(a_{2,j+1}+a_{3,j+1}), & \gamma^2 a_{3j+1} & & & 0 \\ -2\gamma^2(a_{2,j+1}+a_{3,j+1}), & 1+\gamma^2(a_{2,j+1}+4a_{3,j+1}+a_{4,j+1}), & -2\gamma^2(a_{3,j+1}+a_{4,i+1}), & \gamma^2 a_{4,j+1} & & \\ \gamma^2 a_{3,i+1}, & -2\gamma^2(a_{3j+1}+a_{4,j+1}), & 1+\gamma^2(a_{3,j+1}+4a_{4,j+1}+a_{5,j+1}), & -2\gamma^2(a_{4j+1}+a_{5,j+1}), & \gamma^2 a_{5,j+1} & \\ & & & & & \\ 0 & \gamma^2 a_{N-3,j+1}, & -2\gamma^2(a_{N-2,j+1}+a_{N-3,j+3}), & 1+\gamma^2(4a_{N-2,j+1}+a_{N-3,j+1}), & -2\gamma^2 a_{N-2,j+1} & \\ & & \gamma^2 a_{N-2,j+1} & -2\gamma^2 a_{N-2j+1} & 1+\gamma^2 a_{N-2,j+1} & \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ u_{4,j+1} \\ \vdots \\ u_{N-2,j+1} \\ u_{N-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 f_{2,j+1}+2u_{2,j}-u_{2,j-1} \\ k^2 f_{3,j+1}+2u_{3,j}-u_{3,i-1} \\ \vdots \\ \\ k^2 f_{N-2j+1}+2u_{N-3,j}-u_{N-2,i-1} \\ k^2 f_{N-1,j+1}+2u_{N-1,j}-u_{N-1,j-1} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

付　　録 Ⅱ

差分方程式

$$L_h u_{i,j}=f_{i,j} \qquad (x_i, t_j)\in\widetilde{\Omega}_h \tag{Ⅱ.1}$$

の初期条件

$$l_h^m u_{i,0}=\varphi_i^m \qquad (x_i, t_j)\in\widetilde{\Delta_h^0} \quad m=1,2,\cdots\cdots,m_0 \tag{Ⅱ.2}$$

境界条件

$$T_n^{n_1} u_{0,j}=\psi_j^{n_1} \qquad n_1=1,2,\cdots\cdots,n_{1,0} \tag{Ⅱ.3}$$

$$T_h^{n_2} u_{N,j}=\psi_i^{n_2} \qquad n_2=1,2,\cdots\cdots,n_{2,0} \tag{Ⅱ.3$'$}$$

において $u_{i,j}$, $f_{i,j}$ および φ_i の空間にノルムを導入し，それをそれぞれ $||u||_U$, $||f||_F$ および $||\varphi||_\Phi$ とする。すると差分方程式の初期値—境界値問題の解の安定性は境界条件を満足する格子点関数の空間において次のように定義される。すなわち h と k に依存しない定数 C が存在して

$$\|u\|_U \leq C(\|f\|_F + \|\varphi\|_E) \qquad (\text{Ⅱ}.4)$$

なるとき，差分方程式の解は安定である。

付　　録　Ⅲ

L. Collatyz は弾性振動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \qquad K\text{は定数} \qquad (\text{Ⅲ}.1)$$

の両端単純支持のもとにおける解を求めるために差分方程式

$$u_{i,jt\bar{t}} + Ku_{i,jxx\bar{x}\bar{x}} = 0 \qquad (\text{Ⅲ}.2)$$

の解の安定性について研究している[1]。彼は安定性の定義として次のものを取る。“差分方程式（Ⅲ.2）が安定であるとはある $j=j_0$ 段階で生じた誤差が $j\to\infty$ において有界であることをいう。

安定性の条件を得るために彼は（Ⅲ.2）の境界条件を満足する次の形の特解を求める。

$$v_{i,j} = \sum_{v=1}^{N-1} \sin j\xi v(A_v e^{(j-p)} + B_v e^{-(i-p)\gamma v}) \qquad (\text{Ⅲ}.3)$$

そして $i=j_0$ で生じた誤差も（Ⅲ.3）の形をしていることから安定性の条件として

$$2\gamma^2(\cos\xi_v - 1) \leq 2 \Rightarrow \gamma^2 \leq \frac{1}{4}$$

を導いている。ここで $\gamma^2 = k^2/kh^4$ である。

J. Todd は Collatz と同じ問題に対して２つの差分方程式

$$u_{i,jt\bar{t}} + u_{i,jxx\bar{x}\bar{x}} = 0 \qquad (\text{Ⅲ}.4)$$

$$u_{i,jt\bar{t}} + \frac{1}{4}(u_{i,j+1xx\bar{x}\bar{x}} + 2u_{i,jxx\bar{x}\bar{x}} + u_{i,j+1xx\bar{x}\bar{x}}) = 0 \qquad (\text{Ⅲ}.5)$$

の安定性条件を求めている[2]。

彼は差分方程式の解が安定であるというのは差分方程式の解が一様有界であることであると規定し，差分方程式の解を差分方程式から生じた行列の固有関数で展開し，スペクトル写像定理を用いることにより安定条件を求めている。それによれば（Ⅲ.4）の解が安定であるためには $\gamma^2 \leq \frac{1}{4}$ が必要であり（Ⅲ.5）は無条件安定である。

R. D. Richtmeyer は Difference methods for initial value problems の第９章で弾性振動方程式（Collatz, Todd と同じ）の境界条件 $u(x_1 t) = u(x+2L, t) = u(-x, t)$ のもとにおける解に対する差分近似について研究している。ここで L は棒の長さである。

彼はまず方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \qquad (\text{Ⅲ}.6)$$

と分解する。ここで $\vartheta = \partial u/\partial t$，$a\partial^2 u/\partial x^2 = w$ である。（Ⅲ.6）に対して二つの差分方程式

$$\vartheta_{i,jt} = -a w_{i,jx\bar{x}} \quad , \quad w_{i,jt} = a v_{ij+1x\bar{x}} \tag{Ⅲ.7}$$

および

$$\vartheta_{i,jt} = -(a/2)(w_{ij+1x\bar{x}} + v_{i,jx\bar{x}}) \tag{Ⅲ.8}$$

$$w_{i,jt} = (a/2)(\vartheta_{ij+1x\bar{x}} + v_{i,jx\bar{x}})$$

を考える。Ⅲ. 7は（Ⅲ. 2),（Ⅲ. 4）と同じである。安定性の定義として彼は解の一様有界性をとり，その条件を得るために解をフーリエ展開し，それから生じた行列の固有値の絶対値の大きさを調べその結果（Ⅲ7）は $\gamma^2 \leq (1/4)$ のときに安定，（Ⅲ.8）は無条件安定であることを示している。

航空宇宙技術研究所報告117号

昭和41年10月発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171（代表）

印刷所　株式会社　東京プレス
東京都板橋区桜川2～27～12