

UDC 539.375:  
539.4.011

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-311

界面最大引張り応力基準での固体推薬の  
降伏曲面（三次元）について

遠藤修司・河田幸三

1973年3月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- |         |                                                                                                                                                                                                                                                                                         |           |                                     |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------|
| TR-291  | はり板結合構造物の振動 (Ⅲ)<br>On the Natural Vibration of Plate-Beam<br>Combination Structures (Ⅲ)                                                                                                                                                                                                 | 1972年7月   | 塙 武敏, 林 洋一<br>多田保夫, 戸田 勲<br>日下和夫    |
| TR-292  | 翼型の非圧縮乱流ウェーク流の近似計算法<br>—対称ウェーク流の場合—<br>An Approximate Calculation Method of<br>Incompressible Turbulent Wakes behind<br>Aerofoils—Symmetrical Wake Flow<br>Case—                                                                                                                        | 1972年7月   | 石田洋治                                |
| TR-293  | き裂先端塑性域に線形な応力分布のある弾塑<br>性モデルの解析<br>An Elastic-Plastic Analysis of a Crack with<br>Linearly Distributed Stress in the Plastic<br>Zone                                                                                                                                                    | 1972年8月   | 寺田博之                                |
| TR-294  | ジェットフラップを持つ高揚力機の地面効果<br>Effect of Ground Proximity on the Longi-<br>tudinal Aerodynamic Characteristics of an<br>Airplane with a Jet-Flapped High Lift<br>Wing                                                                                                                          | 1972年8月   | 遠藤 浩, 高橋 宏<br>中谷輝臣, 綿貫忠晴            |
| TR-295  | 自機搭載型軌道保持システムのための軌道決<br>定と制御<br>Orbit Determination and Control Method<br>for Self-Contained Station-Keeping Sys-<br>tems                                                                                                                                                               | 1972年8月   | 松島弘一                                |
| TR-296  | 航空用ガスタービン燃焼器のライナ壁面の冷<br>却<br>Liner Cooling of the Aeronautical Gas<br>Turbine Combustor                                                                                                                                                                                                 | 1972年8月   | 相波哲朗                                |
| TR-297  | Green 関数を二次元ラプラス方程式に適用し<br>た解法による冷却タービン翼の温度分布の<br>計算 (境界条件として温度勾配を与える場<br>合)<br>A Calculation of Temperature Distribution<br>by Applying Green's Function to a Two-<br>Dimensional Laplace's Equations. (The<br>Case in which the Temperature Gradi-<br>ents on the Boundary are given) | 1972年8月   | 西村英明, 白井 弘                          |
| TR-255T | The Study on the Motion of an Artificial<br>Satellite in the Earth's Gravitational Field                                                                                                                                                                                                | Aug. 1972 | Sumio Takeuchi<br>Koichi Matsushima |
| TR-298  | 航空機用対気速度計の位置誤差について<br>Experiment on Airspeed Calibration Pro-<br>cedures                                                                                                                                                                                                                | 1973年1月   | 幸尾治朗, 岡 遠一<br>塚野雄吉, 矢沢健司<br>小野孝次    |
| TR-299  | 遷音速における二次元翼の抵抗発散<br>On the Drag Divergence of Two-Dimensional<br>Airfoils at Transonic Speeds                                                                                                                                                                                           | 1973年1月   | 神谷信彦                                |
| TR-300  | そり角の小さい遷音速二重円弧二次元翼列実<br>験<br>Experimental Investigation of Two-Dimen-<br>sional Cascade Performance with Thin and<br>Low-Cambered Double-Circular-Arc Blade<br>Sections at Transonic Inlet Mach Number<br>Range                                                                         | 1972年10月  | 坂口 一, 近藤 博<br>高森 晋, 岩下敬吾            |
| TR-301  | 観測系の評価に関するひとつの数学的理論<br>A Mathematical Theory on Evaluation of<br>Observation Systems                                                                                                                                                                                                    | 1972年9月   | 木村武雄                                |
| TR-302  | Kalman-Bucy フィルターによる誘導誤差の<br>推定<br>Estimation of Guidance Errors by Kalman-<br>Bucy Filtering Technique                                                                                                                                                                                 | 1972年10月  | 村田正秋                                |

# 界面最大引張り応力基準での固体推進の 降伏曲面（三次元）について\*

遠藤修司\*\*・河田幸三\*\*\*

## On a Failure Criterion of a Solid Propellant under Tri-axial Stress Fields

By Shuji ENDOH and Kozo KAWATA

An attempt is made to develop a failure criterion of a solid propellant by determining the three-dimensional stress distribution in an elastic system consisting of an elastic sphere embedded in an elastic body of infinite extent subjected to a tri-axial tension (or compression). It is assumed that the stress field under the tri-axial tension is established superimposing the stress fields each of which is produced by mutually orthogonal and independent uniaxial tension. Use is made of Sezawa and Miyazaki's solution for the case where the system is subjected to a uniaxial tension (or compression). Only the solution for the radial stress is presented in the present paper, and the failure criterion of the system is established such that the matrix-filler boundary fracture of the elastic system is initiated when and where the radial stress at the boundary reaches a certain critical value. A failure surface is obtained, which is in the shape of a trihedral planes whose axis is perpendicular to the  $\pi$ -plane in the tri-axial stress space.

### 1. ま え が き

ロケットの固体推進中に破壊現象が生じると、燃焼の際、急激な燃焼面積の拡大を生じ、爆発に至ることがある。したがって、固体推進の破損、破壊基準を求めることはロケットエンジンの信頼性を向上させるための重要な課題の一つである。しかし、推進の破損、破壊基準はまだ十分に確立されていないのが現状である。

従来の経験的設計用破損基準は、単軸引張り応力-ひずみ関係から Landel, Milloway および Wiegand<sup>1)</sup> によって提案されたもので、単軸応力-ひずみ線図(図1)で、最大引張りひずみが次の値

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_L &= \frac{\sigma_m}{E} \\ \varepsilon_C &= \frac{2}{3} \varepsilon_m \end{aligned} \right\} \text{Landel}$$

$$\left. \frac{1}{2} \varepsilon_b \right\} \text{Milloway \& Wiegand}$$

に到達するとき破損するといういわゆる単軸応力下での基準であり、多軸応力の下ではいかなる値をとるべきか十分明らかではない。

最近、河田と高雄<sup>2)</sup>は推進が一種の複合材料であるという観点から微視的な破損、破壊過程に基づいて二次元応力下での破損基準を理論的に誘導している。

筆者らは、河田、高雄の結果をさらに三次元応力が作用する場合に拡張することを試みた。

現在、一般に広く用いられている固体推進は、ゴム状母材(ポリウレタンおよびポリブタジエンゴム)の中に重量比で70%程度の過塩素酸アンモニウム( $\text{NH}_4\text{ClO}_4$ )の酸化剤粉末(粒径10~350 $\mu$ 程度)と燃焼性能改良剤として重量比で10%程度のアルミ粉末が混入されている。母材内に異質な粒子が分散する場合にはその材料の破損、破壊挙動は母材のみのそれに比べてより複雑な現象を示すであろうことが想像される。したがって推進の破損、破壊を論ずるとき微視的観点からの検討が必要である。すなわち微視的破壊

\* 昭和47年12月23日受付

\*\* 機体第一部、宇宙研究グループ併任

\*\*\* 東京大学宇宙航空研究所

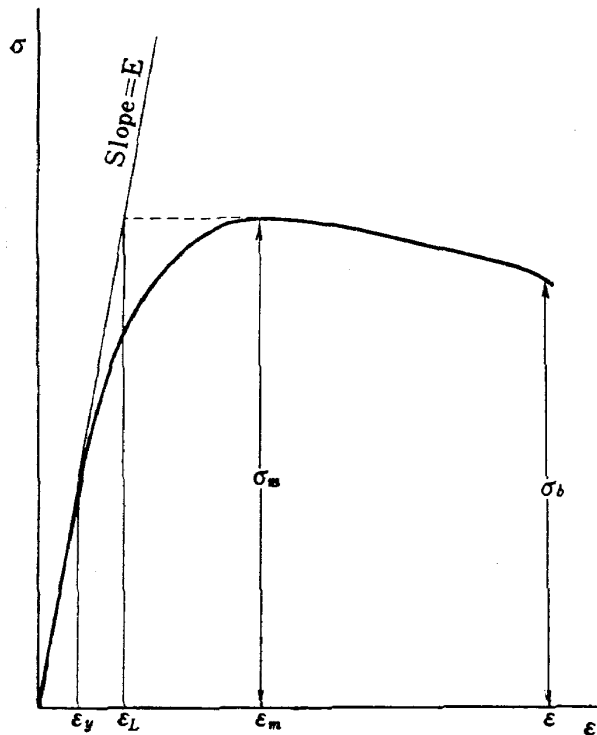


図 1 諸種の応力およびひずみの記号

過程を明らかにすることと同時に、その微視的観察と巨視的応力-ひずみ線図上での現象観察とが、どのように対応するかを知ることが重要である。この点については河田<sup>3)</sup>らの研究がある。それによれば、固体推薬の微視的破壊は

- (i) 結合剤内応力集中個所での空孔の発生
- (ii) 空孔の成長
- (iii)  $\text{NH}_4\text{ClO}_4$  粒子の剝離
- (iv) 結合剤の帯状の細い部分の発生、破断
- (v) 全体の破断

の過程をとることが顕微鏡視野の下での引張り試験で明らかにされている。また巨視的応力-ひずみ線図との対応についても、充填剤 80 重量%のポリブタジェン系推薬での実測によれば、バラツキはあるが、空孔の発生するときの平均ひずみは  $(0.6 \sim 1.0)\epsilon_L$  に相当し、ほぼ  $(1 \sim 2)\epsilon_y$  に当ることが報告されている。

筆者らは河田らによる観察結果 (i) の応力集中に着目し、三次元応力下での充填粒子界面上の応力分布を求め、とくに界面に垂直な引張り応力の最大値が一定の限界値に到達するとき、界面に空孔形成がはじまり推薬は局部的に破壊、巨視的に降伏するという仮定に立脚し、さらにこの巨視的降伏をもって破損とみなし破損限界 (降伏限界) を導いた。

解析にあたっては、無限に大きいゴム状母材に一個の弾性球が含まれる理想化したモデルを考え、これが

遠方において三軸応力状態にあるとして取り扱った。

## 2. 基礎式

ここで考察する問題は、無限遠方で任意の大きさの三軸垂直応力が作用する無限弾性体の中に、弾性定数の異なる球形充填粒子がその境界で完全に接着されているときの充填粒子近傍の応力分布を決定することである。この種の応力状態は無限遠方で単軸垂直応力が作用する場合の応力分布を 3 組、互いに直交して重ね合わせることで得られる。

単軸垂直応力が充填球を有する無限弾性体に作用する場合の問題に関してはすでに Sezawa & Miyazaki によってその解が与えられているので、ここではその解を利用し、上記の無限弾性体が遠方において三軸応力状態にある場合の応力分布を誘導する。

### 2.1 Sezawa-Miyazaki の解<sup>4)</sup>

球座標系  $(r, \theta, \phi)$  および直角座標系  $(x, y, z)$  を図 2 に示すように無限弾性体内で定義すると、 $z$  軸に関する軸対称問題の球座標を用いた釣合方程式、応力表示式は次のように与えられる (例えば A.E.H. Love<sup>5)</sup> 参照)。

釣合方程式:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{2\mu}{r} \omega \cot \theta = 0 \quad (1)$$

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \omega}{\partial r} + 2\mu \frac{\omega}{r} = 0 \quad (2)$$

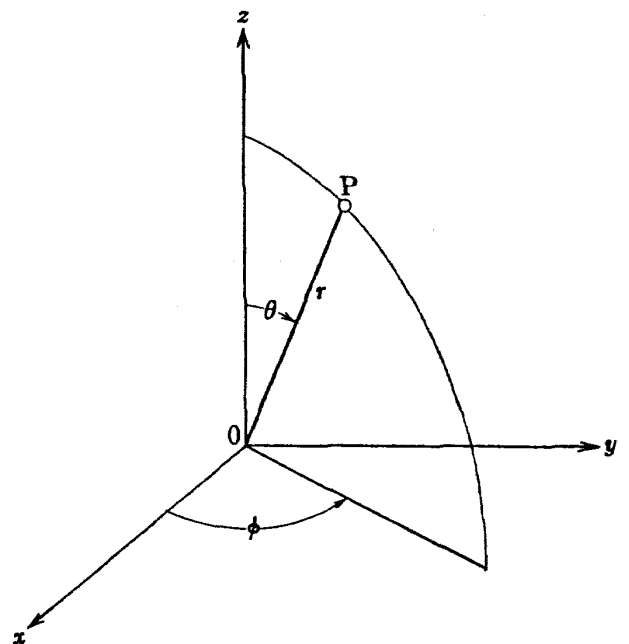


図 2 座標系

ここに  $\lambda, \mu$  は Lamé の弾性定数,  $e, \omega$  はそれぞれ体積膨脹率, 回転を表わし,  $r$  および  $\theta$  方向の変位を  $u_r, u_\theta$  とするとき次の関係にある。

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta \quad (3)$$

$$2\omega = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (4)$$

応力表示式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_\theta &= \lambda e + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_\phi &= \lambda e + 2\mu \left( \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Sezawa & Miyazaki は, これらの方程式を解き, その一般解を図3に示すような半径  $a$  の異質弾性充填球を有する無限弾性体に無限遠方において単軸垂直応力  $\sigma$  が作用する軸対称問題に適用し, その解を求めている。以下にその結果を列記する。式中の \* 印は充填球内部の弾性定数, 応力を外部のそれと区別するために付したものである。

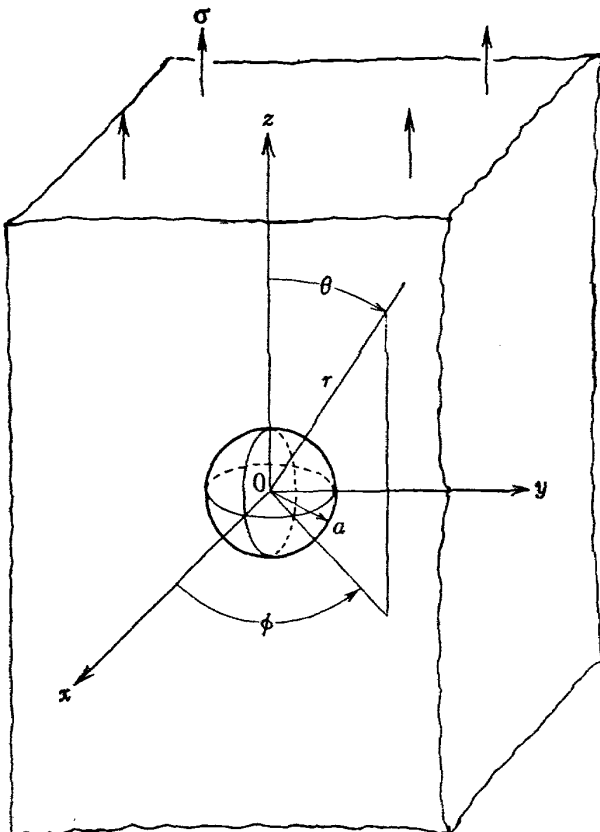


図3 充填球を有する弾性体

$r < a$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^* &= \sigma \left[ \frac{(\lambda+2\mu)}{(3\lambda+2\mu)} \frac{(3\lambda^*+2\mu^*)}{(3\lambda^*+2\mu^*+4\mu)} + 4\mu^* \frac{D_1}{D} P_2(\cos \theta) \right] \\ \sigma_\theta^* &= \sigma \left[ \frac{(\lambda+2\mu)}{(3\lambda+2\mu)} \frac{(3\lambda^*+2\mu^*)}{(3\lambda^*+2\mu^*+4\mu)} + 2\mu^* \frac{D_1}{D} - 4\mu \frac{D_1}{D} P_2(\cos \theta) \right] \\ \sigma_\phi^* &= \sigma \left[ \frac{(\lambda+2\mu)}{(3\lambda+2\mu)} \frac{(3\lambda^*+2\mu^*)}{(3\lambda^*+2\mu^*+4\mu)} - 2\mu^* \frac{D_1}{D} \right] \\ \tau_{r\theta}^* &= \sigma \left[ 2\mu^* \frac{D_1}{D} \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$r \geq a$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma \left[ \frac{1}{3} + \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu} \frac{3(\lambda^*-\lambda)+2(\mu^*-\mu)}{9\lambda^*+6\mu^*+12\mu} \frac{a^3}{r^3} + \left( \frac{2}{3} + \frac{9\lambda+10\mu}{3} \frac{D_2}{D} \frac{a^3}{r^3} + 24\mu \frac{D_3}{D} \frac{a^5}{r^5} \right) P_2(\cos \theta) \right] \\ \sigma_\theta &= \sigma \left[ \frac{2}{3} - \left( \frac{2\mu}{3\lambda+2\mu} \frac{3(\lambda^*-\lambda)+2(\mu^*-\mu)}{9\lambda^*+6\mu^*+12\mu} + \frac{\mu}{3} \frac{D_2}{D} \right) \frac{a^3}{r^3} + 2\mu \frac{D_3}{D} \frac{a^5}{r^5} - \left( \frac{2}{3} + \frac{\mu}{3} \frac{D_2}{D} \frac{a^3}{r^3} + 14\mu \frac{D_3}{D} \frac{a^5}{r^5} \right) P_2(\cos \theta) \right] \\ \sigma_\phi &= \sigma \left[ \left( \frac{\mu}{3} \frac{D_2}{D} - \frac{2\mu}{3\lambda+2\mu} \frac{3(\lambda^*-\lambda)+2(\mu^*-\mu)}{9\lambda^*+6\mu^*+12\mu} \right) \frac{a^3}{r^3} - 2\mu \frac{D_3}{D} \frac{a^5}{r^5} - \left( \mu \frac{D_2}{D} \frac{a^3}{r^3} + 10\mu \frac{D_3}{D} \frac{a^5}{r^5} \right) P_2(\cos \theta) \right] \\ \tau_{r\theta} &= \sigma \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{3\lambda+2\mu}{6} \frac{D_2}{D} \frac{a^3}{r^3} - 8\mu \frac{D_3}{D} \frac{a^5}{r^5} \right) \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに,  $P_2(\cos \theta)$  は二次の Legendre の多項式であり,  $D, D_1, D_2, D_3$  は弾性定数の函数で, 次の行列式で与えられる。

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\lambda^*}{7} & 4\mu^* & -\frac{9\lambda+10\mu}{3} & -24\mu \\ -\frac{8\lambda^*+7\mu^*}{21} & 2\mu^* & \frac{3\lambda+2\mu}{6} & 8\mu \\ -\frac{\lambda^*}{7\mu^*} & 2 & \frac{3\lambda+5\mu}{6\mu} & 3 \\ -\frac{5\lambda^*+7\mu^*}{42\mu^*} & 1 & \frac{1}{6} & -1 \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\lambda^*}{7} & \frac{2}{3} & -\frac{9\lambda+10\mu}{3} & -24\mu \\ \frac{8\lambda^*+7\mu^*}{21} & \frac{1}{3} & \frac{3\lambda+2\mu}{6} & 8\mu \\ -\frac{\lambda^*}{7\mu^*} & \frac{1}{3\mu} & \frac{3\lambda+5\mu}{6\mu} & 3 \\ \frac{5\lambda^*+7\mu^*}{42\mu^*} & \frac{1}{6\mu} & \frac{1}{6} & -1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\lambda^*}{7} & 4\mu^* & \frac{2}{3} & -24\mu \\ \frac{8\lambda^*+7\mu^*}{21} & 2\mu^* & \frac{1}{3} & 8\mu \\ -\frac{\lambda^*}{7\mu^*} & 2 & \frac{1}{3\mu} & 3 \\ \frac{5\lambda^*+7\mu^*}{42\mu^*} & 1 & \frac{1}{6\mu} & -1 \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\lambda^*}{7} & 4\mu^* & -\frac{9\lambda+10\mu}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{8\lambda^*+7\mu^*}{21} & 2\mu^* & \frac{3\lambda+2\mu}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{\lambda^*}{7\mu^*} & 2 & \frac{3\lambda+5\mu}{6\mu} & \frac{1}{3\mu} \\ \frac{5\lambda^*+7\mu^*}{42\mu^*} & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6\mu} \end{vmatrix} \quad (11)$$

なお, Lamé の弾性定数  $\lambda, \mu$  は縦弾性係数  $E$  とポアソン比  $\nu$  と次の関係にある。

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (12)$$

## 2.2 充填球を有する弾性体に三軸応力が作用する場合

充填球を有する無限弾性体に無限遠方で任意の大きさの垂直応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  が互いに垂直な三軸方向に作用しているときの応力, 変位状態は, 垂直応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  がそれぞれ単独で作用した場合の状態の重ね合わせの結果とみることができる。とくに半径方向応力  $\sigma_r$  については単なる代数的な重ね合わせによって得られる。すなわち,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  それぞれによる単軸応力状態における  $\sigma_r$  を  $\sigma_{r1}, \sigma_{r2}, \sigma_{r3}$  とすれば, 三軸応力状態における  $\sigma_r$  は次のように与えられる。

$$\sigma_r = \sigma_{r1} + \sigma_{r2} + \sigma_{r3}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の方向をそれぞれ図3の  $z, x, y$  軸に一致させれば, 重ね合わせの結果は (6), (7) 式より次のようになる。

$r < a$ :

$$\sigma_r = \left[ \frac{(\lambda+2\mu)}{(3\lambda+2\mu)} \frac{(3\lambda^*+2\mu^*)}{(3\lambda^*+2\mu^*+4\mu)} \right] [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3] + 4\mu^* \frac{D_1}{D} [\sigma_1 P_2(l) + \sigma_2 P_2(m) + \sigma_3 P_2(n)] \quad (13)$$

$r > a$ :

$$\sigma_r = \left[ \frac{1}{3} + \frac{4\mu}{3\lambda+2\mu} \frac{3(\lambda^*-\lambda)+2(\mu^*-\mu)}{9\lambda^*+6\mu^*+12\mu} \frac{a^3}{r^3} \right] \times [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3] + \left[ \frac{2}{3} + \frac{9\lambda+10\mu}{3} \frac{D_2}{D} \frac{a^3}{r^3} + 24\mu \frac{D_3}{D} \frac{a^6}{r^6} \right] [\sigma_1 P_2(l) + \sigma_2 P_2(m) + \sigma_3 P_2(n)] \quad (14)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos \theta \\ m &= \sin \theta \cos \phi \\ n &= \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

である。

## 3. 推葉中の充填粒子界面上の応力分布

(14) 式を用いて任意の大きさの巨視的三軸応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  が作用するポリウレタンゴム中の  $\text{NH}_4\text{ClO}_4$  粒子近傍での局部的半径方向応力分布を計算することができる。表1にポリウレタン系推葉の弾性定数を示す。この定数を用いると (14) 式は次のようになる。

$$\sigma_r = \left[ -\frac{5}{2} \frac{a^3}{r^3} + 2 \frac{a^6}{r^6} \right] [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3] + \left[ 1 + \frac{15}{2} \frac{a^3}{r^3} - 6 \frac{a^6}{r^6} \right] [\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2] \quad (16)$$

さらに, 結合剤と充填剤との界面上における  $\sigma_r$  の値は  $r=a$  として

$$\sigma_r = \left( -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} l^2 \right) \sigma_1 + \left( -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} m^2 \right) \sigma_2 + \left( -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} n^2 \right) \sigma_3 \quad (17)$$

である。

(17) 式は  $\theta$  と  $\phi$  によって指定される充填粒子界面上の任意の点における局部的半径方向応力  $\sigma_r$  の大

表1  $\text{NH}_4\text{ClO}_4$  およびポリウレタンの弾性定数

	$\lambda(\text{kg/mm}^2)$	$\mu(\text{kg/mm}^2)$
ポリウレタンゴム	154.8	0.039
過塩素酸アンモニウム	1,205	947

表 2 充填粒子界面上の力学状態  $f, g, h$

計算点	$\theta$	$\phi$	$f(\theta)$	$g(\theta, \phi)$	$h(\theta, \phi)$
1	0°	0°	2.000	-0.500	-0.500
2	15	0	1.833	-0.333	-0.500
3	15	15	1.833	-0.344	-0.489
4	15	30	1.833	-0.374	-0.458
5	15	45	1.833	-0.416	-0.416
6	30	0	1.375	0.125	-0.500
7	30	15	1.375	0.083	-0.458
8	30	30	1.375	-0.031	-0.344
9	30	45	1.375	-0.187	-0.187
10	45	0	0.750	0.750	-0.500
11	45	15	0.750	0.666	-0.416
12	45	30	0.750	0.438	-0.187
13	45	45	0.750	0.125	0.125
14	60	0	0.125	1.375	-0.500
15	60	15	0.125	1.249	-0.374
16	60	30	0.125	0.906	-0.031
17	60	45	0.125	0.438	0.438
18	75	0	-0.333	1.833	-0.500
19	75	15	-0.333	1.676	-0.344
20	75	30	-0.333	1.249	0.083
21	75	45	-0.333	0.666	0.666
22	90	0	-0.500	2.000	-0.500
23	90	15	-0.500	1.833	-0.333
24	90	30	-0.500	1.375	0.125
25	90	45	-0.500	0.750	0.750

きさを与える。計算した結果を示せば表 2 のようになる。表 2 において  $f, g, h$  は (17) 式の  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の係数であり次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}l^2 \\ g(\theta, \phi) &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}m^2 \\ h(\theta, \phi) &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}n^2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

計算は対称性を考慮し、図 4 に示すように充填球表面の 1/16 について、 $\theta, \phi$  に関し 15° きざみの①から⑳の 25 点について行なった。

最大応力  $(\sigma_r)_{\max}$  ならびに最小応力  $(\sigma_r)_{\min}$  の値ならびにその位置は (17) 式から得られる偏微分係数  $\partial\sigma_r/\partial\theta, \partial\sigma_r/\partial\phi$  を零とおくことによって決定することができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} [(\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_2)\sin^2\phi]\sin 2\theta &= 0 \\ (\sigma_3 - \sigma_2)\sin^2\theta \sin 2\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

を満足する  $\theta$  および  $\phi$  を求めればよい。ここで  $\theta, \phi$  の変域は応力分布の対称性を考慮するなら区間  $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2$  を考えれば十分である。

(1)  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  がすべて異なる場合

例えば、 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  のときを考えると  $\sigma_r$  の最大、最小値はそれぞれ  $x$  軸および  $y$  軸と充填球表面の交点上、すなわち図 4 の点①および④にあり、その値は

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{\max} &= 2\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_1: \text{最大, 点①} \\ (\sigma_r)_{\min} &= 2\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \sigma_3: \text{最小, 点④} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

で与えられる。

一般に、 $\sigma_r$  の最大、最小値は、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の最大、最小のものが作用する軸上にあり、その値は上式の下添字を適当に入れかえた式で与えられる。とくに以後の計算に必要な  $(\sigma_r)_{\max}$  のみを列記すると、

$$(\sigma_r)_{\max} = 2\sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, \quad \sigma_2: \text{最大, 点②} \quad (21)$$

$$(\sigma_r)_{\max} = 2\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \sigma_3: \text{最大, 点③} \quad (22)$$

(2)  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の 2 つが等しく、他が異なる場合

(1) の場合と同様の結論を得るが、等しい応力が作用する座標軸を含む平面と充填球表面の交線上では  $\sigma_r$  は一様である。 $(\sigma_r)_{\max}, (\sigma_r)_{\min}$  の値は、(1) の場合に得た式によって与えられる。例えば、 $\sigma_1 > \sigma_2, \sigma_3; \sigma_2 = \sigma_3$  の場合を考えると  $(\sigma_r)_{\max}$  は点①に、 $(\sigma_r)_{\min}$  は点②, ③, ……④を結ぶ円周上にあり、その値は (20) 式において  $\sigma_2 = \sigma_3$  とすれば得られる。

(3)  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  がすべて等しい場合

この場合は、いわゆる静水圧状態にあり、 $\sigma_r$  の分布は充填球表面上で一様である。その値は (20) 式において  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  とおけば得られる。

以上により、 $(\sigma_r)_{\max}$  の値は、すべての場合に (20) 式の第 1 式と (21), (22) 式の 3 式で与えられることが明らかになった。

$\sigma_r$  の分布をより具体的に示すために一例として、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  にそれぞれ 3, 2, 1 の数値を与え計算した結果を図 5 に示す。最大応力は、この場合、図 4 における点①の位置に生じることが分かる。

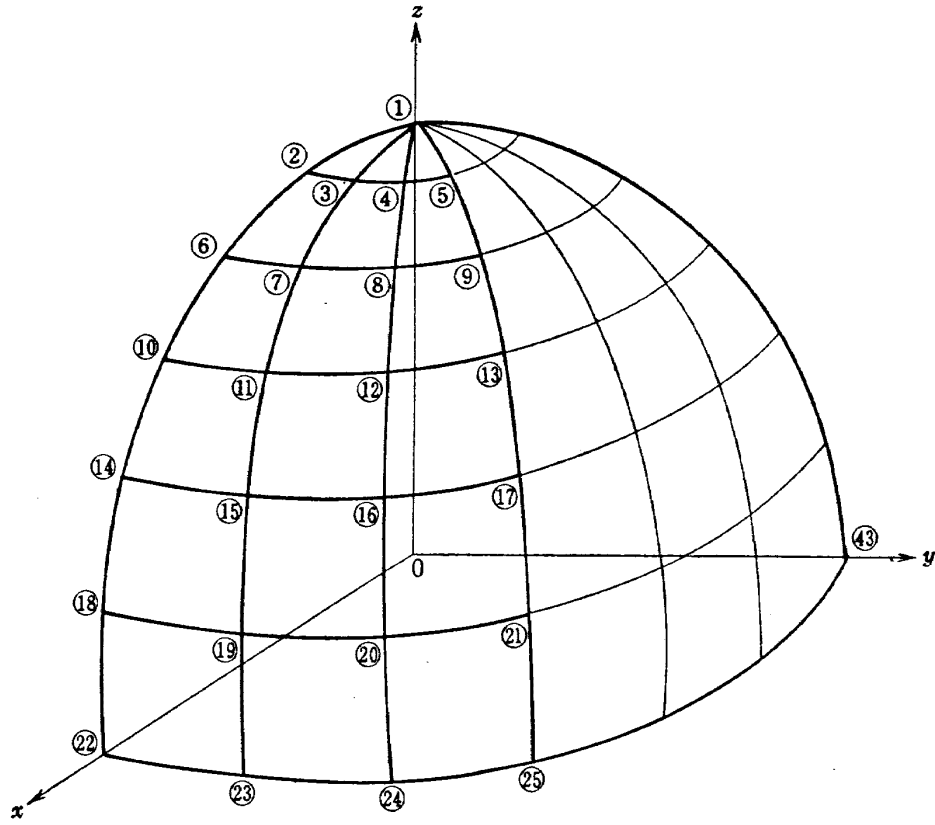


図 4 計算点

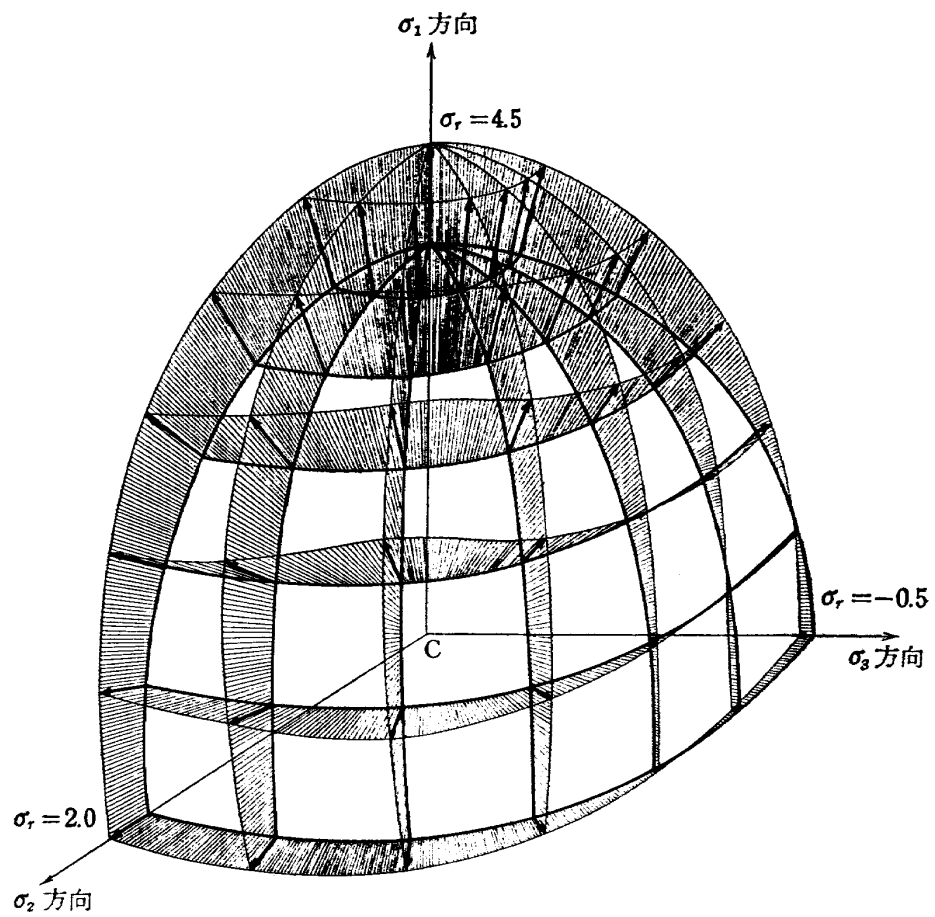


図 5 充填粒子表面上の半径方向応力分布の一例 ( $\sigma_1=3, \sigma_2=2, \sigma_3=1$ )



#### 4. 推薬の破損則

ここでは“まえがき”に述べた仮定にしたがい、界面での半径方向応力  $\sigma_r$  の最大値がある一定の引張り応力値に達するときを破損の基準として三次元応力下での推薬の破損則を誘導する。

単軸引張りのときの空孔発生の巨視的限界値を  $\sigma_0$  とすると、それに対応する局部的破壊応力値 ( $\sigma_r$ )<sub>0</sub> は、(17) 式において、 $\sigma_1 = \sigma_0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  とおき、しかも表 2 から

$$(\sigma_r)_0 = 2\sigma_0 \quad (23)$$

となる。

三軸垂直応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  が作用しているとき、充填球表面における局部的応力  $\sigma_r$  が (23) 式に示す値に達したときを破損限界とする。 $\sigma_r$  の最大値は、あらゆる場合について (20) 式の第 1 式ならびに (21), (22) 式で与えられるのであるから、これらの値を  $2\sigma_0$  とおけば、巨視的破損の条件が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} -4 \frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} + \frac{\sigma_3}{\sigma_0} + 4 &= 0 \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 4 \frac{\sigma_2}{\sigma_0} + \frac{\sigma_3}{\sigma_0} + 4 &= 0 \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} - 4 \frac{\sigma_3}{\sigma_0} + 4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

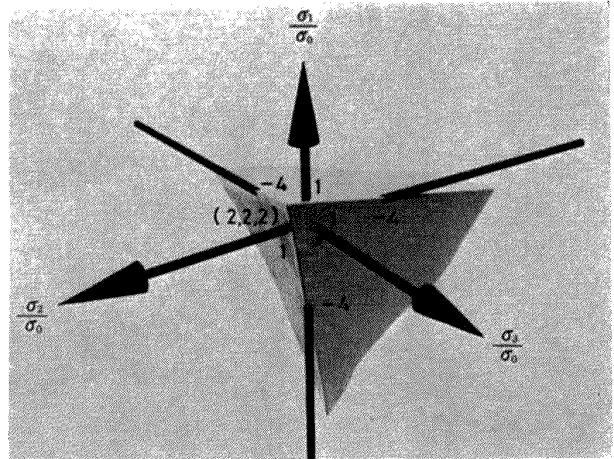


図 6 failure surface

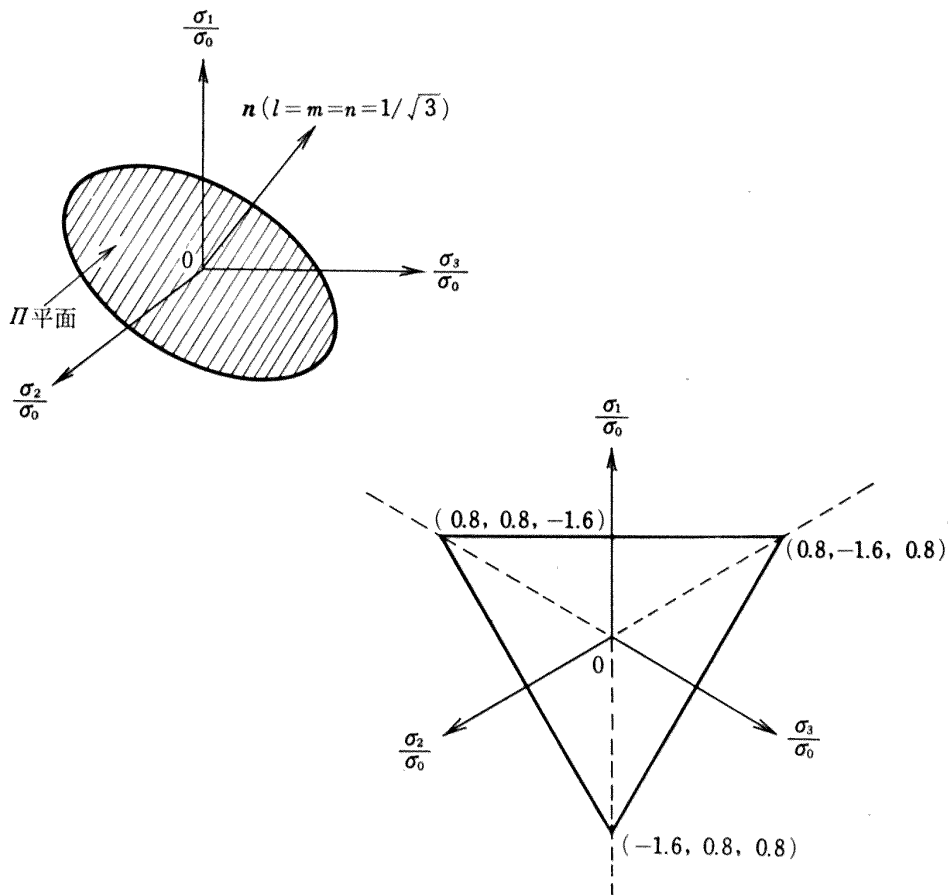


図 7 II 平面による failure surface の切口

上式は、 $\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - \frac{\sigma_2}{\sigma_0} - \frac{\sigma_3}{\sigma_0}$  座標系で、 $\frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ ,  $\frac{\sigma_2}{\sigma_0}$ ,  $\frac{\sigma_3}{\sigma_0}$  切片がそれぞれ (1, -4, -4), (-4, 1, -4), (-4, -4, 1) である平面を表わしている。したがって (24) 式によって破損限界が与えられるとすれば、failure surface は、頂点 (2, 2, 2) をもち、II 平面  $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} + \frac{\sigma_3}{\sigma_0} = 0\right)$  に軸線が垂直な三角錐面である。(24) 式で表わされる failure surface を図に示せば図 6 のようである。また、図 7 は II 平面によるこの三角錐面の切口を示している。

“まえがき” で述べた河田らの観察結果を適用すれば  $\sigma_0$  の値は、各ひずみ速度の単軸引張りで  $\epsilon = (0.6 \sim 1.0)\epsilon_L$  あるいは  $(1 \sim 2)\epsilon_y$  に対応する応力値をとればよい。

## 5. むすび

固体推薬の内部構造に着目し微視的観点から三次元応力下での破損基準を導くことを試みた。すなわち (i) 推薬を理想化し、無限に大きいゴム状母材に一個の弾性球を含んだモデルを考え、これが遠方において三軸応力状態にあるとして、充填粒子近傍の応力分布を求め、(ii) 破損基準として最大引張り応力基準、すなわち、充填粒子界面上の局所的半径方向応力の最大値がある一定の限界値に達したとき、界面に空孔形成がはじまり、巨視的に破損すると仮定し破損限界を導いた。

この結果、 $\text{NH}_4\text{ClO}_4$ -ポリウレタン系推薬の三次元応力下での破損条件は (24) 式で表わされる三角錐面であることが明らかになった。巨視的応力点がこの三角錐面の内側にあるかぎり破損には至らず、三角錐面の面に達すると局部的破壊、すなわち巨視的破損を起こすことになる。

また、ここに誘導された破損則は、その導き方から分かるように、充填粒子界面上の局所的半径方向応力が、いずれの個所でもすべて負の値をとるなら、破損には達しないことになる。すなわち、(24) 式より、任意の大きさの巨視的応力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  が次の条件

$$\left. \begin{aligned} 4\sigma_1 < \sigma_2 + \sigma_3 \\ 4\sigma_2 < \sigma_3 + \sigma_1 \\ 4\sigma_3 < \sigma_1 + \sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

をすべて満たすとき、推薬は破損しない。

いま、推薬のポアソン比  $\nu_p = 0.45$ 、外径内径比  $b/a = 2.1$  の中空円筒状ロケットモータを例にとると、この場合の内孔近傍の応力分布は、平面ひずみ解析を適用すれば、内孔に作用する圧力を  $p_i$  として、

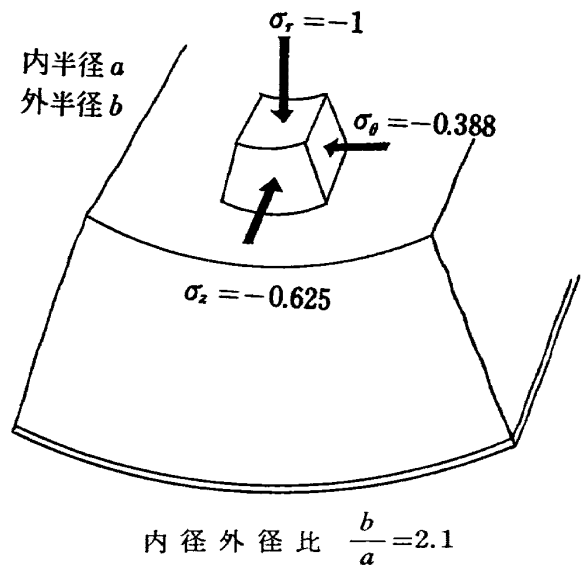


図 8 グレーンでの応力分布の一例

$\sigma_{r_p} = -p_i$ ,  $\sigma_{\theta_p} = -0.388p_i$ ,  $\sigma_{z_p} = -0.625p_i$  となる (図 8)。この三軸圧縮応力状態での破損に至る内圧  $p_i$  を (24) 式を用いて計算してみると、 $\sigma_0 = 3.4 \sim 4.3 \text{ kg/cm}^2$  として、

$$p_i = 54 \times (3.4 \sim 4.3) = 183 \sim 232 \text{ kg/cm}^2$$

となり、通常の  $50 \sim 60 \text{ kg/cm}^2$  の内圧では、この場合は安全であることが分かる。

本計算は最大引張り応力基準を用いたが、主応力、主ひずみ、剪断弾性ひずみエネルギー、全弾性ひずみエネルギー基準などで破損則を求めることも計算は煩雑になるが可能である。また実測値との合致の程度について今後詳細な実験的検討が必要である。

本研究は、筆者の一人が昭和 46 年度国内留学生として東京大学宇宙航空研究所材料部河田研究室に国内留学中に行なったものである。

終りに熱心に御討議いただいた東京大学宇宙航空研究所小林 昭助教授、ならびに河田、小林研究室の諸氏に厚くお礼申し上げる。

## 文 献

- 1) J.H. Wiegand; Mechanics and Chemistry of Solid Propellants. Proceeding of the Fourth Symposium on Naval Structural Mechanics (1965) pp. 561-567, Pergamon Press.
- 2) 河田幸三, 高雄善裕; 固体推薬の破損基準の理論的解析, 推薬シンポジウム前刷 (昭和 46) pp. 18-21.
- 3) 河田幸三, 井田峯人, 本堂 明; 推薬の破壊過程の微視的研究, 東大宇宙研報告, 第 5 巻第 4 号, (1969) pp. 521-532.

- 4) K. Sezawa and B. Miyazaki; Spherical Problems of Elasticity Solved in Polar Co-ordinates, with Applications, J. Soc. Mech. Eng., Tokyo, Vol.31, No. 136 (1928) pp. 625-634.
- 5) A.E.H. Love; Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed. (1927) pp. 141, Cambridge Univ. Press.

TR-303	ジンバルエンジン駆動用油圧制御系に適した IDPF サーボバルブの研究 Studies of IDPF Servovalve Appropriate for Gimbaled Engine Positioning Hydraul- ic Control Systems	1972年11月	畑山茂樹
TR-304	ドラッグカップ型ジャイロモータの同期化制御 の研究 Study on a Synchronizing Control of a Drag-Cup Gyro Motor	1972年11月	山田 博
TR-305	オイラー角表示による座標変換のアルゴリズム ム Coordinate Transformation Algorithm by the Eulerian Angels Representation	1972年11月	狼 嘉彰
TR-306	フライングテストベッド用付帯設備の計画 System Design of Facilities for VTOL Flying Test Bed at National Aerospace Laboratory	1972年11月	滝沢直人, 谷昭義 小川敏雄, 藤枝俊 甲斐忠夫, 宮本義 田辺義一, 野幸 竹内和之
TR-307	プラズマ風洞アーク加熱器, ノズル流および ノズル噴流に対する諸考察 Some Characteristics of the Arc-Heater, Nozzle Flow, and the Underexpanded Jet in the NAL 60kW Plasma Wind Tunnel	1972年12月	松崎利一, 平林則明
TR-308	固体ロケット推進薬の超音波探傷 On the Ultrasonic Inspection of Separation in Solid Propellant Rocket Motors	1972年12月	清水盛生, 野口義男 種村利春
TR-309	複数翼をすぎる二次元, 非圧縮, ポテンシャル 流れの緩和法による計算 A Numerical Calculation of a Two-Dimen- sional Incompressible Potential flow Around a Set of Airfoils by Applying the Relaxation Method	1973年1月	中村正義
TR-310	圧縮流体の Navier-Stokes 方程式に対する数 種の差分法とその評価 An Evaluation of Several Difference Me- thods for Compressible Navier-Stokes Equations	1973年3月	石黒登美子

---

## 航空宇宙技術研究所報告311号

昭和48年3月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) 182

印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川 2-27-12

---

