

UDC 531.36:
629.783

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-305

オイラー角表示による座標変換のアルゴリズム

狼 嘉 彰

1972年11月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|---------|--|-----------|---|
| TR-281 | ジェットエンジンのデジタル制御
(1) 装置および予備実験
Digital Control of Jet Engines
(1) Control System and Preliminary Experiments | 1972年7月 | 西尾健二, 遠藤征紀
杉山七契, 藤沼幸雄
大畑敏美, 松田幸晋
吉田晃, 中山 |
| TR-282 | 高温タービン試験設備およびその計測装置
On the High Temperature Test Facilities
and the Data Processing System. | 1972年6月 | 原 動 機 部 |
| TR-283 | エンジン特性の実時間シミュレーション(I)
(装置および特性)
Real-time Simulation of Jet Engines with
Digital Computer (I)
(Fabrication and Characteristics of the
Simulator) | 1972年7月 | 西尾健二, 杉山七契
越沼威, 橋本武夫
大畑敏美, 市川英夫 |
| TR-284 | 高 dn 値における玉軸受の性能に関する研究
Study on Performance of Ball Bearings at
High dn Valves | 1972年5月 | 宮川行雄, 関 勝美
横山正幸 |
| TR-285 | 高温固体潤滑剤としての一酸化鉛(PBO)に
関する基礎的研究
Study on Lead Monoxide as Solid Lubricant
for High Temperatures | 1972年5月 | 宮川行雄, 西村 充
安部 亘 |
| TR-286T | An Investigation of Secondary Injection
Thrust Vector Control | May 1972 | Tatsuo YAMANAKA |
| TR-287 | 内面加熱を受ける中空円筒の非定常熱応力
Transient Thermal Stresses of the Hollow
Cylinder Subjected Uniform Inner Heating | 1972年5月 | 江川幸一, 竹中幸彦 |
| TR-288 | 低アスペクト比後退角片持平板翼の遷音速
および超音速のフラッタ特性
The Transonic and Supersonic Flutter
Characteristics of Low Aspect Ratio
Sweptback Thin Cantilever | 1972年5月 | 中井暎一, 森田甫之
菊池孝男, 高橋 実
東久保正年 |
| TR-289T | Transient Hypersonic Leading-Edge Flow | Jun. 1972 | Katsuhisa KOURA |
| TR-290 | 二自由度回転駆動振動検出型ジャイロの研究
Study of a Rotary-drive Vibratory-output
Two-degree-of-freedom Gyro | 1972年7月 | 山 田 博 |
| TR-291 | はり板結合構造物の振動(III)
On the Natural Vibration of Plate-Beam
Combination Structures (III) | 1972年7月 | 塙 武敏, 林 洋一
多田保夫, 戸 田 勲
日下和夫 |
| TR-292 | 翼型の非圧縮乱流ウェーク流の近似計算法
—対称ウェーク流の場合—
An Approximate Calculation Method of
Incompressible Turbulent Wakes behind
Aerofoils—Symmetrical Wake Flow Case— | 1972年7月 | 石田洋治 |
| TR-293 | き裂先端塑性域に線形な応力分布のある弾
塑性モデルの解析
An Elastic-Plastic Analysis of a Crack
with Linearly Distributed Stress in the
Plastic Zone. | 1972年8月 | 寺田博之 |
| TR-294 | ジェットフラップを持つ高揚力機の地面効
果
Effect of Ground Proximity on the Longi-
tudinal Aerodynamic Characteristics of
an Airplane with a Jet-Flapped High
Lift Wing | 1972年8月 | 遠藤 浩, 高橋 宏
中谷輝臣, 綿貫忠晴 |

オイラー角表示による座標変換のアルゴリズム*

狼 嘉 彰**

Coordinate Transformation Algorithm by the Eulerian Angles Representation

By Yoshiaki OHKAMI

Abstract

In this paper, it is generally described how to express the attitude of an aero-space vehicle by the Eulerian angles for computer simulation, and the algorithm is introduced. By this algorithm, the coordinate transformation matrix is calculable if any three values of the Eulerian angles and their rotation order are given, and also the relations between the time derivatives of Eulerian angles and the body angular velocity can be generally obtained.

Furthermore, this paper discusses the method of avoiding Eulerian angle singularity.

In the appendices of this paper, three flow charts of the computer program, based on this algorithm, are shown.

1. は し が き

人工衛星の姿勢運動を論ずる場合に、回転運動に起因する剛体の変化をいかに記述するかが最初の問題となる。これまでに、パラメトリックな表現法として、方向余弦、オイラー角、Cayley-Klein パラメータ、オイラー・パラメータ等¹⁾が提案され、問題に応じて最も都合のよい表示法が用いられている。この中でも、オイラー角による表示法は、直観的に姿勢を把握しやすいという利点を有するため、航空、宇宙の分野では最も広く用いられているが、いわゆる特異点が存在するために姿勢運動を大局的に論ずる際には不利である。また、オイラー角のとり方が多様であるため、そのとり方に応じて、かなり面倒な操作を強いられるという欠点をもつ。

本論文では、姿勢運動の計算機シミュレーションを念頭において、オイラー角による姿勢表示法を一般的に述べ、計算機アルゴリズムを導いた。これによって、回転順序と三個のオイラー角を与えれば、どのようなオイラー角であっても、変換マトリックスが計算でき、またオイラー角の時間微係数と剛体軸まわりの角速度との関係も、一般的に計算できる。さらに、特異点について検討を加え、2組のオイラー角の切り換えによる特異点の回避方式²⁾に言及する。なお、ここで

求めたアルゴリズムに基づく計算機プログラムのフローチャートを付録に示した。

2. オイラー角の種類と特異点

2.1 オイラー角の一般的表示

与えられた直交座標系から他の座標系への変換は、「特別の順序で引き続いて3回回転を行なうことによって達成することができ、オイラー角は、その場合の3個の相つぐ回転角」として定義される³⁾。一方、この変換は変換行列(3×3次元)によって数学的に表現されることから、オイラー角 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 による変換を次式で定義する。

$$T(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \triangleq T_{\sigma(3)}(\phi_3) \cdot T_{\sigma(2)}(\phi_2) \cdot T_{\sigma(1)}(\phi_1) \quad (1)$$

ただし、 $T_{\sigma(i)}\phi_i$ は 3×3 次元行列で、図1に示すように、 $\sigma(i)$ 軸まわりに ϕ_i だけ回転することに対応し

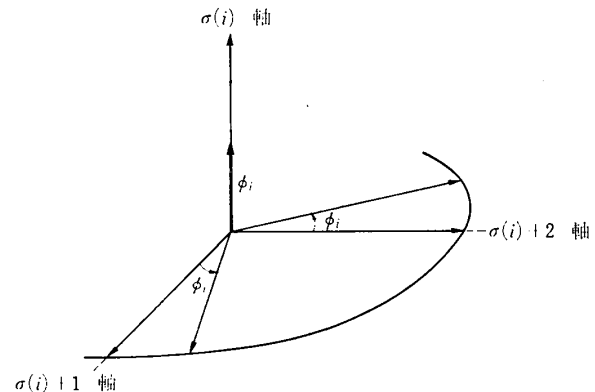


図1 $T_{\sigma(1)}(\phi_1)$ により定義される回転

* 昭和47年10月9日受付

** 宇宙研究グループ

た変換行列である。この行列は以下にのべる性質を有する。

1) 行列の要素:

$$T_{\sigma(i)}(\phi_i) = (C_{jk}^i) \quad (2)$$

とすれば,

$$C_{\sigma(i), \sigma(i)}^i = 1 \quad (2a)$$

$$C_{\sigma(i), j}^i = C_{j, \sigma(i)}^i = 0 \quad (j \neq \sigma(i)) \quad (2b)$$

$$C_{\sigma(i)+1, \sigma(i)+1}^i = C_{\sigma(i)+2, \sigma(i)+2}^i = \cos \phi_i \quad (2c)$$

$$C_{\sigma(i)+1, \sigma(i)+2}^i = \sin \phi_i \quad (2d)$$

$$C_{\sigma(i)+2, \sigma(i)+1}^i = -\sin \phi_i \quad (2e)$$

ただし,

$$\sigma(i)+l \equiv \phi(i) \pmod{3}, \quad l=1, 2 \quad (3)$$

2) 逆行列は転置行列に等しい¹⁾。すなわち

$$T_{\sigma(i)}^{-1}(\phi_i) = \tilde{T}_{\sigma(i)}(\phi_i) \quad (4)$$

また, (2a)~(2e)式を考慮すれば,

$$T_{\sigma(i)}^{-1}(\phi_i) = \tilde{T}_{\sigma(i)}(\phi_i) = T_{\sigma(i)}(-\phi_i) \quad (5)$$

3) 行列式は 1 に等しい。すなわち

$$|T_{\sigma(i)}(\phi_i)| = 1 \quad (6)$$

2.2 オイラー角の種類

オイラー角のとり方は, 回転軸 ($\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)$) の選び方と同数だけの任意性がある。同一の回転軸で引き続いて回転することは無意味であるから, これを除外すれば, 形式的には

オイラー角の取り方 = $3 \times 2 \times 2 = 12$ 通りだけ存在する。

しかしながら, 座標系および変換行列は巡回的 (cyclic) な入れ替えに対して不変であるから (たとえば ($\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)$) = (1, 2, 1) のときは (3, 1, 3) と全く同一の性質をもつ), 本質的に異なるオイラー角の組み合わせは,

オイラー角の取り方 = $3 \times 2 \times 2 / 3 = 4$ 通りとなる。したがって, 一般性を失なうことなく $\sigma(1) = 3$ に固定した場合, 基本的なオイラー角は, すなわち回転軸のとり方は, 表 1 の 4 種類となる。

表 1 基本的なオイラーの種類

	$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\sigma(3)$	特異点
1	3	1	2	$\cos \phi_2 = 0$
2	3	1	3	$\sin \phi^2 = 0$
3	3	2	1	$\cos \phi_2 = 0$
4	3	2	3	$\sin \phi_2 = 0$

なお, オイラー角による座標系の変換を行なう際に, 変換後の座標系で記述した角速度とオイラー角の時間微係数との関係が重要である。この場合に, オイ

ラー角のとり方に依存して $\cos \phi_2 = 0$ または $\sin \phi_2 = 0$ において, 変換に特異点が存在する。表 1 の右欄に, 特異点を発生させる ϕ_2 の値を記した。この点に関しては 4.2 節で詳述する。

3. ベクトルの座標変換

3.1 順変換 ($\mathbf{x}_B \rightarrow \mathbf{x}_R$)

ある座標系 (たとえば基準座標系) で表わされるベクトルを \mathbf{x}_R とし, (1) 式で定義されるオイラー角変換後の座標系 (たとえば機体座標系) でこれを表わした時のベクトルを \mathbf{x}_B とすれば,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= T(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \mathbf{x}_R \\ &= T_{\sigma(3)}(\phi_3) \cdot T_{\sigma(2)}(\phi_2) \cdot T_{\sigma(1)}(\phi_1) \mathbf{x}_R \quad (7) \end{aligned}$$

ここで $T_{\sigma(i)}(\phi_i)$, ($i=1, 2, 3$) は (2a)~(2e) 式で与えられる。これらの式は, 計算機アルゴリズムとして極めて実現が容易である上に, ϕ_i が変化する毎に計算しなおさなければならない要素は (2c)~(2e) に限られる。すなわち, (2a)~(2e) の計算は, 次のように大別される。

1) 変換軸 ($\sigma(i)$) を決定した場合不変な要素:

$$\left. \begin{aligned} C_{\sigma(i), \sigma(i)}^i &= 1 \\ C_{\sigma(i), \sigma(i)+1}^i &= 0 \\ C_{\sigma(i), \sigma(i)+2}^i &= 0 \\ C_{\sigma(i)+1, \sigma(i)}^i &= 0 \\ C_{\sigma(i)+2, \sigma(i)}^i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

2) ϕ_i の変化毎に変わる要素

① 独立に計算を要する要素

$$C_{\sigma(i)+1, \sigma(i)+1}^i = \cos \phi_i \quad (8b)$$

$$C_{\sigma(i)+1, \sigma(i)+2}^i = \sin \phi_i \quad (8b')$$

② 置きかえによって求められる要素

$$\left. \begin{aligned} C_{\sigma(i)+2, \sigma(i)+2}^i &= C_{\sigma(i)+1, \sigma(i)+1}^i \\ C_{\sigma(i)+2, \sigma(i)+1}^i &= -C_{\sigma(i)+1, \sigma(i)+2}^i \end{aligned} \right\} \quad (8c)$$

以上によって $\sigma(i)$ 軸まわりの回転に対応する変換行列 $T_{\sigma(i)}(\phi_i)$ の 9 個の要素 C_{jk} ($j, k=1, 2, 3$) が求められる。 $\sigma(i)$ については全く任意であるから, 3 個の変換軸に対して上記のアルゴリズムは共通して使用できる。さらに, (1) 式に基いて, 変換行列 $T(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ は行列の乗算を行なうことによって求められる。計算機アルゴリズムは次のようになる。

<条 件>

回転軸および回転順序を 3 ケタの整数 lmn

($1 \leq l, m, n \leq 3$ かつ $l \neq m, m \neq n$) で, また回転角を ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 で与え, さらにベクトル \mathbf{x}_B が与えられるものとする。

<計算手順>

1° 回転順序が前の回転順序と同一 ($lmn = l'm'n'$) かどうか判定し、もし同一ならば、2° ~ 4° の計算を省略する。

2° $\sigma(i)$ の決定

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= [lmn/100]^* = l && \text{回転角 } \phi_1 \\ \sigma(2) &= [(lmn - 100l)/10] = m && \text{ " } \phi_2 \\ \sigma(3) &= lmn - 100l - 10m = n && \text{ " } \phi_3 \end{aligned}$$

3° $\sigma(i)+1, \sigma(i)+2$ の計算。ただし、(3)式の合同式により、いずれの値も3を越えないものとする。

4° 変換軸固定の場合に不変な要素(8a)式の計算

5° ϕ_i にしたがって変化する要素 (8b) ~ (8c) 式の計算

.....

以上の計算により $T_{\sigma(1)}(\phi)$ の各要素が計算されたことになる。 $T_{\sigma(2)}(\phi_2)$ および $T_{\sigma(3)}(\phi_3)$ については 3° ~ 5° の計算をくりかえせばよい。

6° 変換行列 $T(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ((1)式)の計算

7° 必要があれば(7)式によって x_B を計算する。

この計算手順による計算機プログラムのフローチャートを付録 A-1 図に示した**。このプログラムでは、メモリを節約するために、 $T_{\sigma(i)}(\phi_i)$ に対応する行列を共通に使用している。したがって、回転順序が不変の場合でも 4° の計算は省略されない。また、2.2 で述べた 12 種類のオイラー角すべてが許容される。さらに、次節で述べる逆変換も同一プログラム内で計算される。

3.2 逆変換 ($x_B \rightarrow x_R$)

前節に述べた変換の逆変換が要求されることが多い。2.1 節で与えられた諸性質を考慮すれば、前節のアルゴリズムをわずかに修正するだけで、逆変換アルゴリズムが得られる。

(7)式から、

$$\begin{aligned} x_B &= T^{-1}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)x_R \\ &= T_{\sigma(1)}^{-1}(\phi_1) \cdot T_{\sigma(2)}^{-1}(\phi_2) \cdot T_{\sigma(3)}^{-1}(\phi_3)x_R \end{aligned}$$

(4), (5)式から

$$\begin{aligned} T^{-1}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= T_{\sigma(1)}^{-1}(\phi_1) \cdot T_{\sigma(2)}^{-1}(\phi_2) \cdot T_{\sigma(3)}^{-1}(\phi_3) \\ &= \tilde{T}_{\sigma(1)}(\phi_1) \cdot \tilde{T}_{\sigma(2)}(\phi_2) \cdot \tilde{T}_{\sigma(3)}(\phi_3) \\ &= T_{\sigma(1)}(-\phi_1) \cdot T_{\sigma(2)}(-\phi_2) \cdot T_{\sigma(3)}(-\phi_3) \end{aligned} \tag{9}$$

$T_{\sigma(i)}(-\phi_i)$ の要素のうちで(8a) ~ (8c)式で与えられる $T_{\sigma(i)}(\phi_i)$ と本質的に異なるのは(8b')式のみであること

と、(9)式は(7)式と行列の乗算順序が逆であることに注目すれば、前節のアルゴリズムのうち修正すべきは次の2点であることが明らかである。

5° の計算のうちで、(8b') に対応する要素は

$$T_{\sigma(i)+1, \sigma(i)+2} = -\sin \phi_i$$

6° の乗算順序を逆とする。

4. 角速度ベクトルとオイラー角の微係数との関係

角速度ベクトルを、オイラー角と時間に関するその微係数で表わすことが、しばしば必要となる。また、逆に、オイラー角の微係数を角速度ベクトルから求めることも航空宇宙機の飛しようシミュレーションにおいて要求される。とくに剛体の運動方程式を論じるには、機体軸が最も有用であるとされているので、これらの関係は重要である。

4.1 順変換 ($\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3 \rightarrow (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$)

図1に示すように、オイラー角 ϕ_i の時間微係数 $\dot{\phi}_i$ は、 $\sigma(i)$ 軸と方向が一致する。 $\dot{\phi}_i$ を座標系で表わすには、回転前の座標系と回転後の座標系と、どちらを用いてもよいが、機体軸の角速度との関係を論ずる際には回転後の座標系で表わす方が簡明である。したがって、変換後の座標軸(たとえば機体軸)まわりの角速度ベクトルを ω ($\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$) とすれば、

$$\omega = \dot{\phi}_1 x_{\sigma(1)} + \dot{\phi}_2 x_{\sigma(2)} + \dot{\phi}_3 x_{\sigma(3)} \tag{10}$$

ここで $x_{\sigma(i)}$ は i 番目の回転軸に一致した単位ベクトルを変換後の座標系で表わしたもので、以下で述べるように計算される。

$$x_{\sigma(1)} = T_{\sigma(3)}(\phi_3) \cdot T_{\sigma(2)}(\phi_2) x_1 \tag{11a}$$

$$x_{\sigma(2)} = T_{\sigma(3)}(\phi_3) x_2 \tag{11b}$$

$$x_{\sigma(3)} = x_3 \tag{11c}$$

ただし、 x_i は Kronecker の δ 記号によって

$$x_i = \begin{bmatrix} \delta_1^{(i)} \\ \delta_2^{(i)} \\ \delta_3^{(i)} \end{bmatrix} \quad \delta_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & j = \sigma(i) \\ 0 & j \neq \sigma(i) \end{cases} \tag{12}$$

また、(10)式を行列を用いて表わせば、

$$\omega \triangleq \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = S(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

ただし $S(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (b_{ij})$ は 3×3 次元行列で、各要素 b_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) は(11)式に基いて計算される。 $\sigma(i)$ 軸まわりの変換行列の要素(2)式と(12)式の関係から b_{ij} は次のようにして求められる。

$\dot{\phi}_1$ に関する要素: (11a)式に(2)式を代入すれば

* [] はガウス記号

** A-1 図の a は (8b') 式の係数で、3.2 節の逆変換では逆符号。

$$\mathbf{x}_{\sigma(1)} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 C_{1,j}^3 C_{j,1}^2 & \sum_{j=1}^3 C_{1,j}^3 C_{j,2}^2 & \sum_{j=1}^3 C_{1,j}^3 C_{j,3}^2 \\ \sum_{j=1}^3 C_{2,j}^3 C_{j,1}^2 & \sum_{j=1}^3 C_{2,j}^3 C_{j,2}^2 & \sum_{j=1}^3 C_{2,j}^3 C_{j,3}^2 \\ \sum_{j=1}^3 C_{3,j}^3 C_{j,1}^2 & \sum_{j=1}^3 C_{3,j}^3 C_{j,2}^2 & \sum_{j=1}^3 C_{3,j}^3 C_{j,3}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1^{\sigma(1)} \\ \delta_2^{\sigma(1)} \\ \delta_3^{\sigma(1)} \end{pmatrix}$$

右辺の乗算の際に、(12)式から行列の $\sigma(1)$ 列のみが寄与する。したがって

$$\mathbf{x}_{\sigma(1)} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 C_{1,j}^3 C_{j,\sigma(1)}^2 \\ \sum_{j=1}^3 C_{2,j}^3 C_{j,\sigma(1)}^2 \\ \sum_{j=1}^3 C_{3,j}^3 C_{j,\sigma(1)}^2 \end{pmatrix}$$

ベクトル $\mathbf{x}_{\sigma(1)}$ の要素が $b_{i,1}$ に対応することから

$$b_{i,1} = \sum_{j=1}^3 C_{i,j}^3 C_{j,\sigma(1)}^2 \quad (i=1, 2, 3) \quad (14a)$$

ϕ_2 に関連する要素 $b_{i,2}$: 同様に (11b), (2) 式から、

$$\mathbf{x}_{\sigma(2)} = \begin{pmatrix} C_{1,1}^3 & C_{1,2}^3 & C_{1,3}^3 \\ C_{2,1}^3 & C_{2,2}^3 & C_{2,3}^3 \\ C_{3,1}^3 & C_{3,2}^3 & C_{3,3}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1^{\sigma(2)} \\ \delta_2^{\sigma(2)} \\ \delta_3^{\sigma(2)} \end{pmatrix}$$

乗算の結果、 $\sigma(2)$ 行のみが残るから、

$$\mathbf{x}_{\sigma(2)} = \begin{pmatrix} C_{1,\sigma(2)}^3 \\ C_{2,\sigma(2)}^3 \\ C_{3,\sigma(2)}^3 \end{pmatrix}$$

ベクトル $\mathbf{x}_{\sigma(2)}$ の各要素が $b_{i,2}$ に対応することから

$$b_{i,2} = C_{i,\sigma(2)}^3 \quad (i=1, 2, 3) \quad (14b)$$

ϕ_3 に関連する要素 $b_{i,3}$: (11c), (12)式から、

$$b_{i,3} = \delta_i^{\sigma(3)} = \begin{cases} 1, & i = \sigma(3) \\ 0, & i \neq \sigma(3) \end{cases} \quad (14c)$$

以上をまとめれば

$$S(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 C_{1,j}^3 C_{j,\sigma(1)}^2 & C_{1,\sigma(2)}^3 & \delta_1^{\sigma(3)} \\ \sum_{j=1}^3 C_{2,j}^3 C_{j,\sigma(1)}^2 & C_{2,\sigma(2)}^3 & \delta_2^{\sigma(3)} \\ \sum_{j=1}^3 C_{3,j}^3 C_{j,\sigma(1)}^2 & C_{3,\sigma(2)}^3 & \delta_3^{\sigma(3)} \end{pmatrix} \quad (15)$$

(15)式の変換行列を計算機で求めるアルゴリズムは次の通りである。

<条件>

回転軸および回転順序を3ケタの整数 lmn

($1 \leq l, m, n < 3$ かつ $l \neq m, m \neq n$) で与え、回転角 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 およびその時間微係数 $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3$ が与えられるものとする。

<計算手順>

1° 回転順序 lmn が前の回転順序と同一であるかを判定し、もし同一ならば 2°~4° の計算を省略する。

2° $\sigma(i)$ の決定 (3.1節の 2° と同じ)

3° $\sigma(i)+1, \sigma(i)+2$ の計算 (3.1節 3° と同じ)

4° 変換軸固定の場合に不変の要素の計算:

$b_{i,3}$ ((14c)式) および $C_{i,j}^3, C_{i,j}^2$ のうち 5° で計算されるもの以外 ((8a)式を用いる)。

5° ϕ_i に従って変化する要素: $T_{\sigma(2)}(\phi_2), T_{\sigma(3)}(\phi_3)$ について (8b), (8c) を計算する。

6° 変換行列 $S(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ の計算。

7° (13)式によって ω を計算する。

この計算手順による計算機プログラムのフローチャートを付録 A-2 図に示した。次節で述べる逆変換も、同一プログラム内で計算される。

4.2 逆変換 ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$) \rightarrow (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3)

前節で求めた $S(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ の逆変換は、 $T^{-1}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ のように簡単には計算できないため、通常の逆行列の計算法に従うことにする。

$$\left. \begin{aligned} S^{-1}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= (d_{ij}) \\ d_{ij} &= \frac{|B_j^i|}{|S|} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ただし、 B_{ij} は S の余因子行列であり、 $||$ は行列式である。 $|S|$ は (15)式から数値的に計算することもできるが、式の変形によって、極めて簡単な形となることを以下で導く。 $|S| = |b_{i,j}|$ の第 3 列要素に (14c) 式を代入すると

$$|S| = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \delta_1^{\sigma(3)} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \delta_2^{\sigma(3)} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & \delta_3^{\sigma(3)} \end{vmatrix}$$

であるが、(14c)式から $\delta_{\sigma(3)}^{\sigma(3)} = 1, \delta_{\sigma(3)+1}^{\sigma(3)} = 0, \delta_{\sigma(3)+2}^{\sigma(3)} = 0$ であるから $i = \sigma(3)$ 行を第 1 行に持って行き、他の行を前と同じ循環に並べても $|S|$ は変わらない。すなわち

$$|S| = \begin{vmatrix} b_{\sigma(3),1} & b_{\sigma(3),2} & 1 \\ b_{\sigma(3)+1,1} & b_{\sigma(3)+1,2} & 0 \\ b_{\sigma(3)+2,1} & b_{\sigma(3)+2,2} & 0 \end{vmatrix}$$

したがって $|S|$ は次のように計算される。

$$\begin{aligned} |S| &= b_{\sigma(3)+1,1} b_{\sigma(3)+2,2} - b_{\sigma(3)+2,1} b_{\sigma(3)+1,2} \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 C_{\sigma(3)+1,j}^3 C_{j,\sigma(1)}^2 \right) C_{\sigma(3)+2,\sigma(2)}^3 \\ &\quad - \left(\sum_{j=1}^3 C_{\sigma(3)+2,j}^3 C_{j,\sigma(1)}^2 \right) C_{\sigma(3)+1,\sigma(2)}^3 \\ &= \sum_{j=1}^3 \{ C_{\sigma(3)+1,j}^3 C_{\sigma(3)+2,\sigma(2)}^3 \\ &\quad - C_{\sigma(3)+2,j}^3 C_{\sigma(3)+1,\sigma(2)}^3 \} C_{j,\sigma(1)}^2 \end{aligned}$$

上式の各項が j の循環式であることと、 $\sigma(i)$ が 3 を法として合同である ((3)式) ことに留意すれば、

$$j \rightarrow j + \sigma(2)$$

としてもよい。このとき、 $j=3$ に対しては (2b) 式か

ら $C_{\sigma(2)+3, \sigma(1)}^3 = C_{\sigma(2), \sigma(1)}^3 = 0$ ($\sigma(2) \neq \sigma(1)$)
 となる。したがって $j=1, 2$ に対応する2項のうち、どちらか一方は必ず
 0 となる。すなわち、
 i) $\sigma(2) = \sigma(3) + 1$ ならば
 $\sigma(2) + 1 = \sigma(3) + 2, \sigma(2) + 2 = \sigma(3) + 3 = \sigma(3)$
 $C_{\sigma(3)+1, \sigma(2)+2}^3 = C_{\sigma(3)+1, \sigma(3)}^3 = 0$
 $C_{\sigma(3)+2, \sigma(2)+2}^3 = C_{\sigma(3)+2, \sigma(3)}^3 = 0$ ((2b)式から)
 したがって、(2c)~(2e)式から

$$|S| = \sum_{j=1}^3 (C_{\sigma(3)+1, \sigma(2)+j}^3 C_{\sigma(3)+2, \sigma(2)}^3 - C_{\sigma(3)+3, \sigma(2)+j}^3 C_{\sigma(3)+1, \sigma(2)}^3) C_{\sigma(2)+j, \sigma(1)}^3 \quad (17)$$

さらに、 $\sigma(2)$ と $\sigma(3)$ との関係によって、(17)式の

$$\begin{aligned} |S| &= (C_{\sigma(3)+1, \sigma(2)+1}^3 C_{\sigma(3)+2, \sigma(2)}^3 - C_{\sigma(3)+3, \sigma(2)+1}^3 C_{\sigma(3)+1, \sigma(2)}^3) C_{\sigma(2)+1, \sigma(1)}^3 \\ &= (C_{\sigma(3)+1, \sigma(3)+2}^3 C_{\sigma(3)+2, \sigma(3)+1}^3 - C_{\sigma(3)+2, \sigma(3)+2}^3 C_{\sigma(3)+1, \sigma(3)+1}^3) C_{\sigma(2)+1, \sigma(1)}^3 \\ &= (\sin \phi_3 (-\sin \phi_3) - \cos \phi_3 \cos \phi_3) C_{\sigma(2)+1, \sigma(1)}^3 \\ &= -C_{\sigma(2)+1, \sigma(1)}^3 \end{aligned} \quad (17a)$$

ii) $\sigma(2) = \sigma(3) + 2$ ならば $\sigma(2) + 1 = \sigma(3) + 3 \equiv \sigma(3)$ より前と同様に

$$\begin{aligned} |S| &= (C_{\sigma(3)+1, \sigma(2)+2}^3 C_{\sigma(3)+2, \sigma(2)}^3 - C_{\sigma(3)+3, \sigma(2)+2}^3 C_{\sigma(3)+1, \sigma(2)}^3) C_{\sigma(2)+2, \sigma(1)}^3 \\ &= (C_{\sigma(3)+1, \sigma(3)+1}^3 C_{\sigma(3)+2, \sigma(3)+1}^3 - C_{\sigma(3)+2, \sigma(3)+1}^3 C_{\sigma(3)+1, \sigma(3)+2}^3) C_{\sigma(2)+2, \sigma(1)}^3 \\ &= (\cos \phi_3 \cdot \cos \phi_3 - (-\sin \phi_3) \sin \phi_3) C_{\sigma(2)+2, \sigma(1)}^3 \\ &= C_{\sigma(2)+2, \sigma(1)}^3 \end{aligned} \quad (17b)$$

$\sigma(2)$ の軸まわりの回転について、(2c)~(2e)式を適用すれば、(17a), (17b)式は次のようになる。

$$|S| = \begin{cases} -C_{\sigma(2)+1, \sigma(2)+1}^3 = -\cos \phi_2 & (\sigma(3) = \sigma(2) + 2, \sigma(1) = \sigma(2) + 1) \\ -C_{\sigma(2)+1, \sigma(2)+2}^3 = -\sin \phi_2 & (\sigma(3) = \sigma(2) + 2, \sigma(1) = \sigma(2) + 2) \\ C_{\sigma(2)+2, \sigma(2)+2}^3 = \cos \phi_2 & (\sigma(3) = \sigma(2) + 1, \sigma(1) = \sigma(2) + 2) \\ C_{\sigma(2)+2, \sigma(2)+1}^3 = -\sin \phi_2 & (\sigma(3) = \sigma(2) + 1, \sigma(1) = \sigma(2) + 1) \end{cases} \quad (18)$$

以上から、(16)式の分母が計算できる。計算機アルゴリズムとしては(17a), (17b)式を用いる方がよい。

逆変換の特異点

(16)式から明らかのように

$$|S| = 0$$

となる点において、逆変換が存在しない。(18)式から $|S| = 0$ となる点(特異点)は第2の回転角 ϕ_2 と回転軸 $\sigma(1), \sigma(3)$ で規定される。すなわち、

$$\text{特異点: } \begin{cases} \sigma(1) = \sigma(3) \text{ ならば } \phi_2 = 0 \text{ で } |S| = 0 \\ \sigma(1) \neq \sigma(3) \text{ ならば } \phi_2 = \pi/2 \text{ で } |S| = 0 \end{cases}$$

このように、どのようなオイラー角のとり方をして、必ず特異点が存在するので、第2の回転角 ϕ_2 が任意に変化するような運動を論ずる際には、異なる特異点を有する2組のオイラー角を用いなければならない。この場合生ずるオイラー角間の関係については次節で述べる。

5. 一般化力の変換

一般化座標の中に ϕ_i ($i=1, 2, 3$) を含む Lagrange 方程式の右辺に現われる一般化力 Q_i ($i=1, 2, 3$) とオイラー運動方程式の機軸まわりのトルク N_i ($i=1, 2, 3$) との関係を求める。

Lagrange 方程式を

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_i} = Q_i \quad (i=1, 2, 3)$$

ただし、 $\tilde{Q} \triangleq [Q_1, Q_2, Q_3]$

オイラー方程式を

$$I \cdot \omega - \omega \times I \cdot \omega = N$$

ただし、 $\tilde{N} \triangleq [N_1, N_2, N_3]$

とすれば、 Q_i は ϕ_i を増加させる方向を持つから、機体座標系で表わしたトルクの $x_{\sigma(i)}$ 成分(4.1節参照)となる。したがって

$$Q_i = \tilde{x}_{\sigma(i)} \cdot N = b_{1,i} N_1 + b_{2,i} N_2 + b_{3,i} N_3$$

あるいは

$$Q = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot N$$

(13)式の定義を用いれば、

$$Q = \tilde{S} \cdot N \quad (19)$$

となる。

この関係は、4.1節で論じた $\omega \rightarrow (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ の変換行列 S の転置行列によって、機軸まわりのトルクから一般化力への変換が行なわれることを意味してい

る*。したがって、この変換のアルゴリズムは、逆変換を含めて前節の結果を直接応用できる。単に、転置の操作のみを付加するだけで十分である。

6. 2組のオイラー角の関係

第2の回転軸 $\sigma(2)$ のまわりの回転角 ϕ_2 の変域が π を越えるような場合には、1組のオイラー角のみで変換を規定することはできないことを4節で示した。このような場合には、特異点の異なる2組のオイラー角を用い、 ϕ_2 の値に応じて適当に切替えることにより、この難点を避けることが可能である。オイラー角の間の切替のアルゴリズムを一般的に導き出すことは、極めて困難であるため、ここでは表1に示した4

組のオイラー角のうち、文献(2)で用いられている次の2組について変換アルゴリズムを求めることにする。なお、系およびオイラー角の名称も文献(2)に従うことにする。(図2参照)

β 系: $\sigma(1)=3, \sigma(2)=1, \sigma(3)=2$

$$T_\beta \triangleq T_2(\beta_3) \cdot T_1(\beta_2) \cdot T_3(\beta_1) \tag{20a}$$

$$S_\beta \triangleq \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 C_{1,j}^3 C_{j,3}^3 & C_{1,1}^3 & 0 \\ \sum_{j=1}^3 C_{2,j}^3 C_{j,3}^3 & C_{2,1}^3 & 1 \\ \sum_{j=1}^3 C_{3,j}^3 C_{j,3}^3 & C_{3,1}^3 & 0 \end{pmatrix} \tag{20b}$$

特異点 $\beta_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1) \quad (k=0, \pm 1, \dots)$

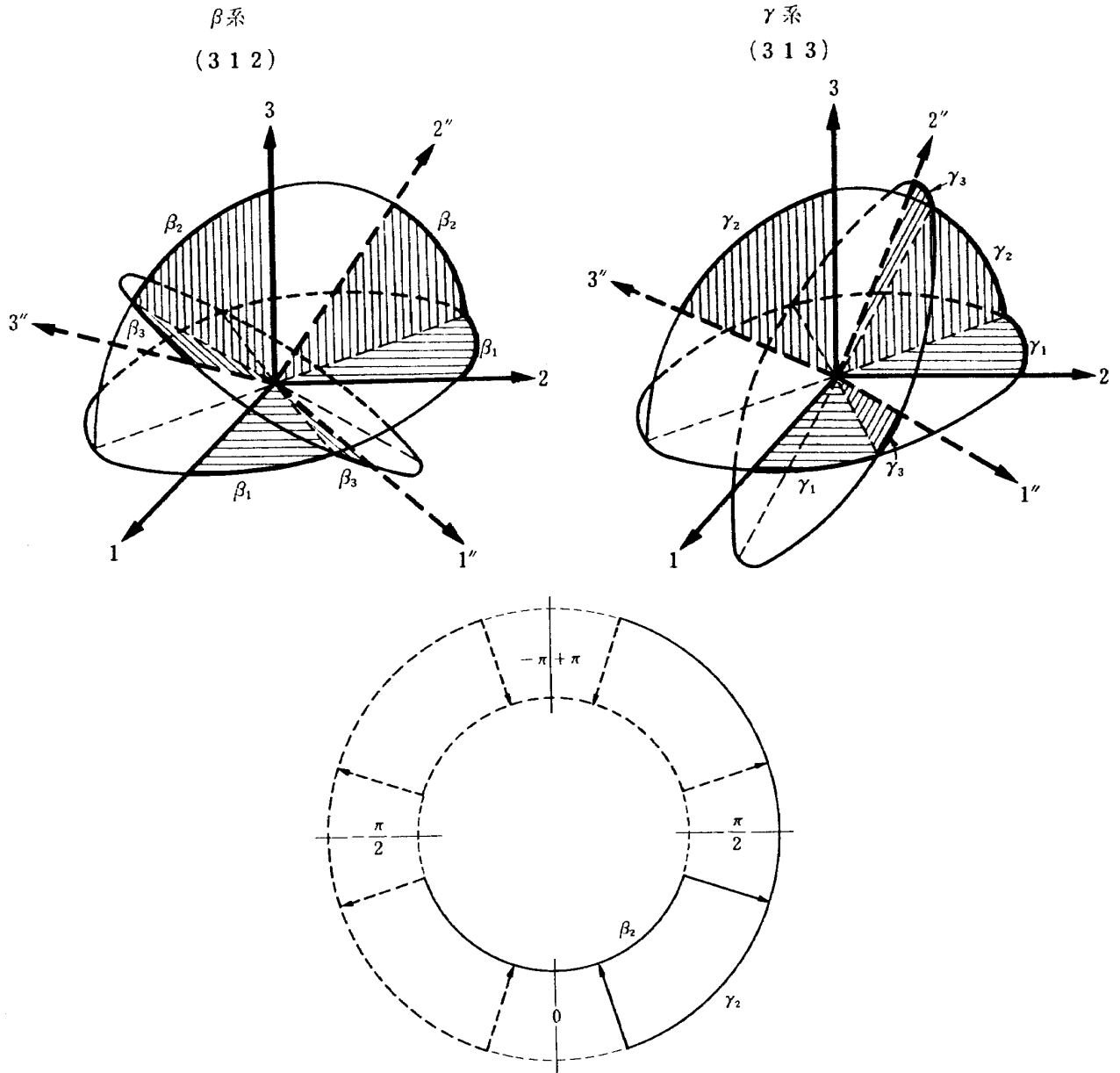


図2 β 系と γ 系、および切替のアルゴリズム

* $\sigma(1)=3, \sigma(2)=2, \sigma(3)=1$ の場合については文献(3)付録で誘導した。

γ 系: $\sigma(1)=3, \sigma(2)=1, \sigma(3)=3$

$$T_\gamma \triangleq T_3(\gamma_3) \cdot T_1(\gamma_2) \cdot T_3(\gamma_1) \quad (21a)$$

$$S_\gamma \triangleq \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 C_{1,j}^3 C_{j,3}^3 & C_{1,1}^3 & 0 \\ \sum_{j=1}^3 C_{2,j}^3 C_{j,3}^3 & C_{2,1}^3 & 0 \\ \sum_{j=1}^3 C_{3,j}^3 C_{j,3}^3 & C_{3,1}^3 & 1 \end{pmatrix} \quad (21b)$$

特異点 $\phi_2 = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

切換点における β_i と γ_i との関係

計算機のアルゴリズムとしては、計算精度を考慮すれば、特異点のみでなく、その近傍も避ける方がよく、一方、切換の回数は出来る限り少ない方が望ましい。これらの点に留意して、

- i) 特異点の $\pm\pi/10$ の範囲内ではその系を用いない*
- ii) i) の範囲に入らない限り、切換えはしない

ことにする。この場合には、切換のようすは図 2 に示すような履歴特性をもつことになる。

切換点において、 $\beta_i, \dot{\beta}_i, \gamma_i, \dot{\gamma}_i$ が満すべき条件は

$$T_\beta = T_\gamma \quad (\triangleq (C_{ij})) \quad (22a)$$

$$S_\beta \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{pmatrix} = S_\gamma \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_3 \end{pmatrix} \quad (22b)$$

より導かれる。切換が β 系から γ 系へ行なわれる場合と、その逆の場合とは、計算手順が全く異なるので次に各々の場合について述べる。

(2a)~(2e) を (20a), (21a) 式に代入して、(22a) 式を要素毎に書き出せば、

$$\left. \begin{aligned} c_{11}: & c\beta_1c\beta_3 - s\beta_1s\beta_2s\beta_3 = c\gamma_1c\gamma_3 - s\gamma_1c\gamma_2s\gamma_3 \\ c_{12}: & s\beta_1c\beta_3 + c\beta_1s\beta_2s\beta_3 = s\gamma_1c\gamma_3 + c\gamma_1c\gamma_2s\gamma_3 \\ c_{18}: & -c\beta_2s\beta_3 = s\gamma_2s\gamma_3 \\ c_{21}: & -s\beta_1c\beta_2 = -c\gamma_1s\gamma_3 - s\gamma_1c\gamma_2c\gamma_3 \\ c_{22}: & c\beta_1c\beta_2 = -s\gamma_1s\gamma_3 + c\gamma_1c\gamma_2c\gamma_3 \\ c_{23}: & s\beta_2 = s\gamma_2c\gamma_3 \\ c_{31}: & c\beta_1s\beta_3 + s\beta_1s\beta_2c\beta_3 = s\gamma_1s\gamma_2 \\ c_{32}: & -s\beta_1s\beta_3 + c\beta_1s\beta_2c\beta_3 = c\gamma_1s\gamma_2 \\ c_{33}: & c\beta_2c\beta_3 = c\gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

となる**。

1) β 系 $\rightarrow \gamma$ 系

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ および $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3$ が既知の時、 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ および $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ を求める。(23)式から、

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma_2 &= c_{33} = \cos \beta_2 \cdot \cos \beta_3 \\ \tan \gamma_3 &= \frac{c_{13}}{c_{23}} = \frac{-\cos \beta_2 \cdot \sin \beta_3}{\sin \beta_2} \\ \tan \gamma_1 &= \frac{c_{31}}{c_{32}} = \frac{\cos \beta_1 \sin \beta_3 + \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3}{-\sin \beta_1 \sin \beta_3 + \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

これより、

$$\gamma_2 = \cos^{-1} c_{33}$$

$$\gamma_3 = \begin{cases} \tan^{-1}(c_{13}/c_{23}) & (c_{23} > 0) \\ \tan^{-1}(c_{13}/c_{23}) + \pi & (c_{23} < 0, c_{13} > 0) \\ \tan^{-1}(c_{13}/c_{23}) - \pi & (c_{23} < 0, c_{13} < 0) \end{cases} \quad (25b)$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} \tan^{-1}(c_{31}/c_{32}) & (c_{32} > 0) \\ \tan^{-1}(c_{31}/c_{32}) + \pi & (c_{32} < 0, c_{31} > 0) \\ \tan^{-1}(c_{31}/c_{32}) - \pi & (c_{32} < 0, c_{31} < 0) \end{cases} \quad (25c)$$

ただし、 \cos^{-1}, \tan^{-1} は逆三角関数の主値を表わす。(25b), (25c)式は、FORTRAN IV における組み込み関数 DATAN 2 (x, y) で計算される)

$\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ を求めるために、 S_β および S_γ をそれぞれ(20b)および(21b)式から計算すれば、

$$S_\beta = \begin{pmatrix} -c\beta_2s\beta_3 & c\beta_3 & 0 \\ s\beta_2 & 0 & 1 \\ c\beta_2c\beta_3 & s\beta_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{s\beta_3}{c\beta_2} & 0 & \frac{c\beta_3}{c\beta_2} \\ c\beta_3 & 0 & s\beta_3 \\ \frac{s\beta_2s\beta_3}{c\beta_2} & 1 & -\frac{s\beta_2c\beta_3}{c\beta_2} \end{pmatrix},$$

$$S_\gamma = \begin{pmatrix} s\gamma_2s\gamma_3 & c\gamma_3 & 0 \\ s\gamma_2c\gamma_3 & -s\gamma_3 & 0 \\ c\gamma_2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s\gamma_3}{s\gamma_2} & \frac{c\gamma_3}{s\gamma_2} & 0 \\ c\gamma_3 & -s\gamma_3 & 0 \\ -\frac{c\gamma_2s\gamma_3}{s\gamma_2} & -\frac{c\gamma_2c\gamma_3}{s\gamma_2} & 1 \end{pmatrix}$$

となる。また、(22b)式を $\dot{\gamma}_i$ について解けば、

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_3 \end{pmatrix} = S_\gamma^{-1} S_\beta \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

* $\pm\pi/10$ にした理由は文献(2)に従っただけで、動的系のシミュレーションにおいては経験的に妥当なものと思われる。

** $c\beta_1 = \cos \beta_1, s\beta_1 = \sin \beta_1$ を意味する。

$$S_r^{-1}S_\beta = \begin{pmatrix} \frac{-s\gamma_3 c\beta_2 s\beta_3 + c\gamma_3 s\beta_2}{s\gamma_2} & \frac{s\gamma_3 c\beta_3}{s\gamma_2} & \frac{c\gamma_3}{s\gamma_2} \\ -(c\gamma_3 c\beta_2 s\beta_3 + s\gamma_3 s\beta_2) & c\gamma_3 c\beta_3 & -s\gamma_3 \\ \frac{c\gamma_2 s\gamma_3 c\beta_2 s\beta_3 - c\gamma_2 c\gamma_3 s\beta_2 + s\gamma_2 c\beta_2 c\beta_3}{s\gamma_2} & \frac{-c\gamma_2 s\gamma_3 c\beta_3 - s\beta_3 s\gamma_2}{s\gamma_2} & \frac{-c\gamma_2 c\gamma_3}{s\gamma_2} \end{pmatrix}$$

(23)式の関係を用いて、次のように簡略化される。

$$S_r^{-1}S_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s\gamma_3 c\beta_3}{s\gamma_2} & \frac{c\gamma_3}{s\gamma_2} \\ 0 & c\gamma_3 c\beta_3 & -s\gamma_3 \\ 0 & \frac{s\beta_3}{s^2\gamma_2} & -\frac{c\gamma_2 c\gamma_3}{s\gamma_2} \end{pmatrix}$$

したがって、

$$\dot{\gamma}_1 = \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \frac{s\gamma_3 c\beta_3}{s\gamma_2} + \dot{\beta}_3 \frac{c\gamma_3}{s\gamma_2} \quad (26a)$$

$$\dot{\gamma}_2 = \dot{\beta}_2 c\gamma_3 c\beta_3 - \dot{\beta}_3 s\gamma_3 \quad (26b)$$

$$\dot{\gamma}_3 = -\dot{\beta}_2 \frac{s\beta_3}{s^2\gamma_2} - \dot{\beta}_3 \frac{c\gamma_2 c\gamma_3}{c\gamma_2} \quad (26c)$$

文献(2)では、(25)式で与えられる γ_i ($i=1, 2, 3$)をそのまま微分して、次の形で求めている:

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{\dot{\beta}_2 s\beta_2 c\beta_3 + \dot{\beta}_3 c\beta_2 s\beta_3}{s\gamma_2} \quad (26a')$$

$$\dot{\gamma}_3 = \frac{\dot{\beta}_2 s\beta_3 - \dot{\beta}_3 s\beta_2 c\beta_2 c\beta_3}{s^2\gamma_2} \cdot c\gamma_3 \quad (26b')$$

$$\dot{\gamma}_1 = \dot{\beta}_1 + \frac{-\dot{\beta}_2 c\beta_1 s\beta_3 c\beta_3 + \dot{\beta}_3 s\beta_2}{s^2\beta_3 + s^2\beta_2 c^2\beta_3} \quad (26c')$$

(23)式の諸関係を考慮すれば、両者は全く同値である。両者の差異は、計算実行上の複雑さが異なる(明らかに前者が簡略である)という点の他に、計算順序が異なる所にある。すなわち、計算順序は、

(26a)~(26c) では; $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_1; \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3, \dot{\gamma}_1$

(26a')~(26c') では; $\gamma_2, \dot{\gamma}_2, \gamma_3, \dot{\gamma}_3, \gamma_1, \dot{\gamma}_1$

2) γ 系 \rightarrow β 系

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ が既知のとき、 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ を求める。

(23)式から、

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta_2 &= c_{23} = \sin \gamma_2 \cos \gamma_3 \\ \tan \beta_3 &= \frac{-c_{13}}{c_{33}} = \frac{-\sin \gamma_2 \sin \gamma_3}{\cos \gamma_2} \\ \tan \beta_1 &= \frac{-c_{21}}{c_{22}} = \frac{\cos \gamma_1 \sin \gamma_3 + \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos \gamma_3}{-\sin \gamma_1 \sin \gamma_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos \gamma_3} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

これより、

$$\beta_2 = \text{Sin}^{-1} c_{23} \quad (28a)$$

$$\beta_3 = \begin{cases} T_{an}^{-1}(-c_{13}/c_{33}) & (c_{33} > 0) \\ T_{an}^{-1}(-c_{13}/c_{33}) + \pi & (c_{33} < 0, c_{13} > 0) \\ T_{an}^{-1}(-c_{13}/c_{33}) - \pi & (c_{33} < 0, c_{13} < 0) \end{cases} \quad (28b)$$

$$\beta_1 = \begin{cases} T_{an}^{-1}(-c_{21}/c_{22}) & (c_{22} > 0) \\ T_{an}^{-1}(-c_{21}/c_{22}) + \pi & (c_{22} < 0, c_{21} > 0) \\ T_{an}^{-1}(-c_{21}/c_{22}) - \pi & (c_{22} < 0, c_{21} < 0) \end{cases} \quad (28c)$$

ただし、 $\text{Sin}^{-1}, T_{an}^{-1}$ は逆三角関数の主値を表わす。次に、(22b)式を $\dot{\beta}_i$ について解き、 S_β^{-1}, S_r を代入すれば、

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{pmatrix} = S_\beta^{-1} S_r \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_3 \end{pmatrix}$$

$$S_\beta^{-1} S_r = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{s\beta_3 c\gamma_3}{c\beta_2} & \frac{c\beta_3}{c\beta_2} \\ 0 & c\beta_3 c\gamma_3 & s\beta_3 \\ 0 & \frac{s\beta_3}{s\gamma_2 c\beta_2} & -\frac{s\beta_2 c\beta_3}{c\beta_2} \end{pmatrix}$$

したがって

$$\dot{\beta}_1 = \dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2 \frac{s\beta_3 c\gamma_3}{c\beta_2} + \dot{\gamma}_3 \frac{c\beta_3}{c\beta_2} \quad (29a)$$

$$\dot{\beta}_2 = \dot{\gamma}_2 c\beta_3 c\gamma_3 + \dot{\gamma}_3 s\beta_3 \quad (29b)$$

$$\dot{\beta}_3 = \dot{\gamma}_2 \frac{s\beta_3}{s\gamma_2 c\beta_2} - \dot{\gamma}_3 \frac{s\beta_2 c\beta_3}{c\beta_2} \quad (29c)$$

あるいは、(27)式をそのまま微分して

$$\dot{\beta}_2 = \frac{\dot{\gamma}_2 c\gamma_2 c\gamma_3 - \dot{\gamma}_3 s\gamma_2 s\gamma_3}{c\beta_2} \quad (29a')$$

$$\dot{\beta}_3 = \frac{\dot{\gamma}_2 s\gamma_3 + \dot{\gamma}_3 s\gamma_2 c\gamma_2 c\gamma_3}{c^2\gamma_2} \cdot (-c^2\beta_3) \quad (29b')$$

$$\dot{\beta}_1 = [(s^2\gamma_3 + c^2\gamma_2 c^2\gamma_3)\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 s\gamma_2 s\gamma_3 c\gamma_3 + \dot{\gamma}_3 c\gamma_2] \frac{1}{c^2\beta_2} \quad (29c')$$

(29a~c) 式と(29a'~c')との間には、 β 系 \rightarrow γ 系で述べたと同様の関係がある。

7. あとがき

オイラー角による座標変換に対する計算機アルゴリズムを一般的に論じ、オイラー角の種類、特異点およびその回避方式を明確にした。これによって、任意に定義したオイラー角に関する変換マトリックスが計算でき、またオイラー角の時間微係数と機体軸まわりの角速度を関係づけるマトリックスも計算できることを示した。ここで導いたアルゴリズムに基いて、計算機プログラムを作成し、スピナー制御シミュレーション・プログラムで用いた結果、このアルゴリズムの有効性が十分実証された⁴⁾。

最後に、本研究を行なうにあたり適切な助言をいただきました村上主任研究官、およびプログラム作成を助けて下さいました富士通株式会社第一システム部、本多祐次氏に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Goldstein, H.: Classical Mechanics, Adison-Wesley Publishing Company, 1950.
- 2) Pardoe, P. P.: A Description of the Digital Attitude Simulation, Johns Hopkins University, TG-964, Feb. 1968.
- 3) 村上 力, 狼 嘉彰: 対称スピンの衛星用ニューテーション・ダンパの解析, 航技研 TM-207, 1971年9月
- 4) 村上 力, 狼 嘉彰: スピン軸方向制御のシミュレーション, 日本航空宇宙学会(年会)講演集 No. 6A5, 1972年4月

付録 I オイラー角のとり方の種類

2.2 節で述べた 12 種類のオイラー角のとり方と、我々が表に示した基本的なオイラー角にどのように対応するかを表 A-1 に示す。

表 A-1 オイラー角の種類

$\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)$	表 1 における 基本的オイラ ー角	特 異 点		$\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)$	表 1 における 基本的オイラ ー角	特 異 点	
1 2 1	3 1 3	$\sin \phi_2=0$		2 3 1	3 1 2	$\cos \phi_2=0$	} 6 節参照
1 2 3	3 1 2	$\cos \phi_2=0$		2 3 2	3 1 3	$\sin \phi_2=0$	
1 3 1	3 2 3	$\sin \phi_2=0$		3 1 2	3 1 2	$\cos \phi_2=0$	
1 3 2	3 2 1	$\cos \phi_2=0$		3 1 3	3 1 3	$\sin \phi_2=0$	
2 1 2	3 2 3	$\sin \phi_2=0$		3 2 1	3 2 1	$\cos \phi_2=0$	
2 1 3	3 2 3	$\cos \phi_2=0$		3 2 3	3 2 3	$\sin \phi_2=0$	

付録 II フローチャート

本文で導かれた計算機アルゴリズムのフローチャートを図 A-1 から図 A-3 までに示した。

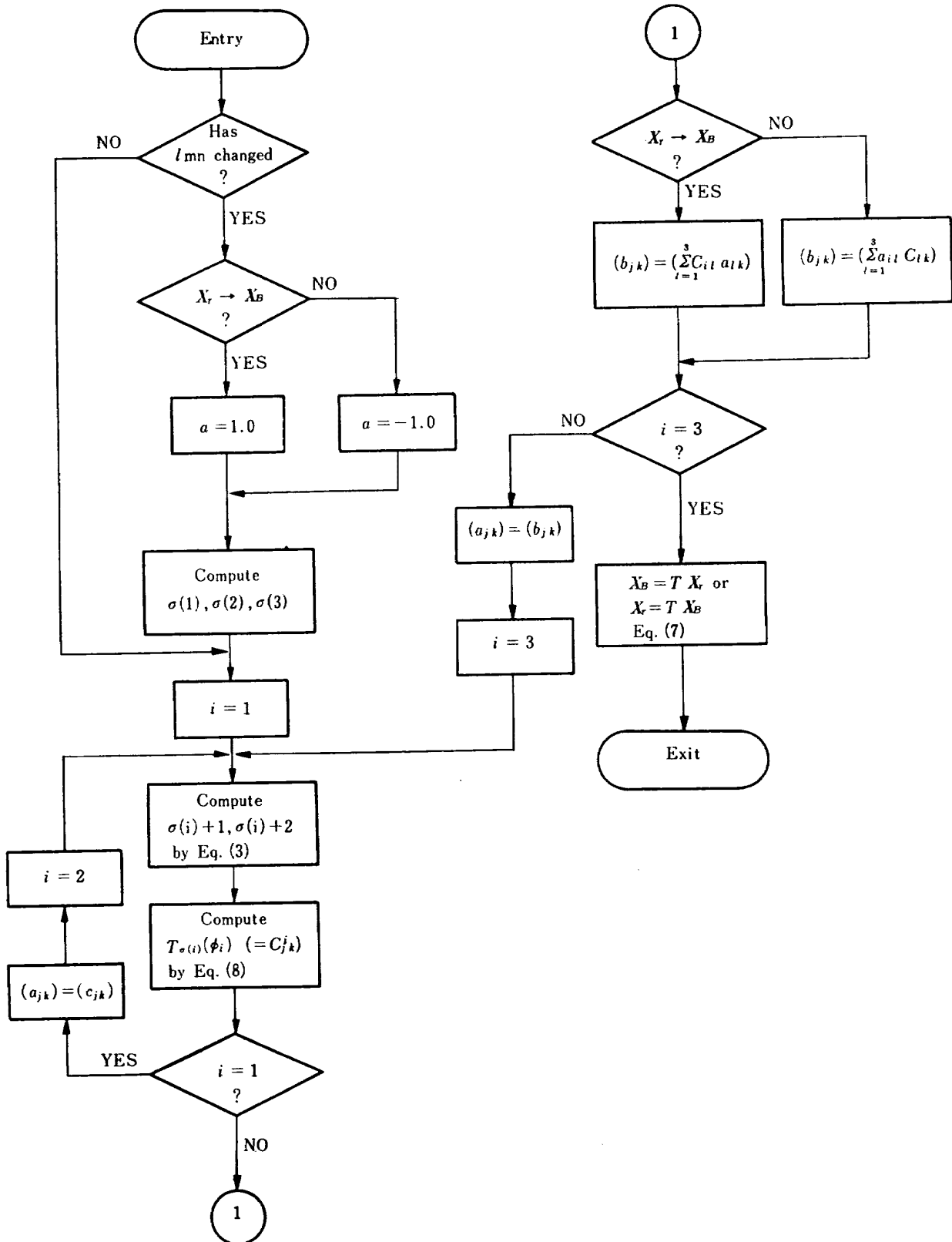


Fig. A-1 Flow chart of the algorithm in § 3.1 and § 3.2

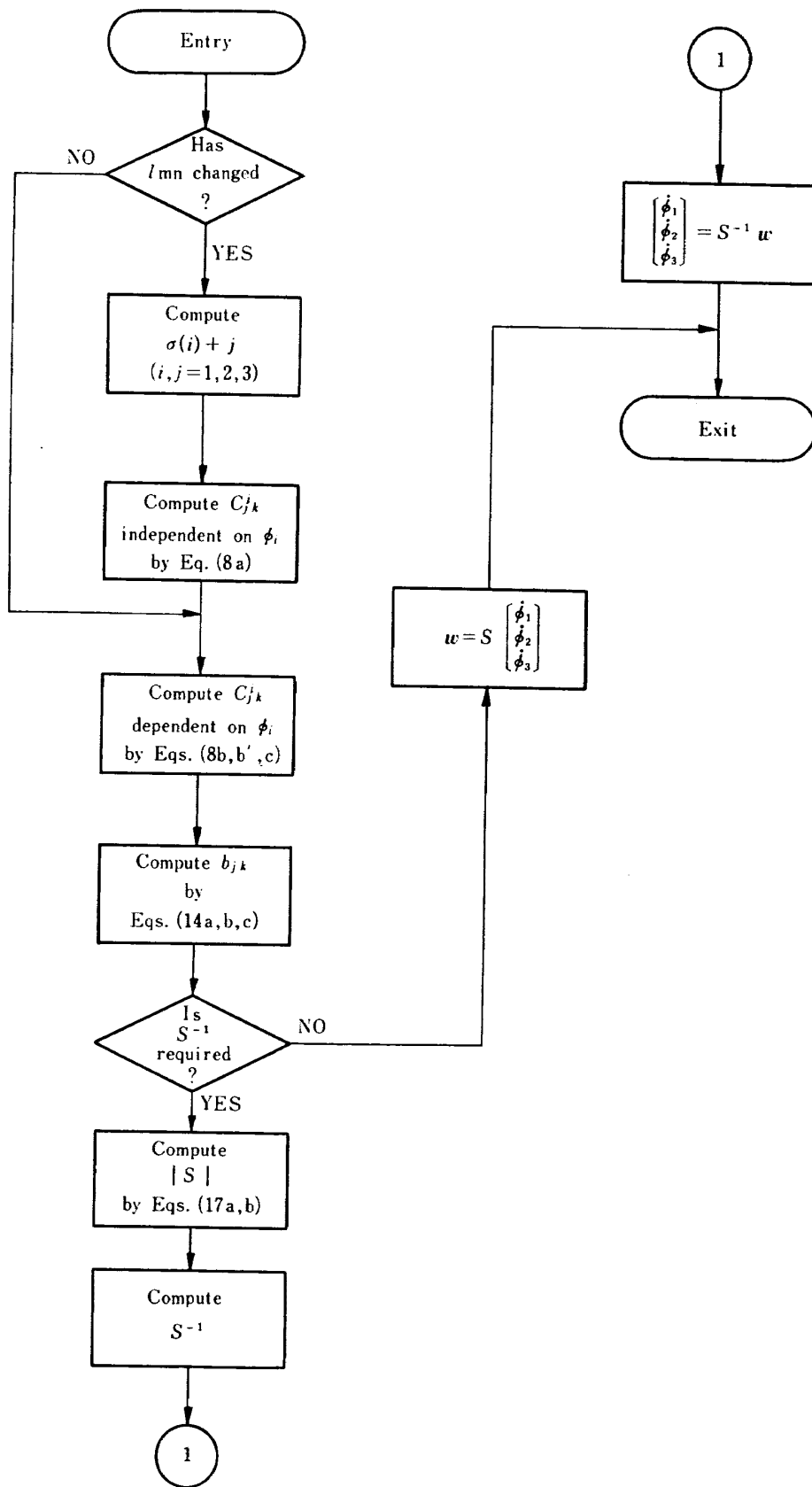


Fig. A-2 Flow chart of the algorithm in § 4.1 and § 4.2

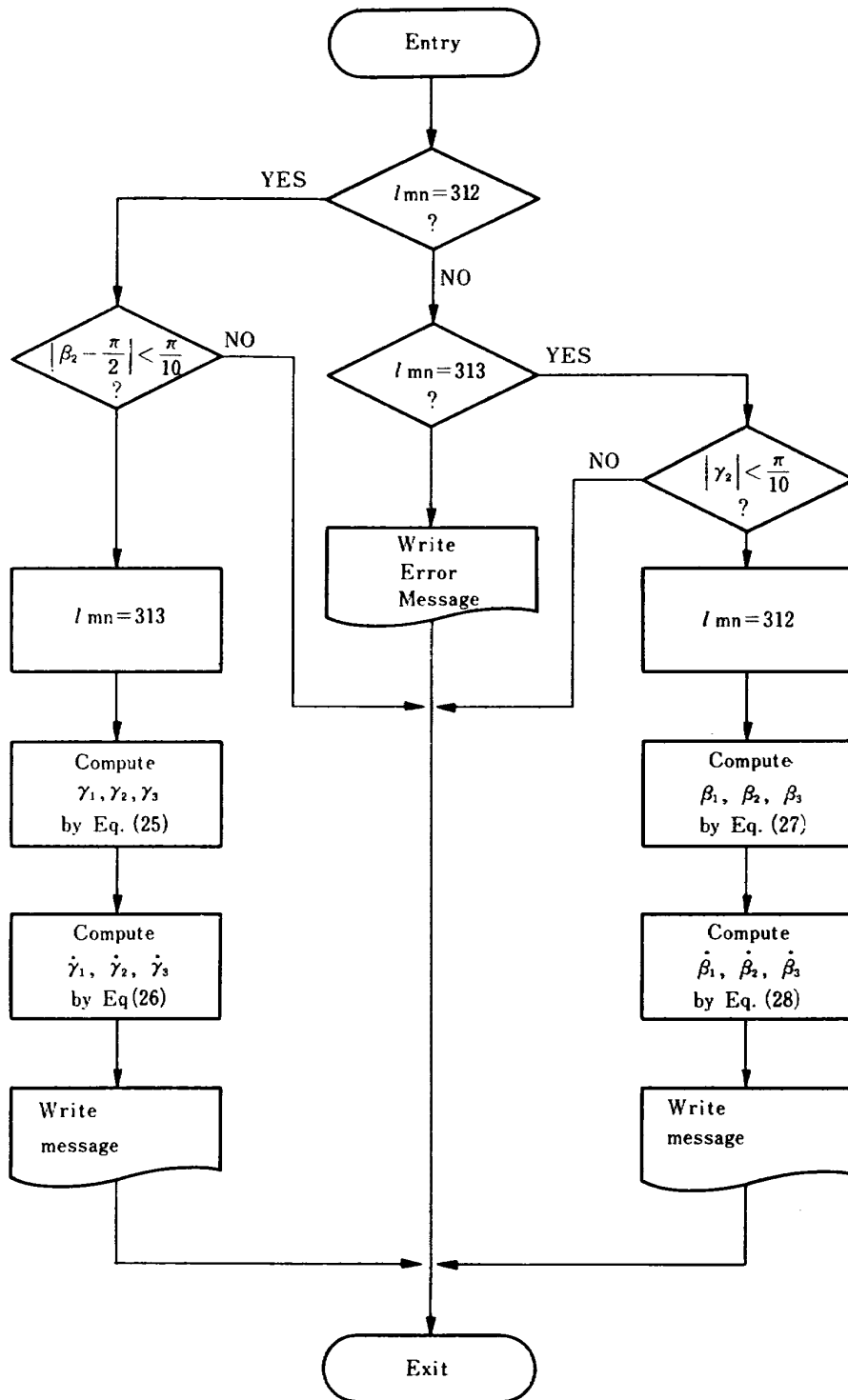


Fig. A-3 Flow chart of the algorithm in §6

- | | | | |
|---------|--|-----------|--------------------------------------|
| TR-295 | 自機搭載型軌道保持システムのための軌道決定と制御
Orbit Determination and Control Method for Self-Contained Station-Keeping System | 1972年 8月 | 松島 弘一 |
| TR-296 | 航空用ガスタービン燃焼器のライナ壁面の冷却
Liner Cooling of the Aeronautical Gas Turbine Combustor | 1972年 8月 | 相波 哲朗 |
| TR-297 | Green 関数を二次元ラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算 (境界条件として温度勾配を与える場合)
A Calculation of Temperature Distribution by Applying Green's Function to a Two-Dimensional Laplace's Equations. (The Case in which the Temperature Gradients on the Boundary are Given) | 1972年 8月 | 西村 英明, 白井 弘 |
| TR-255T | The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earth's Gravitational Field | Aug. 1972 | Sumio TAKEUCHI,
Koichi MATSUSHIMA |
| TR-298 | 航空機用対気速度計の位置誤差について
Experiment on Airspeed Calibration Procedure | 1972年12月 | 幸尾 治朗, 岡 達一
塚野 雄吉, 矢沢 健司
小野 孝次 |
| TR-299 | 遷音速における二次元翼の抵抗発散
On the Drag Divergence of Two Dimensional Airfoils at Transonic Speeds | 1973年 1月 | 神谷 信彦, 西 武徳 |
| TR-300 | そり角の小さい遷音速二重円弧二次元翼列実験
Experimental Investigation of Two-Dimensional Cascade Performance with Thin and Low-Cambered Double-Circular-Arc Blade Sections at Transonic Inlet Mach Number Range | 1972年10月 | 坂口 一, 近藤 博
高森 晋, 岩下 敬吾 |
| TR-301 | 観測系の評価に関するひとつの数学的理論
A Mathematical Theory on Evaluation of Observation Systems | 1972年 9月 | 木村 武雄 |
| TR-302 | Kalman-Bucy フィルターによる誘導誤差の推定
Estimation of Guidance Errors by Kalman-Bucy Filtering Technique | 1972年10月 | 村田 正秋 |
| TR-303 | ジンバルエンジン駆動用油圧制御系に適した IDPF サーボバルブの研究
Studies of IDPF Servovalve Appropriate for Gimballed Engine Positioning Hydraulic Control Systems | 1972年11月 | 畑山 茂樹 |
| TR-304 | ドラッグカップ型ジャイロモータの同期化制御の研究
Study on a Synchronizing Control of a Drag-Cup Gyro Motor | 1972年11月 | 山田 博 |

航空宇宙技術研究所報告 305号

昭和 47 年 11 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) 182
印刷所 有限会社啓文堂 松本印刷
東京都文京区水道 2-7-5

