

UDC 533. 69. 01 :  
533. 692. 3.

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-247

任意物体のまわりの自由流線理論

高 橋 侔

1971年9月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- |        |  |          |   |
|--------|--|----------|---|
| TR-225 | NAL-35 DT 型ロケットの構造試験<br>Results of Structural Experiments on NAL-35 DT Rocket Vehicle  | 1970年11月 | ロケット構造研究グループ  |
| TR-226 | 薄い片持後退角翼の遷音速フラッタ特性におよぼす集中質量の位置の影響について<br>Some Effects of Systematically Varied Location of One Concentrated Mass on Transonic Flutter Characteristics of Sweptback Thin Cantilever Wings   | 1970年11月 | 中井 暎一, 森田 甫之<br>高木 俊朗                               |
| TR-227 | 高負荷燃焼器の空気孔からの流れについて (II)<br>—二孔の実験および簡単な解析方法—<br>Investigation of Air Stream from Combustor-Liner Air-Entry Holes (II)<br>—Experiments with Paired Air-Entry Holes and A Numerical Analysis—   | 1970年12月 | 相波 哲朗, 井上 真幸  |
| TR-228 | 自由飛行模型 FFM-10 の運動特性と飛行試験におけるデータ処理法<br>Flight Dynamics of Free-Flight Model FFM-10 and Data Analysis Method for Free-flight Tests   | 1970年12月 | 高島 一明   |
| TR-229 | 単発 STOL 実験機 (FA-200 XS) について<br>Development of the FA-200 XS Experimental-Airplane   | 1970年12月 | 飛行実験部   |
| TR-230 | アナログトルク平衡方式による浮動振り型加速度計の研究<br>Study on the Analog Torque Rebalance Floated Pendulum Type Accelerometers for Guidance and Control Applications  | 1971年 1月 | 大月 正男, 鈴木 孝雄<br>円居 繁治                               |
| TR-231 | 高温タービンノズル翼二次元翼列試験 (第1報対流冷却翼の実験結果について)<br>Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle (Part I On the Experimental Results of a Convection-Cooled Blade   | 1971年 1月 | 吉田 豊明, 高原 北雄<br>能瀬 弘幸, 井上 重雄<br>三村 富嗣雄, 白井 弘        |
| TR-232 | 高温タービンノズル翼二次元翼列試験 (第2報対流冷却翼の数値計算およびアナログ法による翼表面温度分布について)<br>Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle (Port II On the Temperature Distributions of a Convection-Cooled Blade by Numerical Calculation and Analog Simulation Test | 1971年 1月 | 吉田 豊明, 高原 北雄<br>能瀬 弘幸, 井上 重雄<br>三村 富嗣雄, 白井 弘        |
| TR-233 | PSD 法の大気乱れに対する航空機強度設計への応用とその問題点<br>Studies on PSD Method to Aircraft Structural Design for Atmospheric Turbulence  | 1971年 1月 | 竹内 和之, 山根 皓三郎                                       |
| TR-234 | Green 関数をラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算<br>A Calculation of Temperature Distribution with Applying Green Function to Two-Dimensional Laplace's equation  | 1971年 1月 | 西村 英明   |
| TR-235 | 自動着陸予備実験 (1) 電波高度計の性能試験<br>Preliminary Experiments for Automatic Landing (1) On the Performance Tests of Radio Altimeters  | 1971年 4月 | 樋口 一雄, 堀川 勇壮<br>森 幹彦, 小川 鑛一<br>真柳 光美, 渡辺 顕<br>名越 孝行 |

# 任意物体のまわりの自由流線理論\*

高 橋 侩\*\*

## On the theory of free streamlines past arbitrary obstacles

By Hitoshi TAKAHASHI

### SUMMARY

The free streamline theory is used for obtaining the pressure distribution on an airfoil with flow separation. The analysis and computation of the flow field around a circular cylinder with flow separation has already been presented in the previous report (NAL TM-176). In this report, the theory of free streamline past a circular cylinder is extended to the case of an arbitrary obstacle by a numerical method. In these cases, the flow velocity along the free streamline is assumed to be equal to the free stream velocity.

Actually, the flow velocity at the separation point is not equal to the free stream velocity and the base pressure is different from the free stream pressure. Therefore, it is desirable to introduce the effects of base pressure in the theory. The classical method of calculation, due to Levi-Civita, is used and the correction is made to introduce the effects of base pressure.

According to this theory, it is easy to make analysis and computation on the flow field with different base pressure, even in the case of flow around arbitrary obstacles. Examples are presented for the computations of circular cylinders and airfoils with several base pressure and fair agreement is obtained between theory and experiment.

### 1. ま え が き

はく離を伴う翼の圧力分布を理論的に求めることは困難である。本報告においては、自由流線理論を用いて、この問題を解明しようと試みた。Levi-Civita<sup>1)</sup>の任意物体の回りの自由流線についての一般的表式を用いて、著者は実際に電子計算機で計算できるような逐次近似の手法をここで開発した。しかし、Levi-Civitaの方法は Kirchhoff が与えたように、はく離領域での圧力は一様流中の圧力に等しいという仮定を設けている。

一般には、はく離領域の圧力は一様流中の圧力と異なっているため、何らかの方法でこのような流れの領域を表現する必要がある。 $P_B$  をはく離直後の圧力、 $P_\infty$ 、 $U$  を一様流中の圧力、および速度として、 $C_{PB} = (P_B - P_\infty) / \frac{1}{2} \rho U^2$  を背圧圧力係数と定義すれば、Levi-Civita の表現は  $C_{PB} = 0$  の場合であり、実際の流れの場合は  $C_{PB} \neq 0$  である。そこで著者は背圧の効果を表わすため、従来の方法<sup>2)~7)</sup>と異なった方法を考えた。

この方法は電子計算機にて逐次計算を実行するのに都合の良い項を付け加えて、背圧の効果を与えるものである。理論モデルは流れが両はく離点で等しい速度、(これは一様流流速と異なる)、ではく離し、自由流線上で流速と流れの方向が同時に変化し、無限遠点にて一様流に等しくなり、また両はく離点間では圧力は一定であるものとした。本報告において、実験値との比較のため、円弧の回りの対称な流れと NACA 4412 翼型につき計算を行なった。円弧の場合でも、翼型の場合でもはく離後の物体表面上の圧力分布の実験値はほぼ一定の値を示しているため、このモデルを適用できる。本報告では、この実験値からはく離点の位置と背圧の大きさを推定して計算を行なった。円弧は対称の場合について行ない、はく離点の位置  $\beta_s$  を  $89^\circ$ 、 $105^\circ$ 、 $115^\circ$ 、それに対する背圧圧力係数を  $-0.96$ 、 $-0.86$ 、 $-0.40$  とし、実験値<sup>6),7)</sup>と計算値との良い一致を得た。また、翼型の場合は迎角を  $20^\circ$ 、 $24^\circ$ 、 $30^\circ$ 、それに対応する上面はく離点の位置と背圧圧力係数を  $5\%$ 、 $20\%$ 、 $50\%$  chord、 $-0.6$ 、 $-0.7$ 、 $-0.2$  として計算を行なった。実験値<sup>8)</sup>と計算値はかなり良く一致した。

\* 昭和 46 年 6 月 11 日受付

\*\* 新型航空機部

## 2. 記号

- $z$ : 物理面 (図 1-a)  
 $x, y$ : 物理面の二次元座標  
 $f$ : 複素ポテンシャル面 (図 1-b)  
 $\varphi, \psi$ : 速度ポテンシャル, 流れ関数  
 $\zeta$ : 単位半円の写像平面 (図 2)  
 $s$ :  $\zeta$  面の極座標表示の角度  
 $\xi$ :  $\zeta$  面の実軸座標  
 $s_0, M$ : 写像による実数未知定数 (1) 式  
 $U$ : 一様流流速  
 $q$ : 局所流速  
 $u, v$ :  $q$  の  $x, y$  成分  
 $\theta$ : 流れの方向  
 $C_{PB}$ : 背圧圧力係数  
 $C_P$ : 圧力係数  $1-(q/U)^2$   
 $\omega(\zeta)$ : 補助平面 (図 3)  
 $\theta, \tau$ :  $\omega$  面の二次元座標  
 $a_m$ : 実数未知係数 (15) 式  
 $\Psi$ : 物体の  $x$  軸に対する傾き角 (12) 式  
 $\phi$ :  $\Psi - a_0$   
 $L$ : 流れが当たっている物体表面全長  
 $l(s)$ : 物体表面に沿う長さ (16') 式  
 $K(s)$ : 物体の曲率 (17) 式  
 $\lambda(s)$ : パラメータ表示 (13) 式  
 $\varepsilon$ : 背圧に関するパラメータ  $\ln \kappa$

3. Levi-Civita の表現<sup>1), 2)</sup>

Curved obstacle を過ぎる自由流線の一般的表現は Levi-Civita により与えられている。この表現に著者が考案した背圧の効果を与える項を付け加えた。背圧を導入する方法には Roshko<sup>4)</sup> の notched method や Wu<sup>5)</sup>, Woods<sup>6)</sup>, Parkinson<sup>7)</sup> らの方法がある。しかし、これらはいずれも円弧やだ円弧の場合に用いることはできても、翼型のように複雑な形状をした物体に適用することは困難であり、また電子計算機にて計算を行なうのに不都合である。本報告において、著者はこれらの点を考慮して、計算しやすく、また実際の流れに即して、自由流線上においては流速も流れの方向も同時に変化する model を考えた。

図 1-a に物理面  $z$  を示す。よどみ点  $O$  を原点とし、一様流に平行に  $x$  軸を、これと直角方向に  $y$  軸をとる。流れの条件を次の様にする。

(i) 一様流流速  $U=1/\kappa$  とし、 $\kappa > 1$  とおく。 $\kappa$  を任意に与えれば、任意の大きさの背圧を与えることが

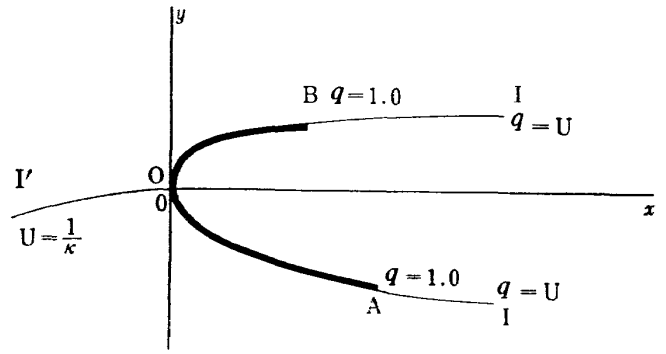


図 1-a z-plane

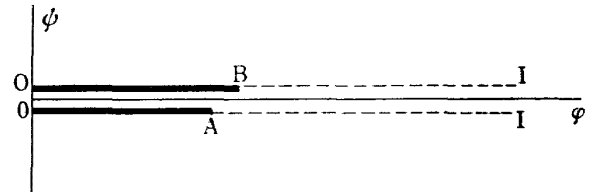


図 1-b f-plane

できる。

(ii) 図 1-a で分割流線は  $I'OAI$ ,  $I'OBI$  であり、これは流れ関数  $\psi=0$  に相当する。

(iii) 原点  $O$  にて速度ポテンシャル  $\varphi=0$  なるようにおく。

(iv)  $AI$ ,  $BI$  は自由流線で、この線上で速度および流れの方向は同時に変化する。

(v) はく離点  $A$ ,  $B$  での速度を  $1.0$  とおき、無限遠点にて一様流流速  $U$  に等しくなるものとする。また流れの方向も無限遠点にて一様流の方向を向くものとする。

(vi) 流れは非粘性、非回転、非圧縮性である。

(ii), (iii) の条件で複素ポテンシャル面  $f=\varphi+i\psi$  を表現すると、図 1-b に示されるようなものになる。いま、複素ポテンシャル面  $f$  を単位半円面  $\zeta$  (図 2) に、

$$f = M \left[ \cos s_0 - \frac{1}{2} (\zeta + 1/\zeta) \right]^2 \quad (1)$$

によって写像する。<sup>1)</sup> 物体表面  $AOB$  は  $\zeta$  面円周上  $AOB$  に、自由流線  $AI$ ,  $BI$  は  $\zeta$  面実軸に対応する。

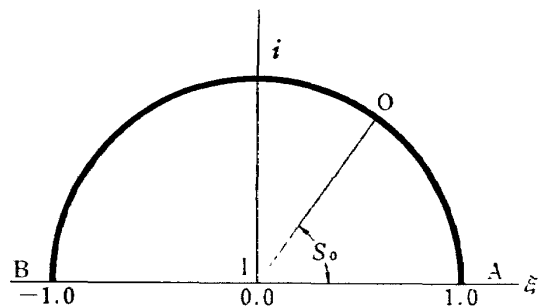


図 2 ζ-plane

ここで  $M, s_0$  は境界条件により定まる実数定数である。

次に補助平面  $\omega$  を定義する。<sup>1)</sup>

$$df/dz = e^{i\omega} \quad (2)$$

$df/dz = u - iv = qe^{-i\theta}$  であるから,  $\tau = \ln q = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $\theta = \tan^{-1}(v/u)$  とすれば,

$$\omega = \theta + i\tau \quad (3)$$

と表わせる。  $\varepsilon = \ln \kappa$  とおけば, 無限遠点にて流速  $q = 1/\kappa$ , 即ち  $\tau = -\varepsilon$  となり, またその点では  $\theta$  は 0 となる。自由流線上では流線  $q$  も流れの方向  $\theta$  も同時に変化するので,  $\omega$  面は図 3 のように表わせる。

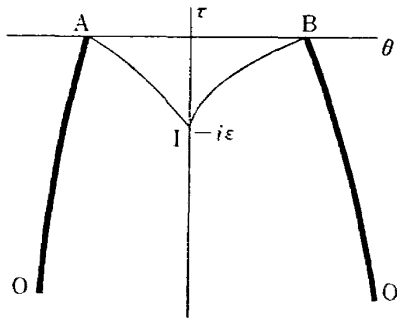


図 3  $\omega$ -plane

何らかの方法で  $\omega$  を  $\zeta$  の関数として決定できれば, (1), (2) より

$$\begin{aligned} dz &= e^{i\omega(\zeta)} \cdot df \\ &= e^{i\omega(\zeta)} \cdot (df/d\zeta) \cdot d\zeta \end{aligned} \quad (4)$$

または

$$\begin{aligned} z &= \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{i\omega(\zeta)} \cdot (df/d\zeta) d\zeta \\ &= \frac{M}{2} \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{i\omega(\zeta)} \cdot (\zeta + 1/\zeta - 2 \cos s_0) (1 - 1/\zeta^2) d\zeta \end{aligned} \quad (4)'$$

となり,  $f$  も  $z$  も共に  $\zeta$  の関数として定まり, これより  $f(z)$  の関係が得られるので流れのすべての性質が求まる。物体表面に沿っては  $\zeta$  面円周上  $\zeta = e^{is}$  に対応するから

$$z(s) = -2M \int_{s_0}^s e^{i\omega(e^{is})} \cdot (\cos s - \cos s_0) \sin s ds \quad (5)$$

を得る。

#### 4. 関数 $\omega(\zeta)$ の決定

この問題を解く鍵は  $\omega$  を  $\zeta$  の関数として, 仮定することである。一般的な表現は Levi-Civita により与えられている。さらに背圧の効果を与えるため著者は新しい項を付け加えた。 $\omega$  面は図 3 に示すような形になり, 従来の場合と自由流線上の取り扱いが異なる。

Levi-Civita による関数は  $a_m$  を実数係数として,

$$\omega(\zeta) = i \ln \left\{ (\zeta - e^{is_0}) / (\zeta e^{is_0} - 1) \right\} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^m$$

で表わされる。速度を表わす項は虚部で, 自由流線上では  $\zeta$  は実数であるから,  $\text{Im } \omega(\zeta)$  は 0 となる。

よって, 自由流線上に対応するいかなる  $\zeta$  に対しても, 速度は変化しない。そこで自由流線上で速度が変化するように  $ib(1 - \zeta^n)$  を付け加えた。ここで  $b$  は実数であり, これが背圧の効果を表わす項となる。次に, ここでいかなる  $n$  をとればよいかを考える。両はく離点は  $\zeta = \pm 1.0$  に対応し, またこの点では流速は 1.0, 即ち,  $\tau = 0$  となるものとしたから,  $\text{Im } \omega(\zeta) = \tau(\zeta)$  より, 両はく離点では,

$$\tau(1.0) = b \{ 1 - (1.0)^n \} = 0 \quad (b \neq 0)$$

$$\tau(-1.0) = b \{ 1 - (-1.0)^n \} = 0 \quad (b \neq 0)$$

である。よって,  $n$  は偶数でなければならぬ。簡単のため, 本報告では  $n=2$  の場合を採用した。以上の考察により  $\omega$  を次式により与える。

$$\omega(\zeta) = i \ln \left( \frac{\zeta - e^{is_0}}{\zeta e^{is_0} - 1} \right) + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^m + ib(1 - \zeta^2) \quad (6)$$

無限遠点にて流れは一様流に等しくなるので, この条件を考慮して  $b$  を決定する。無限遠点は  $\zeta=0$  に対応するので, (3), (6) および無限遠点での条件より,

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \theta + i\tau \\ &= -s_0 + a_0 + ib = -i\varepsilon \end{aligned}$$

よって

$$a_0 = s_0, \quad b = -\varepsilon \quad (7)$$

が得られる。(6) を書き直すと,

$$\omega(\zeta) = i \ln \left( \frac{\zeta - e^{is_0}}{\zeta e^{is_0} - 1} \right) + s_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \zeta^m - i\varepsilon(1 - \zeta^2) \quad (8)$$

となる。(8) が流速の条件を満足することを示そう。

はく離点 A, B では  $\zeta = \pm 1.0$  であり, ここでは  $q = 1.0$ , 即ち  $\tau = 0$  である。よって

$$\text{Im } \omega(\pm 1.0) = 0$$

よどみ点 O にて  $q=0$ , 即ち  $\tau = -\infty$ , このとき  $\zeta = e^{is_0}$  であるから,

$$\text{Im } \omega(e^{is_0}) = -\infty$$

無限遠点にて  $q=1/\kappa$ , 即ち  $\tau = -\varepsilon$ , このとき  $\zeta=0$  であるから  $\text{Im } \omega(0) = -\varepsilon$

である。(8) に  $\zeta = \pm 1.0, 0, e^{is_0}$  を代入すれば, 明らかに流速の条件を満足する。

以上により  $\omega(\zeta)$  の表式ができたので, あとはなんらかの方法で  $a_m, s_0, M$  を求めればよい。

## 5. 解 析

物体上では、 $\zeta=e^{is}$  に対応するから (3), (8) より、  
物体上の流れの方向は

$$\theta(s)=\text{Real } \omega(e^{is})$$

$$= \begin{cases} s_0 - \varepsilon \sin 2s + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos ms - \pi & 0 \leq s \leq s_0 \\ s_0 - \varepsilon \sin 2s + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos ms & s_0 \leq s \leq \pi \end{cases} \quad (9)$$

となり、流速は

$$\tau(s)=\text{Im } \omega(e^{is}) \\ = \ln \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(s-s_0)}{\sin \frac{1}{2}(s+s_0)} \right| - 2\varepsilon \sin^2 s + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin ms \quad (10)$$

である。

流れははく離点にて滑らかにはがれてゆくものとする。物体の傾き角を図 4 に示すように  $\Psi$  とすれば、 $\theta$  と次のような関係になる。

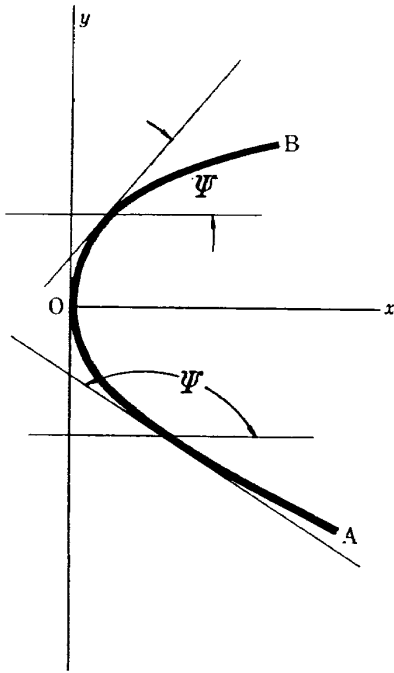


図 4

$$\Psi = \begin{cases} \theta(s) + \pi & (\text{AO 間}) \\ \theta(s) & (\text{BO 間}) \end{cases} \quad (11)$$

よって、(9) より

$$\Psi = \Psi(s) = s_0 - \varepsilon \sin 2s + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos ms \quad (12)$$

となる。さらに、計算の便宜上、 $\Phi(s) = \Psi(s) - s_0$  とおく。次にパラメータ  $\lambda(s) = -d\Phi/ds$  を導入する。

$$\lambda(s) = -d\Phi/ds \\ = 2\varepsilon \cos 2s + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m \sin ms \quad (13)$$

となる。(13) の両辺に  $\sin ns$  を掛けて 0 から  $\pi$  ままで積分すると、

$$\int_0^{\pi} \lambda(s) \sin ns ds = 2\varepsilon \int_0^{\pi} \cos 2s \cdot \sin ns ds \\ + \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m a_m \sin ms \cdot \sin ns ds$$

となる。

右辺第 2 項では  $m=n$  以外の積分値は 0 となり、 $m=n$  のとき  $\pi m a_m / 2$  となるから  $n$  を  $m$  で置き換えてよい。よって、

$$\int_0^{\pi} \lambda(s) \sin ms ds = 2\varepsilon \int_0^{\pi} \cos 2s \cdot \sin ms ds + \frac{\pi m}{2} a_m$$

となる。

右辺第 1 項

$$= 2\varepsilon \int_0^{\pi} \cos 2s \cdot \sin ms ds \\ = \varepsilon \left[ -\frac{\cos(2+m)s}{2+m} + \frac{\cos(2-m)s}{2-m} \right]_0^{\pi} \\ = \begin{cases} 4m\varepsilon / (m^2 - 4) & (m=1, 3, \dots) \\ 0 & (m=2, 4, \dots) \end{cases}$$

以上をまとめると、

$$\int_0^{\pi} \lambda(s) \sin ms ds = \begin{cases} \frac{\pi m}{2} a_m + \frac{4m\varepsilon}{m^2 - 4} & (m=1, 3, \dots) \\ \frac{\pi m}{2} a_m & (m=2, 4, \dots) \end{cases} \quad (14)$$

または、

$$a_m = \begin{cases} \frac{2}{m\pi} \int_0^{\pi} \lambda(s) \sin ms ds - \frac{8\varepsilon}{\pi(m^2 - 4)} & (m=1, 3, \dots) \\ \frac{2}{m\pi} \int_0^{\pi} \lambda(s) \sin ms ds & (m=2, 4, \dots) \end{cases} \quad (15)$$

となる。故に  $\lambda(s)$  がわかれば  $a_m$  は求まる。

$\lambda(s)$  を以下に述べる方法で求める。物体の微小長さを  $dl$  とすれば、(1), (2), (8), および  $\zeta=e^{is}$  より、  
 $dl = |dz|$

$$= |e^{i\theta(\zeta)} \cdot (df/d\zeta) \cdot d\zeta| \\ = |e^{i\theta(e^{is})} \cdot (df/d\zeta) \cdot (d\zeta/ds) \cdot ds| \\ = 4M \sin^2 \frac{1}{2}(s+s_0) \sin s \cdot e^{-\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin ms - 2\varepsilon \sin^2 s\right)} \cdot ds \quad (16)$$

と表わせる。はく離点 A から測った物体表面上の長さ  $l$  は、

$$l(s) = M \int_0^s \nu(s) \cdot e^{-\tau(s)} ds \quad (16)$$

ここで

$$\nu(s) = 4 \sin^2 \frac{1}{2}(s+s_0) \sin s$$

$$T(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin ms - 2\epsilon \sin^2 s$$

とおく。

物体任意点  $z$  での曲率を  $K$  とすれば,  $z$  は  $s$  の関数であるので,  $K$  も  $s$  の関数として与えられ,  $\lambda(s)$  と次のように結び付けられる。

$$\begin{aligned} K(s) &= -d\theta/dl \\ &= -d\Phi/dl \\ &= -(d\Phi/ds) \cdot (ds/dl) \\ &= \lambda(s) \cdot (ds/dl) \end{aligned} \quad (17)$$

(16), (17) より,

$$\lambda(s) = M \cdot K(s) \cdot \nu(s) \cdot e^{-T(s)} \quad (18)$$

という関係が得られる。

未知数  $M$ ,  $s_0$  ははく離の条件より求まる。一般に任意物体は非対称であるので, 流れも非対称となる。

非対称の場合は未知数が2個に対して, 条件が2個以上になるため, その条件のとり方により結果が若干異なる。例えば, 流れの方向 (これははく離点における物体の傾き角を決定する) と2個のはく離点の位置 (これは物体表面全長を決定する) ——この場合よどみ点の位置は未定で, 計算後に決定される——とか, 2個のはく離点の位置とよどみ点の位置を指定する——この場合は流れの方向は未定で, 計算後に決定される——という様な場合である。前者は特に与えられた迎角をもつ翼型の場合に適切である。本報告では, 実験値との比較のため, 迎角とはく離点の位置をあらかじめ与える前者の場合について論を進める。はく離点  $A$  は  $s=0$  に対応し,  $\Psi(0) = \Psi_A$  であるから, (12) より  $s_0$  が得られる。

$$\begin{aligned} \Psi_A = \Psi(0) &= s_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \\ s_0 &= \Psi_A - \sum_{m=1}^{\infty} a_m \end{aligned} \quad (19)$$

$M$  は (16)' において 0 から  $\pi$  まで積分して得られる。

$$\begin{aligned} L &= M \int_0^{\pi} \nu(s) \cdot e^{-T(s)} ds \\ M &= L / \int_0^{\pi} \nu(s) \cdot e^{T(s)} ds \end{aligned} \quad (20)$$

ここで,

$\Psi_A$ ; はく離点  $A$  での傾き角

$L$ ; 流れが当たっている物体表面全長

何らかの方法で  $\lambda(s)$  が得られれば, (15), (18),

(19), (20) より  $a_m, s_0, M$  が決定でき任意翼型のまわりの流れが得られる。これを実際に計算するには逐次近似の方法を用い, その数値解法を次節にて述べる。得られた  $a_m, s_0, M$  を用いて物体や自由流線の座標, 物体および自由流線上での流れの方向, 速度を計算できる。

(a) 物体上

物体上では  $\zeta = e^{is}$  であるから  $s$  の関数として諸量が与えられる。(9), (10) より,

流れの方向

$$\theta(s) = \begin{cases} s_0 - \epsilon \sin 2s + \sum_{m=1}^N a_m \cos ms - \pi & 0 \leq s \leq s_0 \\ s_0 - \epsilon \sin 2s + \sum_{m=1}^N a_m \cos ms & s_0 \leq s \leq \pi \end{cases} \quad (21)$$

流速

$$\frac{q(s)}{U} = \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(s-s_0)}{\sin \frac{1}{2}(s+s_0)} \right| \cdot e^{\epsilon \sin 2s + \sum_{m=1}^N a_m \sin ms} \quad (22)$$

座標

$$\begin{aligned} x(s) &= M \int_{s_0}^s \nu(s) \cdot e^{-T(s)} \cdot \cos \theta(s) ds \\ y(s) &= M \int_{s_0}^s \nu(s) \cdot e^{-T(s)} \cdot \sin \theta(s) ds \end{aligned} \quad (23)$$

ここで,

$$\nu(s) = 4 \sin^2 \frac{1}{2}(s+s_0) \sin s$$

$$T(s) = \sum_{m=1}^N a_m \sin ms - 2\epsilon \sin^2 s$$

(b) 自由流線上

自由流線上では  $\zeta$  の実軸に対応するから,  $\xi = \text{Real } \zeta$  とすれば,

流れの方向

$$\theta(\xi) = \begin{cases} s_0 + \sum_{m=1}^N a_m \xi^m + \tan^{-1} \left\{ \frac{\xi^2 \sin s_0 - \sin s_0}{\xi^2 \cos s_0 - 2\xi + \cos s_0} \right\} - \pi & 0 \leq \xi \leq 1 \\ s_0 + \sum_{m=1}^N a_m \xi^m + \tan^{-1} \left\{ \frac{\xi^2 \sin s_0 - \sin s_0}{\xi^2 \cos s_0 - 2\xi + \cos s_0} \right\} & -1 \leq \xi \leq 0 \end{cases} \quad (24)$$

流速

$$q(\xi)/U = e^{\epsilon \cdot \xi^2} \quad (25)$$

座標

$$z(\xi) = \int \left[ z_A + M \int_1^{\xi} \left[ \frac{1}{2}(\xi + 1/\xi) - \cos s_0 \right] (1 - 1/\xi^2) e^{\epsilon \cdot (1 - \xi^2)} d\xi \right] \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\left\{ z_B + M \int_{-1}^{\xi} \left[ \frac{1}{2} (\xi + 1/\xi) - \cos s_0 \right] (1 - 1/\xi^2) \right. \\ \left. \cdot e^{i \cdot (1 - \xi^2)} d\xi \right. \quad -1 \leq \xi \leq 0 \quad (26)$$

ここで  $z_A, z_B$  ははく離点 A, B の座標である。

以上の解析において特に  $\varepsilon=0$  と仮定すれば、結果はすべて TM-176 のものと当然の事ながら一致する。

## 6. 数値解法

前節で与えた解析を実際に数値計算する手順をここで述べる。一般に任意物体では  $K(s)$  が未知である。

また (18) より明らかに  $\lambda(s)$  も未知となるので、このままでは計算は不可能である。さて、 $K(s)$  が一定の場合は円弧に対応するが、著者は電子計算機を用いて、円弧の場合から出発して逐次、任意翼型へ近似する方法を開発した。なお、平板より出発する方法<sup>3)</sup>が報告されているが、この方法では平板前縁の処理が不明である。ここでは  $K(s)$  が一定、即ち円弧の場合を最初に述べる。 $\kappa=1.0$ 、または  $\varepsilon=0$  は TM-176 ですでに報告した背圧圧力係数  $C_{PB}=0$  の円弧を過ぎる場合であるが、 $\varepsilon \neq 0$  でも本報告の方法は従来の計算方法をそのまま用いることが出来るのが利点である。

いま、級数を有限個  $N$  で打ち切る。第  $i$  番目近似を考えると、

$$a_m^{(i)} = \begin{cases} \frac{2}{mN} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(i)} \cdot \sin m s_j - \frac{8\varepsilon}{\pi(m^2-4)} & (m=1, 3, \dots) \\ \frac{2}{mN} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(i)} \cdot \sin m s_j & (m=2, 4, \dots) \end{cases} \quad (27)$$

$m=N$  のとき、第1項係数  $2/mN$  の代わりに  $1/mN$  とする。ここで、

$$s_j = \left( j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{N} \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

$$\lambda_j^{(1)} = 1.0 \quad (\text{初期値として})$$

(19) より  $s_0$  が、(20) より  $M$  が得られる。

$$s_0^{(i)} = \Psi_A - \sum_{m=1}^N a_m^{(i)} \quad (28)$$

$$M^{(i)} = L \int_0^{\pi} \nu^{(i)}(s) \cdot e^{-T^{(i)}(s)} ds \quad (29)$$

(18), (27), (28), (29) より次の近似のための  $\lambda$  が得られる。

$$\lambda_j^{(i)} = M^{(i)} \cdot \nu^{(i)}(s_j) \cdot K(s_j) \cdot e^{-T^{(i)}(s_j)} \quad (30)$$

$$\lambda_j^{(i+1)} = \lambda_j^{(i)} + r(\lambda_j^{(i)} - \lambda_j^{(i-1)}) \quad (0 < r < 1) \quad (31)$$

ここで、 $r$  は収束を早める係数で任意に与えることが

できる。(27)~(31) を繰り返して背圧のある場合の円弧に対する  $a_m$  を決定する。この円弧の場合を第1近似として、最終的に求める翼型へ逐次近似する。

以下に著者が開発した近似方法を述べる。

任意翼型のはく離点のうち1個は常に後縁にあるものとし、他の1個を任意に、主に実験値よりはく離点を推定して、指定するものとする。同様に背圧も実験値より推定して与える。翼後縁から下面を経て測った任意点までの表面の長さを両はく離点間の表面の長さで割って無次元化したものを  $X'$  とする。このとき、その任意点の曲率を  $K$  とすれば、 $K$  は  $X'$  の関数として与えられる。図 5-a に  $K$  と  $X'$  の関係を示す。

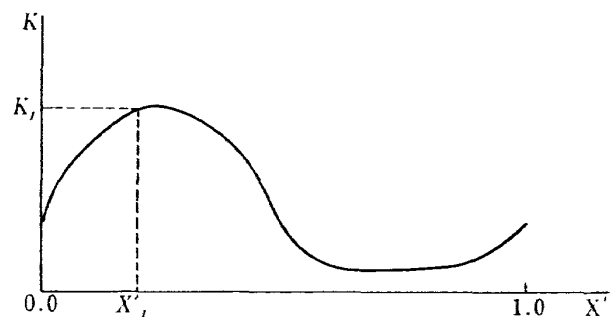


図 5-a

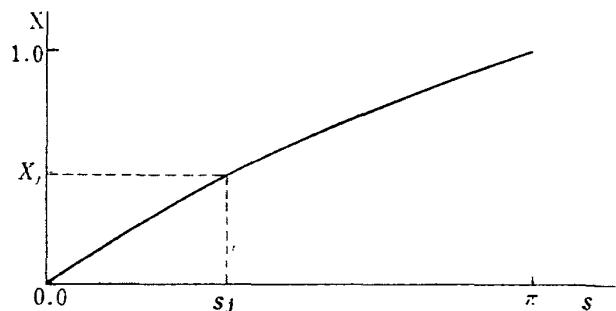


図 5-b

$K(X')$  は与えられた翼型に対しては既知である。図 5-b に (16)' で計算された物体の任意点までの表面に沿う長さを物体の表面全長  $L$  で無次元化した  $X$  と曲面の極座標  $s$  との関係を示す。第1近似で任意物体として円弧を用いる。この2つの図において、 $X' = X(s)$  とすれば、それに対応する曲率  $K = K(X')$  より  $K = K(s)$  と曲率  $K$  と  $s$  の関係が求まり、(30) より次の近似のパラメータ  $\lambda(s)$  が得られ、計算が続行できる。以上に述べた事を数式で示す。与えられた翼型に対する曲率  $K(X')$  は不変である。無次元長さ  $X(s)$  だけが逐次変化する。いま、第  $i$  番目近似に対する物体の無次元長さを  $X^{(i)}(s_j)$  とすれば、

$$K = K(X') \quad (32)$$

$$X' = X^{(i)}(s_j) \quad (33)$$

(32), (33) より、



$$K = K^{(i)}(s_j) \quad (34)$$

(30), (34) より,

$$\lambda_j^{(i)} = M^{(i)} \cdot \nu^{(i)}(s_j) \cdot K^{(i)}(s_j) \cdot e^{-T^{(i)}(s_j)} \quad (35)$$

が得られる。初期値  $a_m^{(1)}$ ,  $s_0^{(1)}$ ,  $M^{(1)}$  は円弧の場合の値を用いる。(27) より,

$$a_m^{(i)} = \begin{cases} \frac{2}{mN} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(i)} \sin ms_j - \frac{8\epsilon}{\pi(m^2-4)} & (m=1, 3, \dots) \\ \frac{2}{mN} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(i)} \sin ms_j & (m=2, 4, \dots) \end{cases} \quad (36)$$

$$a_m^{(i+1)} = a_m^{(i)} + r(a_m^{(i)} - a_m^{(i)}) \quad (0 < r < 1) \quad (37)$$

$m=N$  のときは (36) 右辺第1項は  $1/mN$  となる。また  $r$  は収束を早める係数である。(28), (29) より次の近似の  $s_0, M$  が求まる。

$$s_0^{(i+1)} = \Psi'_A - \sum a_m^{(i+1)} \quad (38)$$

$$M^{(i+1)} = L' \int_0^\pi \nu^{(i+1)}(s) \cdot e^{-T^{(i+1)}(s)} ds \quad (39)$$

ここで  $\Psi'_A$  は翼型後縁 A での傾き角を表わし,  $L'$  は流れの当たっている両はく離点間の翼型表面の長さを表わす。このようにして (32)~(39) を繰り返して与えられた翼型に収束させる。

### 7. 計算例と計算結果

本報告における計算は全て航研計算センターの大型

電子計算機 HITAC 5020 F を使用した。計算例として  $K(s)$  が一定, 即ち円弧の場合と,  $K(s)$  が一定でない任意翼型の場合の二通りを行なった。どちらの場合も実験値よりはく離点の位置と背圧の大きさを推定して与えた。

円弧の場合は実験値との比較のため対称の場合につき三種類の例題計算を行なった。級数の項数  $N$  を 36 に取り,  $r$  を 0.5, 0.25, 0.125 の三通りで収束を早め, また各  $r$  につき  $i=10$  まで計算した。計算時間は約 120 秒, 円弧への収束の誤差は 0.6~0.8% であった。図 6 に  $C_{PB} = -0.96 (\kappa = 1.4)$  についての計算値と実験値を図示する。この図には Roshko (1954) の実験値と理論値もあわせて示した。実験値より推定したはく離点の位置  $\beta_s$  を  $89^\circ$  としたが, はく離点付近で圧力分布が不連続となった。これは圧力係数が peak 値まで合うように  $\beta_s$  を選んだためで, 推定された  $\beta_s$  が不適当なようである。おそらく  $\beta_s$  を  $80^\circ$  (これは実際の層流はく離点に対応する) に選べばこの様な事は起らないと思う。

その代り peak 値付近では計算値と実験値のずれは大きくなるものと思われる。図 7 に  $C_{PB} = -0.86 (\kappa = 1.365)$  の場合について, Roshko (1961) の実験値と Woods (1955) の理論値を付け加えて本計算点を図示する。Roshko の実験は Mach 数  $M=0.25$  と圧縮性が入っている。ここでははく離点  $\beta_s = 105^\circ$  にとった。Woods の計算は  $M=0$  と  $M=0.25$  について行

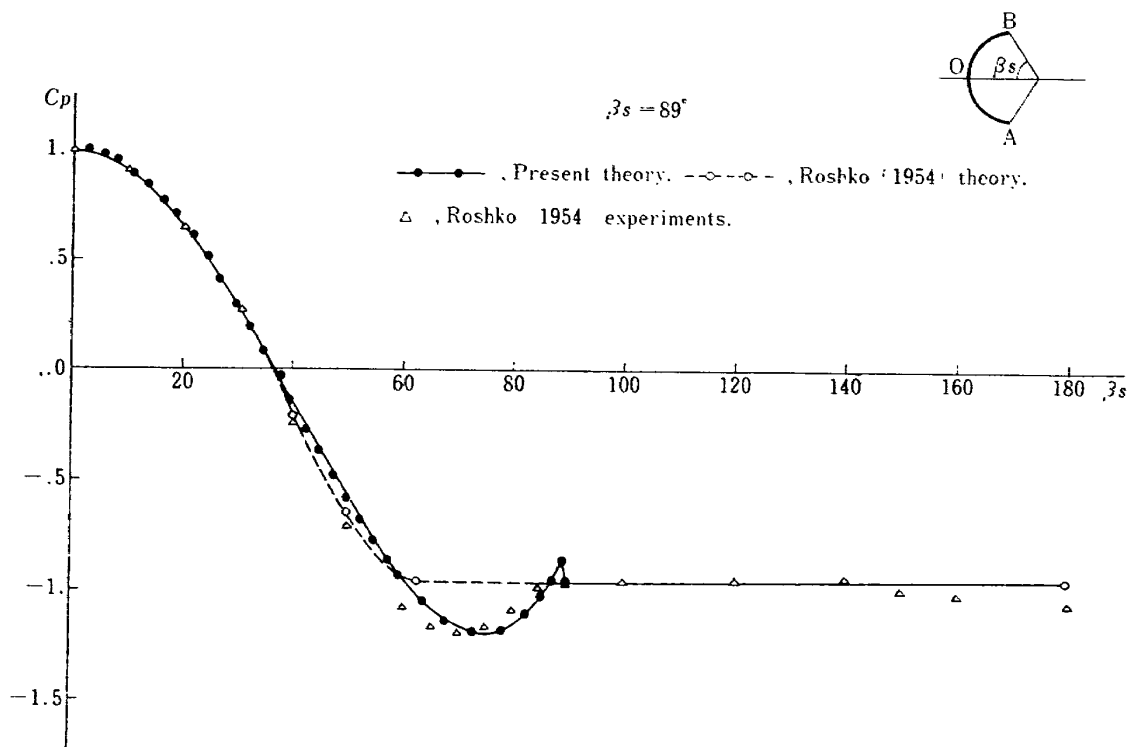
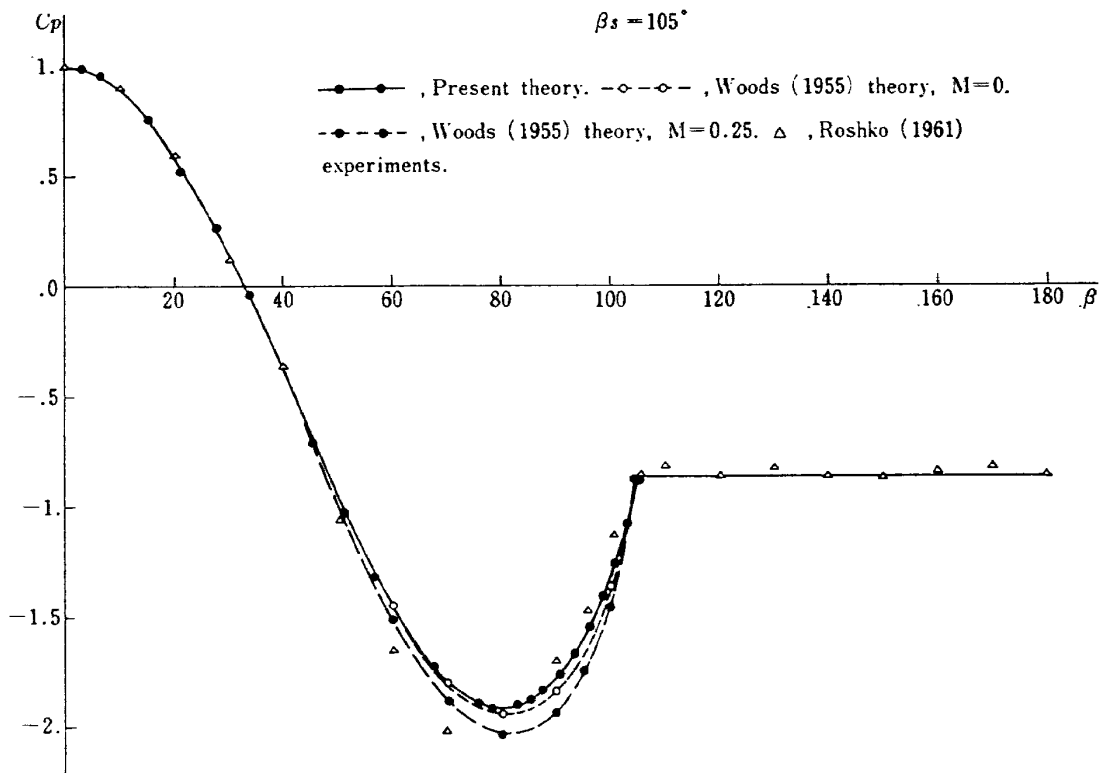
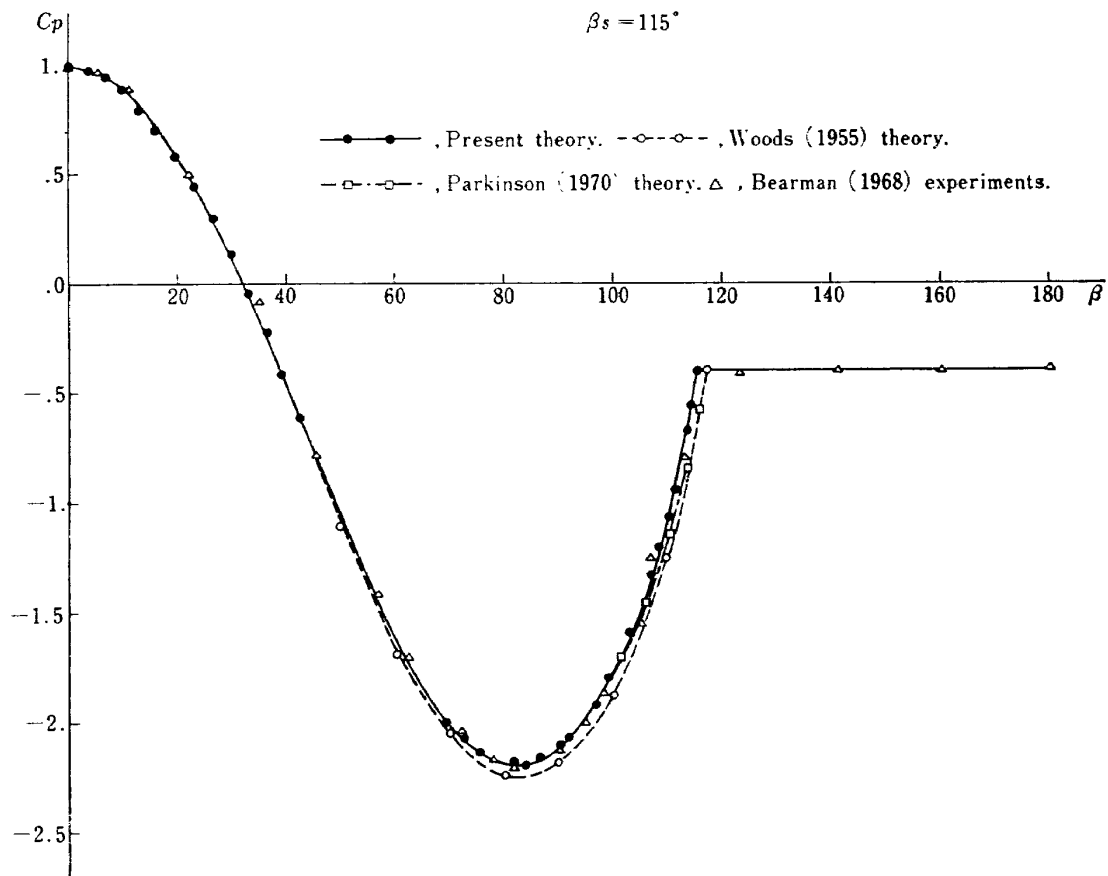


図 6 Pressure distribution on circular cylinder



⊠ 7 Pressure distribution on circular cylinder



⊠ 8 Pressure distribution on circular cylinder

なわれているが、非圧縮の場合  $M=0$  と本計算点（この場合も非圧縮である）とは良くあっている。非圧縮の場合の実験点が与えられていないので比較はできないが、 $M=0.25$  に対する点をみると、圧縮性が suction peak を大きくする一因となっていることがわかる。図8に  $C_{PB}=-0.38$  ( $\kappa=1.175$ ) の場合を示す。実験点は Bearman (1968) を用いた。 $\beta_s$  をここでは  $115^\circ$  にとって計算した。他の理論値との比較のため、Woods と Parkinson の計算点もあわせて示す。彼らの場合、 $\beta_s=117.5^\circ$  である。実験点と計算点は非常に良く一致している。2個のはく離で同じ速度ではく離し、両はく離点間で圧力一定となる理論モデルを用いているので、図8に示した実験値のようにはく離後の物体表面上の圧力がほぼ一定である場合は、理論モデルに近くなるので一致は非常に良い。図6のようにはく離後の物体表面の圧力が一定でなくなると幾分一致の程度は落ちてくる。この傾向は翼型の場合、特に顕著になる。なお、Parkinson<sup>7)</sup> ははく離領域を設けた

め吹き出しを置く方法を用いて計算しているが、彼の計算結果と本報告の計算結果は非常に良く一致している。しかし、やはり彼の方法では翼型へ拡張することが困難である。

翼型の場合は実験値との比較のため、NACA 4412 を選んだ。実験値として Pinkerton (1936) を用いた。三通りの迎角につき、はく離点の1個を常に後縁にとり、上面はく離点の位置と背圧の大きさを実験値より推定して与え、計算を行なった。図9に迎角  $30^\circ$ 、上面はく離点 5% chord、背圧圧力係数  $C_{PB}=-0.6$  の場合を示す。計算値は実験値に良く一致している。高迎角になると前縁はく離が起り、はく離後の翼面上の圧力はほぼ一定となり、理論モデルに近づくので、計算値は実験値に良く一致するようになる。図10に迎角  $24^\circ$ 、上面はく離点 20% chord、背圧圧力係数  $C_{PB}=-0.7$  の場合を示す。この辺の迎角になるとはく離後の圧力はそれ程一定とならず、理論モデルと離れてくるので、計算値と実験値の一致の程度は落ちる。そ

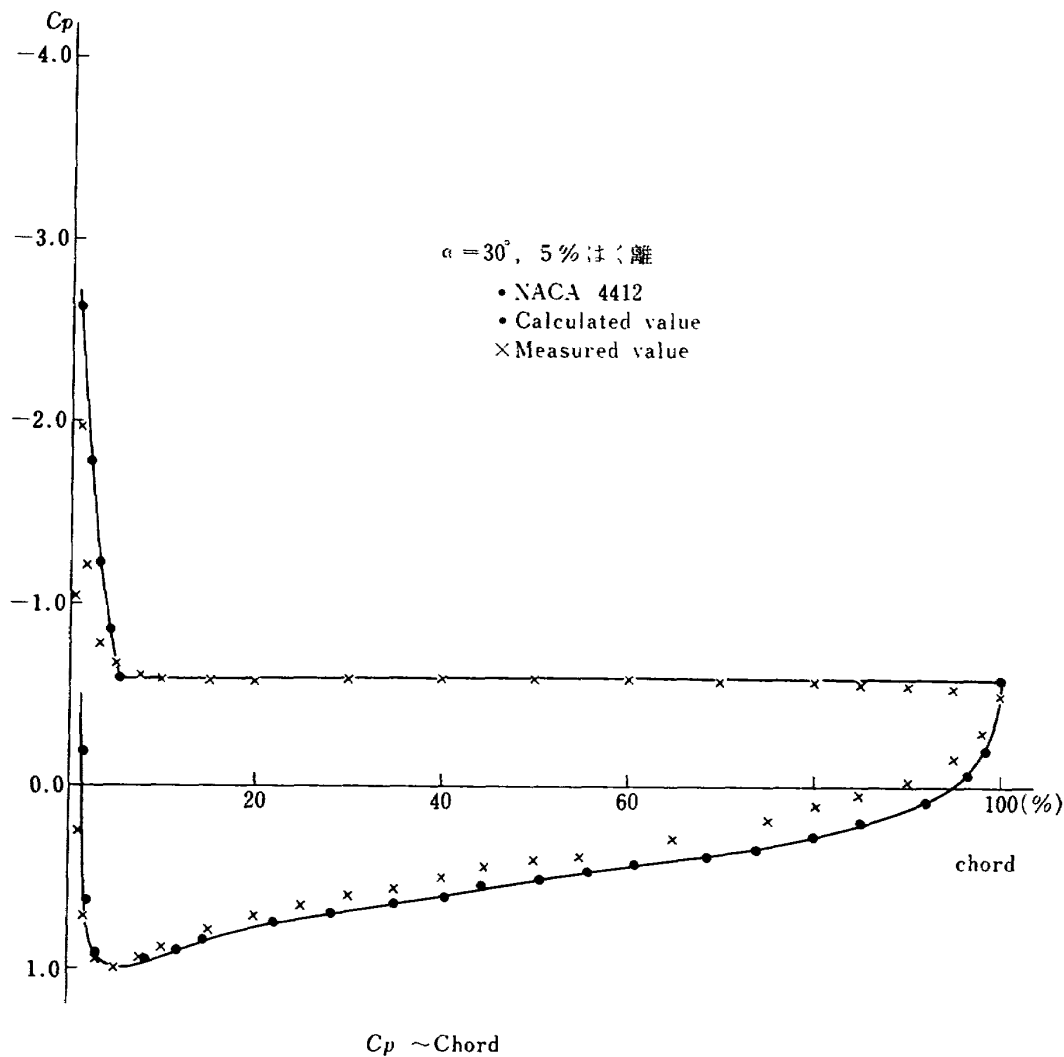
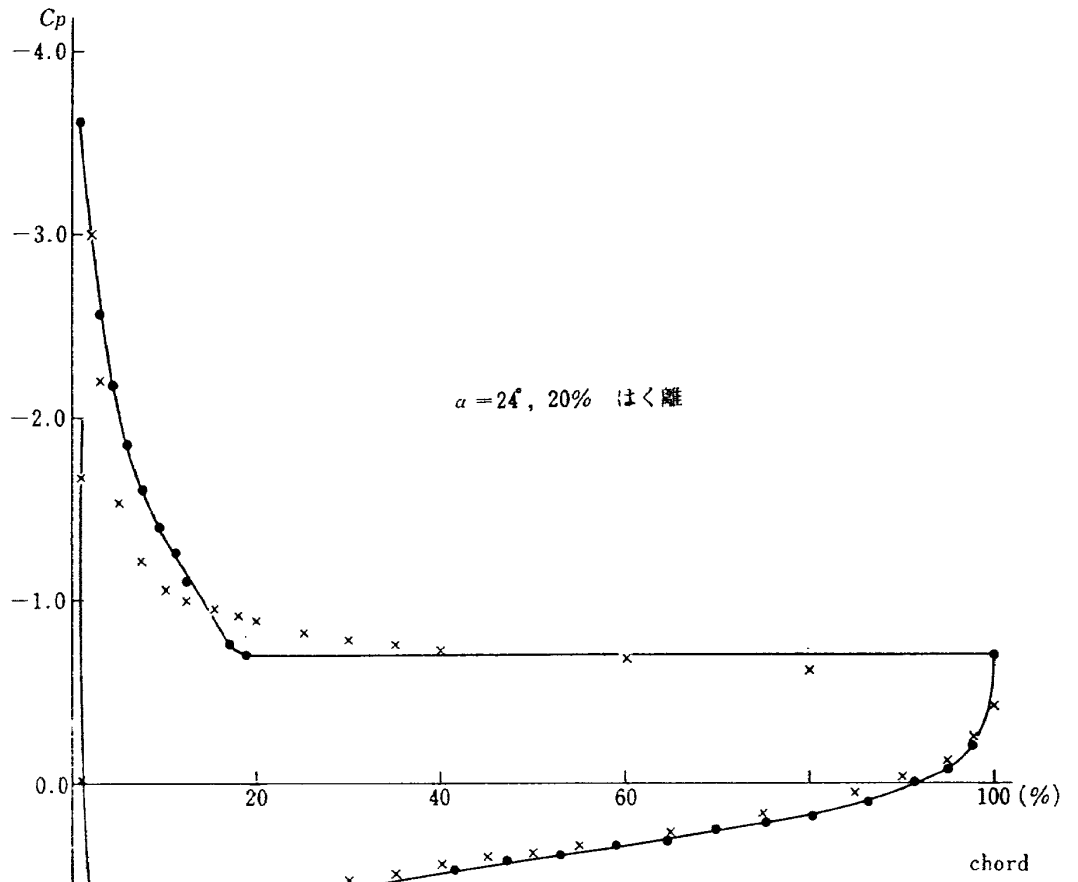
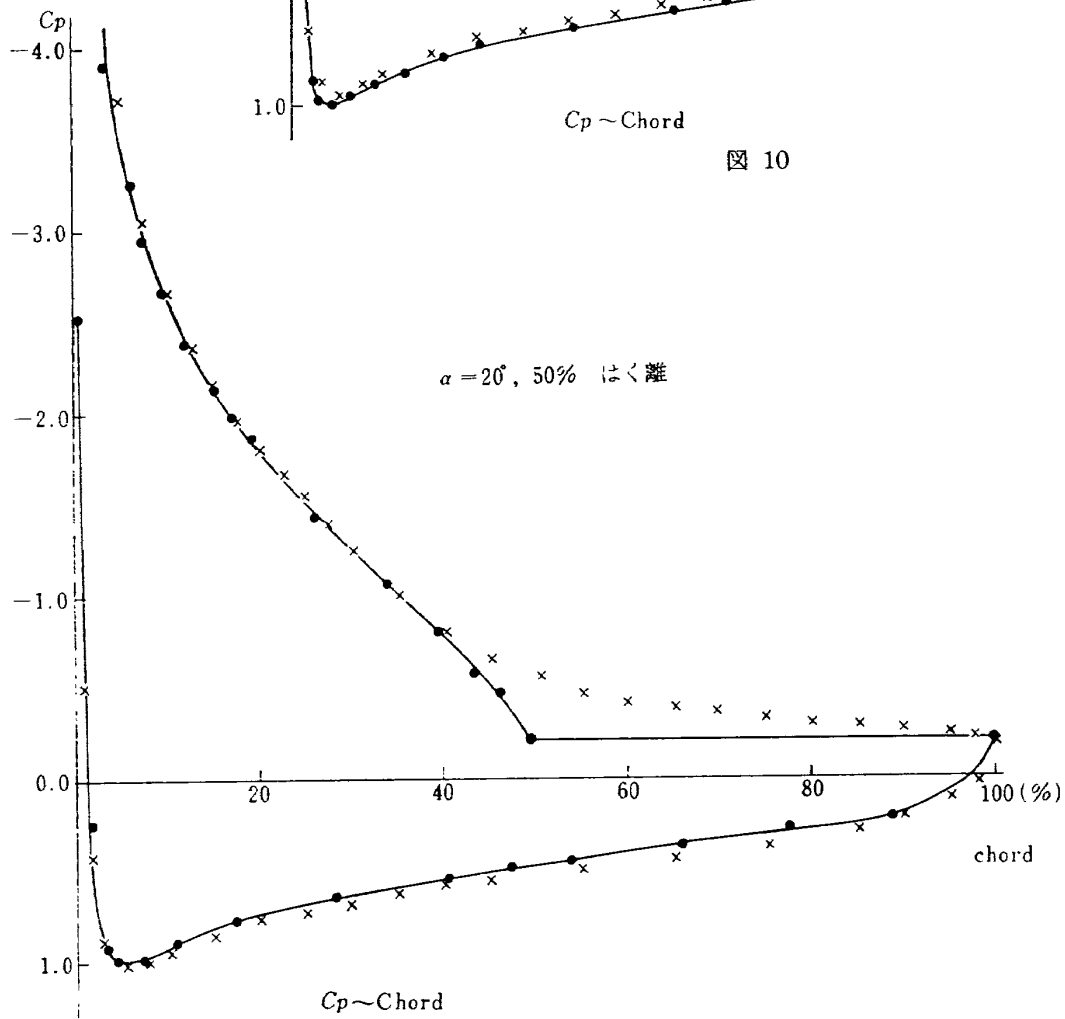


図 9



$C_p \sim \text{Chord}$

図 10



$C_p \sim \text{Chord}$

図 11

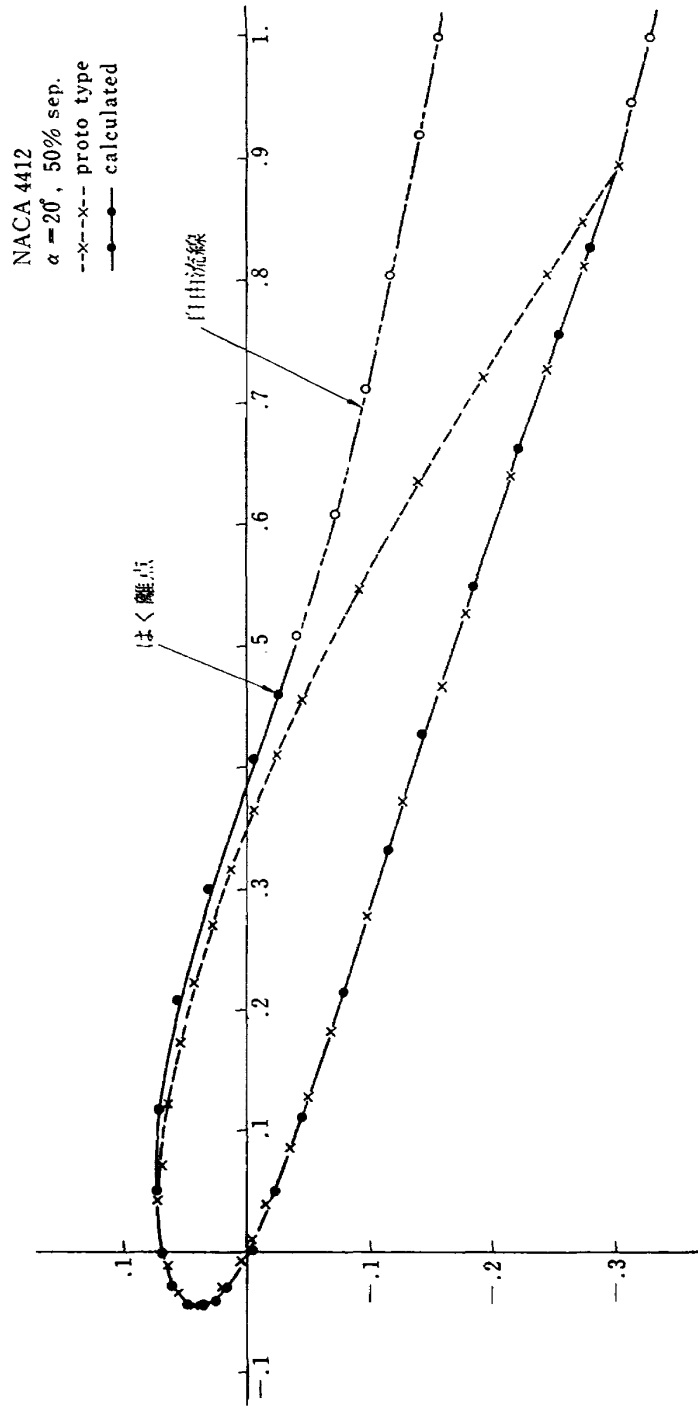


図 12 計算による翼型

しては離点の位置とか背圧の大きさを推定することも難しくなる。それ故、上面での圧力分布は幾分計算値と実験値はずれてくる。しかし、下面は良く一致している。図 11 に迎角  $20^\circ$ 、上面は離点 50% chord、背圧圧力係数  $C_{PB} = -0.2$  の場合を示す。この場合は上面の圧力は連続的に変化し、はく離点とか背圧の大きさは図 10 の場合に比べてさらに推定しにくい。今回の計算において、上面は離点の位置や背圧の大きさが適当であったので計算値は実験値と非常に良く一致したが、はく離点附近での圧力分布の傾向に差異が生じた。これは実際の場合には粘性等の影響が入ってくるが、理論では非粘性、非回転であると仮定しているためであろう。下面は図 10 と同様に良く一致している。本計算では、円弧の場合と同様に  $r=0.5, 0.25, 0.125$ 、各  $r$  につき  $i=10$  まで、級数の項  $N$  を 48 に取って計算した。計算時間は 26~27 分で円弧の場合に比べて非常に多くの時間を要した。 $N$  を増せば精度（特に翼型の座標について）は良くなるが、時間が非常に増加する。 $N$  を増して精度を上げて圧力分布にさほどの差異は認められなかった。図 12 に計算による翼型を示す。この時、 $N=72$  で約 43 分かかった。前縁で曲率の変化が大きく、ここでのずれが累積して上面はかなりずれたが、上面の曲線の形自身は原形とよく一致している。

## 8. む す び

本報告において、部分的にはく離した翼面上の圧力分布を理論的に求める一手段として、自由流線理論を用いて、解析し計算を行なった。任意物体の周りの自由流線理論についての一般的表式は既に Levi-Civita により与えられているが、著者はこれを実際に電子計算機を用いて、任意物体として翼型の場合につき、逐次近似する方法を開発した。さらにこの理論に背圧の効果が入るように新しい関数を付け加えた。背圧の効果については従来の方法として、Roshko, Woods, Parkinson らが与えているが、これらは実際の現象とずいぶん離れており、しかも円弧とかだ円弧の様な場合で、対称な流れについてのみ応用されており、翼型の様な複雑な形状をした物体へ応用することは非常に困難である。その点、著者が開発した方法は任意物体に容易に応用でき、かつ精度も良い。本報告では実例計算として円弧の場合と翼型の場合につき各々三種行ない、実験値と比較した。比較の結果、計算値と実験値は満足のゆく一致が得られた。この方法ははく離点の位置と背圧の大きさを与えてやれば、任意物体の圧力

分布等が計算できる。実験値より推定した値を用いると計算結果と実験値とは良く一致する。特に理論モデルに近い場合は非常に良く一致する。よって、理論的にはく離点の位置と背圧の大きさが予測できれば、はく離した任意物体の圧力分布の計算が可能になる。実際の物理現象としては、自由流線に相当する部分に shear layer が存在し、これに沿って流れは流速と流れの方向を同時に変化させて下流へ流れてゆくであろう。この現象を自由流線理論で近似する場合は当然流速と流れの方向が同時に変化する理論モデルを考えねばならぬ。著者はこの考えに基づいて、この理論モデルを表現する表式として従来の式に  $ib(1-\zeta^2)$  なる項を付け加えた。この項のもつ意味の詳細は既に本文中に述べられている。付け加えられた項により、自由流線上では速度と方向が同時に変化する流れが計算でき、実際の物理現象に近似されたものとなり、物体上の圧力分布の計算値と実験値の一致も良く、従来の理論を一步進めたものとなった。

しかし、上で与えた理論は本質的な解決策としての、理論的に自由流線の形とか自由流線上の流速の変化の仕方を決定するものではない。それ故、さらに別の考察が必要であろう。これまでに述べた理論は非粘性、非回転の場合であり、実際の粘性、渦のある流れと異なっており、粘性や渦を考慮に入れた理論を用いてはく離のメカニズムを解明することが今後の課題となる。また、非対称な流れの場合は 2 個のはく離点で異なった流速ではがれてゆくので、この面からも理論を進めてゆく必要があろう。

## 参 考 文 献

- 1) G. Birkhoff and E.H. Zarantonello; Jets, Wakes and Cavities, New York Academic Press, (1957), pp. 130-142
- 2) 高橋 侔; 非対称自由流線の一計算法, 航空宇宙技術研究所資料 TM-176, (1970)
- 3) 山田恭介; 死水域を伴う任意翼型の特性, 応用力学学会誌, (1951), pp. 6-11
- 4) A. Roshko; A New Hodograph for Free Streamline Theory, NACA TN 3168, (1954)
- 5) T.Y. Wu; A Free Streamline Theory for Two-dimensional fully cavitating Hydrofoil, J. Math. Phys., 35, 3, (1956), pp. 236-265
- 6) L.C. Woods; Two-dimensional Flow of a compressible Fluid past given Curved Obstacles with infinite Wakes, Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A 227, (1955)
- 7) G.V. Parkinson and T. Jandali; A Wake Source Model for Bluff Body Potential Flow,

J. Fluid Mech., Vol. 40, Part 3, (1970), pp.  
577-594  
8) R.M. Pinkerton; Calculated and Measured

Pressure Distribution over the Midspan Section of the NACA 4412 Airfoil, NACA Rep. 563, (1936)

TR-236	Small-Strain Deformation Superposed on Finite Deformations of Highly Elastic Incompressible Materials, Part 1—Constitutive Equations	1971年6月	Tatsuzo KOGA
TR-237	自由飛行模型 FFM-10 による縦の動安定特性の飛しょう実験 Free Flight Tests on Longitudinal Dynamics Characteristics of FFM-10 Model	1971年4月	河崎俊夫, 塙武敏 齋藤秀夫, 高島一明 河本巖
TR-238	リフトジェットエンジン JR100H の動特性について Dynamic Characteristic of Lift Jet Engine JR100H	1971年5月	西尾健二, 遠藤征紀 杉山七契, 越沼威 大畑敏美
TR-239	昇華アブレーションの直接解法 A Direct Calculation of Sublimating Ablation	1971年6月	久保田弘敏
TR-240	A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems—Part 1 Theoretical Basis—	1971年7月	Masao Ebihara
TR-241	YS-11A-500/600 型主翼疲れ試験 (I. セーフライフ試験荷重と試験方式) Full-Scale Fatigue Test of YS-11A-500/600 Turboprop Transport Wing (I. Safe-life Fatigue Test Loads and Test Method)	1971年7月	竹内和之, 野原利雄 朝田洋雄
TR-242	熱線による3次元平均速度ベクトルとレイノルズ応力の測定 Measurement of three-dimensional mean Velocity Vector and Reynolds Stress by Single Rotatable Hot-wire	1971年7月	林良生, 中谷輝臣
TR-243	揚力をもつ物体のまわりのポテンシャル流れの計算法 I その理論的基礎 A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems—Part 1—Theoretical Basis	1971年7月	海老原正夫
TR-244	超音速風洞における動安定微係数の測定 Measurements of Dynamic Stability Derivatives in Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1971年7月	高島一明, 榊原盛三 関根英夫
TR-245	ヘリコプタ高度・速度線図および臨界決定点の解析的推定法 An Analytical Method to Predict Height-Velocity Diagram Critical Decision Point of Rotorcraft	1971年8月	古茂田真幸
TR-246	梁の大変形問題の解析について On Analysis of Large Deformation Problems of Beam	1971年11月	泉日出夫

---

## 航空宇宙技術研究所報告247号

昭和46年9月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表)☎182

印刷所 有限会社啓文堂松本印刷  
東京都文京区水道2-7-5

---