UDC 517.94:
629.7:
62-50

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-357

遅れ微分制御系に対する最適問題

(最適解の存在と一意性)

畑 山 茂 樹

1974年2月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

遅れ微分制御系に対する最適問題
(最適解の存在と一意性)*

畑 山 茂 樹**

Optimal Problem for Delay-Differential Control Systems
(On the Existence and Uniqueness of Optimal Solution)

By Shigeki HATAYAMA

Abstract

General delay-differential control systems dependent on both the previous history of the state and of the control are modelled. The optimal control problem for such systems with the cost functional, the state constraint condition and the time-varying target set is formulated. This formulation generalizes the optimal control problem examined by M.N. Oguztoreli. An existence theorem of an optimal policy in the class of absolutely continuous initial state functions in the C space and measurable control functions in the L_2 space is proved. Further, the uniqueness of an optimal control in the case of linear delay-differential systems is considered.

1. 緒　　言

制御系の数学的モデルは通常，常微分方程式によって記述することが多いが，その場合には前提として，物理系の未来の推移が現在の状態と遅れなく作用する制御に依存して決定しえるという仮定を満足していなければならない。しかし，現在の状態のみでなくその過去の履歴にも依存している物理系や制御の遅れを無視できない制御系も少なくない。一般に，情報の伝達が物質あるいは場の移動に関連するものは遅れ現象を呈する。この種の制御系は遅れ微分方程式によって定式化されなければならない。

航空機，ロケットおよび宇宙飛行体に対する最近の制御問題においても，遅れ現象が無視できない存在となっており，遅れを伴う制御系に関する研究が重要になってきた。たとえば，宇宙飛行体の遠隔制御における信号の伝達遅れ[1]，ジェット輸送機におけるエンジンの応答遅れ[2]，パイロットの緩慢な反応による操縦遅れ[3]など，制御に関する遅れを考慮せずに制御系を設計するならば，制御がかえって逆効果になって，最適な制御をなしえないばかりでなく，安定な制御系をも不安定に導びくことがある。また，宇宙船は再突入時において，機体の運動とアブレーションに起因した流れ場の遅れによって空力的安定性を失うことがある[4]。さらに，ロケットモータにおける燃焼遅れは間欠的作動の要因となり，モータの爆発を引き起こすことがある[5]。その他，工学，経済学，生物学，医学などの諸分野において，遅れ効果の研究の重要性が認識されてきている。

遅れ微分制御系に対する最適問題についてはまず G.L. Haratisvili によって研究された[6]。彼は時間遅れ τ を伴う制御系

(1.1)　　$\dot{x}(t)=f(x(t),\ x(t-\tau),\ u(t))$

について，$\int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t),\ x(t-\tau),\ u(t))dt$ を最小にするような最適制御の満たすべき必要条件を一般化した最大原理として与えた。その後，N. N. Krasovskii[7]，M. N. Oguztoreli[8]，示村ら[9)~11]，D. H. Chyung と E.B. Lee[12] によって，線形差分微分制御系

(1.2)　$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)+C(t)u(t)$

に関する基礎的研究がかなり詳細になされた。また，M.N. Oguztoreli[13] は(1.1)式を一般化した制御系

(1.3)　　$\dot{x}(t)=V(x_t(\cdot),\ u(t),\ t)$

について，$\int_{t_0}^{t_f} V_0(x(t),\ u(t),\ t)dt$ を最小にするような

* 昭和48年8月28日受付
** 計測部

最適政策の存在定理を与えた。一方，A.T. Fuller[14] と R.E. Foerster[15] は制御に遅れを伴う線形系

(1.4)　　$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t-\tau)$

に関する最適問題を考察した。また，D.H. Chyung と E.B. Lee[16] は状態と制御の両者に遅れを伴う線形系

$$(1.5)\quad \dot{x}(t)=\int_{-\tau}^{0} A_1(t,s)x(t+s)ds+A_2(t)x(t-\tau)+\int_{-\tau}^{0} B_1(t,s)u(t+s)ds+B_2(t)u(t-\tau)$$

について可達集合の性質を調べ，最大原理の幾何学的証明を与えた。

以上の研究で明らかにされたように，遅れ微分制御系に対する最適問題では常微分制御系の場合に比べてつぎのような困難さが生ずる。第一に，(1.1)～(1.3)式と (1.5) 式のような系の状態を規定するには，$t-\tau\leqq s\leqq t$ におけるすべての $x(s)$ の値を知らなくてはならず，したがって状態空間は無限次元となる。第二に，(1.2) 式のような系が定常な場合においても，その特性方程式は超越方程式となって，無限個の特性根が存在する。第三に，(1.3) 式に対する最適問題において M.N. Oguztoreli が指摘したように，最適解は状態の初期函数と制御函数の最適な対として求めなければならない。第四に，(1.4) 式のような制御に遅れを伴う系では初期区間 $[t_0, t_0+\tau]$ において非可制御となり，またある種の最適フィードバック制御を考えた場合には τ だけ先の状態 $x(t+\tau)$ の予測が必要になる。このような困難さのために，(1.5) 式を一般化した遅れ微分制御系

(1.6)　　$\dot{x}(t)=V(x_t(\cdot), u_t(\cdot), t)$

に対する最適問題はまだ研究されていない。

本報告では (1.6) 式によって記述しえる遅れ微分制御系について，状態拘束条件を満足しつつ，$\int_{t_0}^{t_f} V_0(x_t(\cdot), u_t(\cdot), t)dt$ なるコストを最小にして，ある初期状態函数を時変標的集合に到達させる最適問題を定式化し，最適政策の存在を保証するに十分な条件を調べる。さらに，(1.6) 式の V が x と u に関して線形である場合について，与えられた初期状態函数を目標点に到達させるに最適な制御が一意になる条件について考察する。なお，最適問題におけるもう一つの主題である最適政策の構成法については，稿をあらためて論じることにする。

2. 記号，定義および仮定

α, β, γ および t_0 はつぎの関係を満たすように与えられた任意の実数とする。

$$-\infty<\alpha<t_0\leqq\beta<\gamma<\infty$$

ここに，$|\alpha|$ は十分に大きくとる。有限次元空間 E^p の任意の点 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_p)$ に対して，ノルムを次式で定義する。

$$\|z\|=\{\sum_{j=1}^{p}|z_j|^2\}^{1/2}$$

また，函数空間 Y におけるノルムは $\|\cdot\|_Y$ で表わすことにする。有限次元空間の部分集合 G と R についてつぎのことを仮定する。

(a)　G は E^n のコンパクトな部分集合である。

(b)　R は E^r のコンパクトな凸部分集合で，原点を内点として含む。

次式を満足するような導函数 $\dot{\phi}(t)$ をもつすべての絶対連続な函数 $\phi\in C([\alpha, t_0], G)$ の集合を Φ で表わす。

$$\|\dot{\phi}(t)\|\leqq n(t),\ \text{for a.e. } t\in[\alpha, t_0]$$

ここに，$n(t)$ は $[\alpha, t_0]$ の上で2乗可積分な函数とする。また，X はすべての連続函数 $x\in C([\alpha,\gamma], E^n)$ の集合を表わし，U はすべての可測函数 $u\in L_2([\alpha,\gamma], R)$ の集合を表わす。さらに任意の $t\in[t_0,\gamma]$ に対して，$x_t(\cdot)$ と $u_t(\cdot)$ は $x\in X$ と $u\in U$ の区間 $[\alpha, t]$ の上での制限を表わすものとし，そのようなすべての集合をそれぞれ X_t と U_t で表わす。

$y\in X_t$, $v\in U_t$ および $t\in[t_0,\gamma]$ でつくられるすべての順序づけられた組 (y, v, t) の集合を S で表わす。S の上で定義され E^n に値をもつ，S の上で定義され E^1 に値をもつ，2つのボルテラ汎函数 $V(y, v, t)$ および $V_0(y, v, t)$ を考える。これら汎函数に対してつぎのことを仮定する。

(c)　$V(y, v, t)$ は S の上で有界であり，任意に与えられた $x\in X$ と $u\in U$ に対して，$V(x_t(\cdot), u_t(\cdot), t)$ は t に関して可測である[13]。

(d)　任意に与えられた v と t に対して，$V(y, v, t)$ は y に関して強連続である[17]。すなわち，$y\in X_t$ に強収束するような X_t の任意の列 $\{y^{(n)}\}$ に対して，つぎの関係が成立する。

$$\lim_{n\to\infty}\|V(y^{(n)}, v, t)-V(y, v, t)\|=0$$

(e)　任意に与えられた y と t に対して，$V(y, v, t)$ は v に関して弱連続である[17]。すなわち，$v\in U_t$ に弱収束するような U_t の任意の列 $\{v^{(n)}\}$ に対して，つぎの関係が成立する。

$$\lim_{n\to\infty}\|V(y, v^{(n)}, t)-V(y, v, t)\|=0$$

(f)　$V(y, v, t)$ に対して $[t_0,\gamma]$ の上で2乗可積分な函数 $m(t)$ が存在して，つぎの関係が y と v に関して一様に成立する。

$$\|V(y, v, t)\|\leqq m(t)$$

(g) 任意に与えられた v と t に対して，$V(y, v, t)$ は y に関して Osgood の条件を満足する[13]。

(h) $V_0(y, v, t)$ は S の上で非負であり，任意に与えられた $x \in X$ と $u \in U$ に対して，$V_0(x_t(\cdot), u_t(\cdot), t)$ は t に関して可測である。

(i) 任意に与えられた v と t に対して，$V_0(y, v, t)$ は y に関して強連続である。

(j) 任意に与えられた y と t に対して，$V_0(y, v, t)$ は v に関して弱下半連続である[17]。すなわち，$v \in U_t$ に弱収束するような U_t の任意の列 $\{v^{(n)}\}$ に対して，つぎの関係が成立する。

$$\liminf_{n\to\infty} V_0(y, v^{(n)}, t) \geqq V_0(y, v, t)$$

(k) $V_0(y, v, t)$ に対して $[t_0, \gamma]$ の上で可積分な函数 $m_0(t)$ が存在して，つぎの関係が y と v に関して一様に成立する。

$$V_0(y, v, t) \leqq m_0(t)$$

ここで，つぎのことを注意しておく。汎函数の弱連続性は強連続性および弱下半連続性を意味するが，その逆は一般には正しくない。また，汎函数に対する Osgood 条件はそれが局所 Lipschitz 条件を満たすならば，したがって Gateaux 微分可能であるならば満足される[13]。

3. 最適制御問題の定式化

つぎのような遅れ微分方程式で記述することができる制御系を考える。

(3.1) $\dot{x}(t) = V(x_t(\cdot), u_t(\cdot), t)$, for a.e. $t \in (t_0, \gamma]$

ここに，右辺の V は前章で定義したボルテラ汎函数とする。

$[\alpha, t_0] \subseteq I \subseteq [\alpha, \gamma]$ を満たすある区間 I の上で，制御函数 $u(t)$ の値が既知であるとき，つぎの3つの条件を満足するならば，状態函数 $x(t)$ は初期函数 $\phi \in \Phi$ に対応する I の上で定義された(3.1)式の解であるという。

(i) すべての $t \in [\alpha, t_0]$ に対して，$x(t) = \phi(t)$

(ii) $x(t)$ は $I \cap [t_0, \gamma]$ の上で絶対連続である。

(iii) $x(t)$ は $I \cap (t_0, \gamma]$ の上で(3.1)式を満たす。

仮定 (a)～(d)，(f)および(g)のもとで，(3.1)式は任意に与えられた $\phi \in \Phi$ と $u \in U$ に対応して，$[\alpha, \gamma]$ の上で定義された一意な解 $x(t) = x(t, t_0; \phi, u)$ をもつことが知られている[13]。

また，状態拘束領域 $D \subseteq E^n$ と任意の $t \in [t_0, \gamma]$ に対して，D の内部に属するような時変標的集合 $T(t)$ が与えられているとき，初期函数 $\phi \in \Phi$ と制御函数 $u \in U$ の選定に応じて時刻 $t_f \in [\beta, \gamma]$ が定まり，つぎの3つの条件を満足するならば，函数の対 (ϕ, u) は許容政策であるという。

(i) $\phi \in \Phi$ と $u \in U_{t_f}$ に対応する(3.1)式の解 $x(t) = x(t, t_0; \phi, u)$ が $[\alpha, t_f]$ の上で定義される。

(ii) すべての $t \in [\alpha, t_f]$ に対して，$x(t, t_0; \phi, u) \in D$

(iii) $x(t_f, t_0; \phi, u) \in T(t_f)$

このようなすべての許容政策の集合を P で表わすことにする。

以上の準備のもとで，最適制御問題はつぎのように定式化される。

問題 Q_1 P の上で定義されたコスト汎函数

(3.2) $J(\phi, u) = \int_{t_0}^{t_f} V_0(x_t(\cdot), u_t(\cdot), t)dt$

を最小にするような最適政策 (ϕ^*, u^*) を集合 P の中から見出せ。ただし，V_0 は前章で定義したボルテラ汎函数とする。

いいかえると，問題 Q_1 は任意の $(\phi, u) \in P$ に対して次式を満足するような P の元 (ϕ^*, u^*) を見つけることである。

$$J(\phi^*, u^*) \leqq J(\phi, u)$$

4. 存在定理

本章では問題 Q_1 に対して，最適政策の存在を保証する一つの定理を証明する。そのさい，集合 P が空であるならば問題 Q_1 は意味をなさないから，許容政策はすくなくとも一つ存在することが仮定される。また，存在定理の証明においてつぎの補題を必要とする。

補題 4.1 仮定(a)のもとで，初期函数の集合 Φ は $C([\alpha, t_0], G)$ のコンパクトな部分集合である。

証明 $\{\phi^{(i)}\}$ を Φ の任意の列とする。仮定(a)によって，$\{\phi^{(i)}\}$ の一様有界性は明らかである。また Φ の定義にしたがって，各 $\phi^{(i)}(t)$ は $[\alpha, t_0]$ の上で絶対連続であり，その導函数 $\dot{\phi}^{(i)}(t)$ は $[\alpha, t_0]$ の上で定義された2乗可積分函数 $n(t)$ に対して $\|\dot{\phi}^{(i)}(t)\| \leqq n(t)$ なる関係を満足するから，Hölder の不等式を使うと次式が $\alpha \leqq t_1$, $t_2 \leqq t_0$ なる任意の t_1 と t_2 に対して成立する。

$$\|\phi^{(i)}(t_2) - \phi^{(i)}(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \dot{\phi}^{(i)}(t)dt \right\|$$

$$\leqq |t_2 - t_1|^{1/2} \left\{ \int_{\alpha}^{t_0} \|\dot{\phi}^{(i)}(t)\|^2 dt \right\}^{1/2}$$

$$\leqq |t_2 - t_1|^{1/2} \left\{ \int_{\alpha}^{t_0} |n(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

上式は $\{\phi^{(i)}\}$ が同程度連続であることを示している。したがって Ascoli-Arzela の定理により[18]，Φ は一様ノルムに関して相対コンパクトである。

つぎに，$\{\phi^{(i)}\}$ を $\phi\in C([\alpha, t_0], G)$ に強収束するような Φ の任意の列とする。$\left\{\int_\alpha^{t_0}\|\dot\phi^{(i)}(t)\|^2dt\right\}$ が実数の有界な列であって，$L_2[\alpha, t_0]$ は弱完備な空間であることから，導函数の列 $\{\dot\phi^{(i)}\}$ には $\psi\in L_2[\alpha, t_0]$ に弱収束するような部分列が存在する。そのような部分列を $\{\dot\phi^{(i_k)}\}$ で表わすならば，任意の $t\in[\alpha, t_0]$ に対して次式が成立する。

$$\int_\alpha^t \psi(s)ds=\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^t \dot\phi^{(i_k)}(s)ds$$
$$=\lim_{k\to\infty}(\phi^{(i_k)}(t)-\phi^{(i_k)}(\alpha))$$
$$=\phi(t)-\phi(\alpha)$$

上式は ϕ が Φ に属することを示している。以上のことから，Φ が $C([\alpha, t_0], G)$ のコンパクトな部分集合であることがいえる。 (証明終)

補題 4.2 仮定 (b) のもとで，制御函数の集合 U_t は任意の $t\in[t_0, \gamma]$ に対して $L_2([\alpha, t], E^r)$ の弱コンパクトな部分集合である。

証明 U_t は定義にしたがって $L_2([\alpha, t], E^r)$ の部分集合である。いま t を $[t_0, \gamma]$ において任意に固定する。仮定(b) によって，R は E^r の閉かつ有界な凸部分集合である。R の凸性から明らかなように，U_t は凸集合である。また R の有界性から，任意の $v\in U_t$ に対して次式を満足するような正数 c が存在する。

$$\|v(\tau)\|\leqq c,\ \text{for a.e. }\tau\in[\alpha, t]$$

よって L_2 ノルムの定義にしたがって，次式が導びかれる。

$$\|v\|_{L_2}=\left\{\int_\alpha^t\|v(\tau)\|^2d\tau\right\}^{1/2}\leqq c|t-\alpha|^{1/2}$$

上式は U_t が有界であることを示している。さらに，U_t は強閉集合でもある。このことを示すために，$\{v^{(i)}\}$ を $v\in L_2([\alpha, t], E^r)$ に強収束するような U_t の列とする。この $\{v^{(i)}\}$ にはほとんど到る所の $t\in[\alpha, t]$ に対してつぎの関係を満足するような部分列 $\{v^{(i_k)}\}$ が含まれている[19]。

$$\lim_{k\to\infty}v^{(i_k)}(t)=v(t)$$

また R の閉性から，つぎのことがいえる。

$$v(t)\in R,\ \text{for a.e. }t\in[\alpha, t]$$

したがって，v は $[\alpha, t]$ の上で定義され R に値をもつ可測函数であるから，v は $L_2([\alpha, t], R)$ に属する。

$L_2([\alpha, t], E^r)$ の強閉かつ有界な凸部分集合は弱コンパクトである[20]。上で示したように，U_t は任意の $t\in[t_0, \gamma]$ に対してこれらの性質を有する $L_2([\alpha, t], E^r)$ の部分集合である。 (証明終)

定理 4.1 2章で列挙した仮定(a)～(k)に加えて，つぎの条件が満たされるものとする。

(l) D は G を含む E^n のコンパクトな部分集合である。

(m) $T(t)$ は包含関係において上半連続な閉集合である[21]。すなわち，任意の $\varepsilon>0$ と $t\in[t_0, \gamma]$ に対して $\delta(\varepsilon, t)>0$ が存在し，$|t'-t|<\delta$ であるかぎり $T(t')$ は閉集合 $T(t)$ の ε-近傍に含まれる。

このとき，P が空でないならば，問題 Q_1 に対する最適政策が少なくとも一つ存在する。

証明 (i) 仮定 (h) と (k) によって次式が導びかれる。

$$0\leqq J(\phi, u)=\int_{t_0}^{t_f}V_0(x_t(\cdot), u_t(\cdot), t)dt$$
$$\leqq\int_{t_0}^{t_f}m_0(t)dt$$

上式から，P の上で定義されたコスト汎函数 $J(\phi, u)$ の下限 M は有限であることがわかる。したがって，P が空でないならば，次式を満足するような P の列 $\{\phi^{(i)}, u^{(i)}\}$ を選び出すことができる。

$$(4.1)\quad M=\lim_{i\to\infty}\int_{t_0}^{t_f^{(i)}}V_0(x_t^{(i)}(\cdot), u_t^{(i)}(\cdot), t)dt$$

ここに，各 $u^{(i)}$ は $[\alpha, t_f^{(i)}]$ の上で定義された制御函数を表わし，各 $x^{(i)}$ は $(\phi^{(i)}, u^{(i)})$ に対応して $[\alpha, t_f^{(i)}]$ の上で定義される (3.1) 式の解 $x^{(i)}(t)=x(t, t_0; \phi^{(i)}, u^{(i)})$ を表わす。

(ii) 各 $x^{(i)}(t)$ は明らかにつぎの方程式を満足している。

$$(4.2)\quad x^{(i)}(t)=\begin{cases}\phi^{(i)}(t), & \text{for } t\in[\alpha, t_0]\\ \phi^{(i)}(t_0)+\displaystyle\int_{t_0}^t V(x_s^{(i)}(\cdot), u_s^{(i)}(\cdot), s)ds, & \text{for } t\in(t_0, t_f^{(i)}]\end{cases}$$

ここで，各 $x^{(i)}(t)$ の定義域をつぎの条件のもとで $[\alpha, \gamma]$ まで拡張する。

$$(4.3)\quad V(x_t^{(i)}(\cdot), u_t^{(i)}(\cdot), t)=V\left(x_{t_f^{(i)}}^{(i)}(\cdot),\ u_{t_f^{(i)}}^{(i)}(\cdot),\ t_f^{(i)}\right),\quad \text{for } t\in[t_f^{(i)}, \gamma]$$

このとき仮定(f)と(4.3)式により，$[t_0, \gamma]$ の上で定義された2乗可積分函数 $m(t)$ が存在して，次式が x と u に関して一様に成立する。

$$(4.4)\quad \|V(x_t^{(i)}(\cdot), u_t^{(i)}(\cdot), t)\|\leqq m(t)$$

補題 4.1 の証明で示したように，Φ の列 $\{\phi^{(i)}\}$ は一様有界であるから，i と無関係に定まる正数 c が存

在して次式が成立する。

(4.5) $\quad \|\phi^{(i)}\|_C = \sup_{\alpha \le t \le t_0} \|\phi^{(i)}(t)\| \le c$

(4.2)～(4.5)式から，次式が任意の i について成立する。

$$\|x^{(i)}(t)\| \le \begin{cases} c, & \text{for } t \in [\alpha, t_0] \\ c + \int_{t_0}^{t} m(s)ds \le c + \int_{t_0}^{\gamma} m(s)ds, & \text{for } t \in (t_0, \gamma] \end{cases}$$

Hölder の不等式を使うと，上式からつぎの関係が得られる。

$$\|x^{(i)}(t)\| \le \begin{cases} c, & \text{for } t \in [\alpha, t_0] \\ c + |\gamma - t_0|^{1/2} \left\{ \int_{t_0}^{\gamma} |m(s)|^2 ds \right\}^{1/2}, & \text{for } t \in (t_0, \gamma] \end{cases}$$

上式は拡張された区間 $[\alpha, \gamma]$ の上で列 $\{x^{(i)}\}$ が一様有界であることを示している。また，任意の i と $\alpha \le t_1, t_2 \le \gamma$ なる任意の t_1, t_2 に対してつぎの関係が導びかれる。

$$\|x^{(i)}(t_2) - x^{(i)}(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} V(x_s^{(i)}(\cdot), u_s^{(i)}(\cdot), s)ds \right\|$$
$$\le \left| \int_{t_1}^{t_2} m(s)ds \right| \le |t_2 - t_1|^{1/2} \left\{ \int_{\alpha}^{\gamma} |m(s)|^2 ds \right\}^{1/2}$$

上式は拡張された区間 $[\alpha, \gamma]$ の上で列 $\{x^{(i)}\}$ が同程度連続であることを示している。

したがって Ascoli-Arzela の定理により，拡張された区間 $[\alpha, \gamma]$ の上で定義された列 $\{x^{(i)}\}$ には $x^* \in X$ に強収束するような部分列が含まれる。

(iii) つぎに，各 $u^{(i)}(t)$ の定義域をつぎの条件のもとで $[\alpha, \gamma]$ まで拡張する。

(4.6) $\quad u^{(i)}(t) = 0, \ \text{for } t \in (t_f^{(i)}, \gamma]$

このとき補題 4.2 によって，拡張された区間 $[\alpha, \gamma]$ の上で定義された列 $\{u^{(i)}\}$ の中から $u^* \in U$ に弱収束するような部分列 $\{u^{(j)}\}$ を選び出すことができる。これに対応して定まる各 $t_f^{(j)}$ はコンパクトな区間 $[\beta, \gamma]$ に属しているから，次式を満足するような $\{t_f^{(j)}\}$ の部分列 $\{t_f^{(k)}\}$ が存在する。

$$\liminf_{k \to \infty} t_f^{(k)} = t_f^* \in [\beta, \gamma]$$

さらに補題 4.1 によって，それに対応する列 $\{\phi^{(k)}\}$ の中から $\phi^* \in \Phi$ に強収束する部分列 $\{\phi^{(l)}\}$ を取り出すことができる。こうして得られた $\{\phi^{(l)}, u^{(l)}\}$ の部分列 $\{\phi^{(l)}, u^{(l)}\}$ は依然として P の列であるから，本証明の (ii) 段階にしたがって，次式を満足するような $\{x^{(l)}\}$ の部分列 $\{x^{(m)}\}$ が存在する。

(4.7) $\quad \lim_{m \to \infty} x^{(m)}(\cdot) = x^*(\cdot)$, strongly in X

ここで，つぎの極限過程も依然として成立している。

(4.8) $\quad \lim_{m \to \infty} u^{(m)}(\cdot) = u^*(\cdot)$, weakly in U

(4.9) $\quad \lim_{m \to \infty} \phi^{(m)}(\cdot) = \phi^*(\cdot)$, strongly in Φ

(4.10) $\quad \liminf_{m \to \infty} t_f^{(m)} = t_f^* \in [\beta, \gamma]$

仮定(d)～(e)および(4.7)～(4.8)式から，次式がほとんど到る所の $t \in [t_0, \gamma]$ に対して成立することがわかる。

(4.11) $\quad \lim_{m \to \infty} \| V(x_t^{(m)}(\cdot), u_t^{(m)}(\cdot), t) - V(x_t^*(\cdot), u_t^*(\cdot), t) \| = 0$

したがって Lebesgue の収束定理により[20]，次式が任意の $t \in [t_0, \gamma]$ に対して成立する。

(4.12) $$\lim_{m \to \infty} \int_{t_0}^{t} V(x_s^{(m)}(\cdot), u_s^{(m)}(\cdot), s)ds = \int_{t_0}^{t} V(x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot), s)ds$$

(4.2)～(4.3)，(4.6)～(4.9)および(4.12)式にもとづき，次式が導びかれる。

(4.13) $$x^*(t) = \begin{cases} \phi^*(t), & \text{for } t \in [\alpha, t_0] \\ \phi^*(t_0) + \int_{t_0}^{t} V(x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot), s)ds, & \text{for } t \in (t_0, \gamma] \end{cases}$$

また (4.2) および(4.13)式から，次式が得られる。

$$\|x^{(m)}(t_f^{(m)}) - x^*(t_f^*)\| \le \|\phi^{(m)}(t_0) - \phi^*(t_0)\|$$
$$+ \int_{t_0}^{t_f^*} \| V(x_s^{(m)}(\cdot), u_s^{(m)}(\cdot), s) - V(x_s^*(\cdot), u_s^*(\cdot), s) \| ds$$
$$+ \int_{t_f^*}^{t_f^{(m)}} \| V(x_s^{(m)}(\cdot), u_s^{(m)}(\cdot), s) \| ds$$

上式の右辺の値は (4.9)～(4.11) 式にもとづいて，$m \to \infty$ のときに零に移行する。したがって次式が成立する。

(4.14) $\quad \lim_{m \to \infty} x^{(m)}(t_f^{(m)}) = x^*(t_f^*)$

(4.13)および(4.14)式は $x^*(t)$ が $\phi^* \in \Phi$ と $u^* \in U_{t_f^*}$ に対応する $[\alpha, t_f^*]$ の上で定義された (3.1) 式の解 $x^*(t) = x(t, t_0; \phi^*, u^*)$ であることを示している。こうして，$x^*(t)$ は許容政策に関する条件 (i) を満たす。

また $\{\phi^{(m)}, u^{(m)}\}$ は P の列であるから，これらに対応する(3.1)式の各解 $x^{(m)}(t)$ は任意の $t \in [\alpha, t_f^{(m)}]$ に対して D に属している。このことと，(4.10) 式から十分大きなすべての m に対して

$$[\alpha, t_f^*] \subseteq [\alpha, t_f^{(m)}]$$

なる関係が成立することおよび仮定 (l) にもとづいて，$x^*(t)$ は任意の $t \in [\alpha, t_f^*]$ に対して D に属するか，または D の境界上に位置することがいえる。よって，$x^*(t)$ は許容政策に関する条件 (ii) を満たす。

さらに仮定 (m) によって

$$\Lambda=\{(t, z);\ t\in[t_f^*, \gamma],\ z\in T(t)\}$$

なる集合は E^{n+1} において閉じている[21]。$x^{(m)}(t_f^{(m)})\in T(t_f^{(m)})$ であることと，十分大きなすべての m に対して $t_f^{(m)}\in[t_f^*, \gamma]$ であることから，Λ の列として $\{t_f^{(m)}, x^{(m)}(t_f^{(m)})\}$ をとることができる。この列は (4.10) と (4.14) 式にもとづいて収束するが，Λ の閉性によって，収束点 $(t_f^*, x^*(t_f^*))$ は Λ に属している。したがってつぎのことがいえる。

$$x^*(t_f^*)\in T(t_f^*)$$

よって，$x^*(t)$ は許容政策に関する条件(iii)を満たす。

以上のことから，(ϕ^*, u^*) は許容政策であることがわかった。

(iv)最後に，$(\phi^*, u^*)\in P$ が実際に $J(\phi, u)$ の下限を達成することを示さなければならない。仮定 (i)～(j) および (4.7)～(4.8)式から，次式がほとんど到る所の $t\in[t_0, t_f^*]$ に対して成立することがわかる。

$$\text{(4.15)}\quad \liminf_{m\to\infty} V_0(x_t^{(m)}(\cdot), u_t^{(m)}(\cdot), t) \geqq V_0(x_t^*(\cdot), u_t^*(\cdot), t)$$

十分大きなすべての m に対して $[t_0, t_f^*]\subseteq[t_0, t_f^{(m)}]$ であることから，仮定 (h) と Fatou の補題[20] を使うと，次式が(4.15)式から導びかれる。

$$\text{(4.16)}\quad \begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_f^*} V_0(x_t^*(\cdot), u_t^*(\cdot), t)dt\\ &\leqq\int_{t_0}^{t_f^*}\liminf_{m\to\infty} V_0(x_t^{(m)}(\cdot), u_t^{(m)}(\cdot), t)dt\\ &\leqq\liminf_{m\to\infty}\int_{t_0}^{t_f^*} V_0(x_t^{(m)}(\cdot), u_t^{(m)}(\cdot), t)dt\\ &\leqq\lim_{m\to\infty}\int_{t_0}^{t_f^{(m)}} V_0(x_t^{(m)}(\cdot), u_t^{(m)}(\cdot), t)dt\\ &=M\end{aligned}$$

一方，(4.1)式からつぎの不等式は明らかに成立する。

$$\text{(4.17)}\quad M\leqq\int_{t_0}^{t_f^*} V_0(x_t^*(\cdot), u_t^*(\cdot), t)dt$$

したがって，(4.16)～(4.17)式にもとづいて次式が得られる。

$$\begin{aligned}M&=\lim_{m\to\infty}\int_{t_0}^{t_f^{(m)}} V_0(x_t^{(m)}(\cdot), u_t^{(m)}(\cdot), t)dt\\ &=\int_{t_0}^{t_f^*} V_0(x_t^*(\cdot), u_t^*(\cdot), t)dt\\ &=J(\phi^*, u^*)\end{aligned}$$

本証明の(iii)段階で示したように，(ϕ^*, u^*) は許容政策であるから，上式はこの (ϕ^*, u^*) が P の上で定義された $J(\phi, u)$ の下限を実際に達成することを示している。よって，(ϕ^*, u^*) は問題 Q_1 に対する最適政策である。 (証明終)

5. 線形遅れ微分制御系の最適問題

航空宇宙の分野で現われる遅れを伴う制御系の場合には，状態方程式が線形遅れ微分方程式によって記述できうることが多い。そこで存在定理の応用例として，本章では線形遅れ微分制御系に対する最適問題を取り上げる。本論に入る前に以下の準備が必要である。

線形ノルム空間 Y の上で定義された汎函数 f が，任意の実数 λ と μ および $y, y'\in Y$ に対して

$$f(\lambda y+\mu y')=\lambda f(y)+\mu f(y')$$

を満足するとき，$f(y)$ は線形であるという。すべての $y\in Y$ に対して

$$\|f(y)\|\leqq M\|y\|_Y$$

となる実数 $M>0$ が存在するならば，汎函数 $f(y)$ は有界であるという。また，汎函数 $f(y)$ が Y の凸部分集合 C の上で定義されるとき，すべての $y, y'\in C$ と $0\leqq\lambda\leqq1$ なる任意の λ に対して

$$f(\lambda y+(1-\lambda)y')\leqq\lambda f(y)+(1-\lambda)f(y')$$

を満足するならば，$f(y)$ は凸であるという*。さらに，Y の部分集合 C' の上で定義された汎函数 $f(y)$ が，任意の $y\in C'$ に対して $y^\circ\in C'$ が存在し

$$f(y^\circ)\leqq f(y)$$

を満足するとき，y° は $f(y)$ の大域的最小値を達成するという。

線形汎函数に対しては強連続性と有界性とは同等である[19]。$f(y)$ が有界な線形汎函数であるならば，任意の $y, y'\in Y$ に対して次式が成立する。

$$\|f(y)-f(y')\|=\|f(y-y')\|\leqq M\|y-y'\|_Y$$

したがって $f(y)$ は Lipschitz 条件を満たすから，つぎの補題がいえる。

補題 5.1 線形ノルム空間の上で定義された有界な線形汎函数は Osgood 条件を満足する。

また，汎函数の弱連続性と弱下半連続性についてつぎのことがいえる。

補題 5.2 線形ノルム空間 Y の上で定義された有界な線形汎函数 $f(y)$ は弱連続である。

証明 $y\in Y$ に弱収束するような Y の列 $\{y^{(n)}\}$ をとる。このとき，$\{y^{(n)}\}$ の中から

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y^{(k)}$$

が y に強収束するような部分列 $\{y^{(k)}\}$ を取り出すこ

* 上式の等号が $y=y'$ のときそのときのみ成立するならば，$f(y)$ は厳密に凸であるという。

とができる[22]。また，$f(y)$ の線形性により次式が成立する。

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(y^{(k)})=f\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y^{(k)}\right)$$

したがって，$f(y)$ の強連続性によって次式が得られる。

$$\lim_{k\to\infty} f(y^{(k)})=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(y^{(k)})$$
$$=\lim_{m\to\infty} f\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y^{(k)}\right)=f(y)$$

上式はすべての n に対しても成立し

(5.1) $$\lim_{n\to\infty} f(y^{(n)})=f(y)$$

となる。なぜならば，(5.1) 式が成立しないと仮定すると，すべての i に対して $\varepsilon>0$ が存在し

(5.2) $$\|f(y^{(i)})-f(y)\|\geqq\varepsilon$$

となるような $\{y^{(n)}\}$ の部分列 $\{y^{(i)}\}$ が取り出せる。しかし，$\{y^{(i)}\}$ もまた y に弱収束する列であるから，上の議論と同様にして

$$\|f(y^{(j)})-f(y)\|<\varepsilon$$

を満足するような $\{y^{(i)}\}$ の部分列 $\{y^{(j)}\}$ が存在することになり，(5.2)式と矛盾する。よって(5.1)式が成立するから，$f(y)$ は弱連続である。 (証明終)

補題 5.3[22] 線形ノルム空間の凸部分集合 C の上で定義された汎函数 $f(y)$ が強連続かつ凸であるならば，$f(y)$ は弱下半連続である。

証明 $y\in C$ に弱収束するような C の列 $\{y^{(n)}\}$ をとる。この列から $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y^{(k)}$ が y に強収束するような部分列 $\{y^{(k)}\}$ を取り出せる。また $f(y)$ の凸性により，次式が成立する。

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(y^{(k)})\geqq f\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y^{(k)}\right)$$

したがって，$f(y)$ の強連続性によって次式が得られる。

$$\liminf_{k\to\infty} f(y^{(k)})=\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(y^{(k)})$$
$$\geqq\liminf_{m\to\infty} f\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y^{(k)}\right)=f(y)$$

このとき，すべての n に対しても

(5.3) $$\liminf_{n\to\infty} f(y^{(n)})\geqq f(y)$$

が成立する。(5.3) 式は $f(y)$ が弱下半連続であることを示している。 (証明終)

さて，(3.1) 式がつぎのような線形遅れ微分方程式によって記述されうる場合を考えよう。

(5.4) $$\dot{x}(t)=V_1(x_t(\cdot),t)+V_2(u_t(\cdot),t),\quad \text{for } t\in(t_0,\gamma]$$

ここに，V_1 と V_2 は t に関して連続であり，任意の $t\in(t_0,\gamma]$ に対して有界であり，それぞれ x と u に関して線形であるとする。(5.4) 式に対応して次式を考える。

(5.5) $$\dot{\bar{x}}(t)=V_1(\bar{x}_t(\cdot),t),\ \text{for } t\in(t_0,\gamma]$$

初期函数 $\phi\in\Phi$ と制御函数 $u\in U$ に対応した (5.4) 式の解を $x(t,t_0;\phi,u)$ で表わし，初期函数 $\phi\in\Phi$ に対応した(5.5)式の解を $\bar{x}(t,t_0;\phi)$ で表わして，つぎのような函数 $z(t)$ を定義する。

$$z(t)=x(t,t_0;\phi,u)-\bar{x}(t,t_0;\phi)$$

V_1 の x に関する線形性と(5.4)～(5.5)式にもとづいて，上式からつぎの関係が得られる。

$$\dot{z}(t)=V_1(x_t(\cdot,t_0;\phi,u),t)+V_2(u_t(\cdot),t)$$
$$-V_1(\bar{x}_t(\cdot,t_0;\phi),t)$$
$$=V_1(z_t(\cdot),t)+V_2(u_t(\cdot),t)$$

上式は $z(t)$ がすべての $t\in[\alpha,t_0]$ に対して $z(t)=0$ なる初期条件を満足するような (5.4) 式の解となっていることを示しているから，$z(t)=x(t,t_0;0,u)$ と表わせる。したがって，つぎの関係が得られる。

(5.6) $$x(t,t_0;\phi,u)=x(t,t_0;0,u)+\bar{x}(t,t_0;\phi)$$

また U_t の凸性によって，$u_t^1(\cdot),u_t^2(\cdot)\in U_t$ と $0\leqq\lambda\leqq 1$ なる任意の λ に対して，$u_t(\cdot)=\lambda u_t^1(\cdot)+(1-\lambda)u_t^2(\cdot)\in U_t$ がいえる。ここで(5.4)式の解 $x(t,t_0;0,u^1)$ について調べると，次式が V_1 の x に関する線形性と V_2 の u に関する線形性にもとづいて得られる。

$$\lambda\dot{x}(t,t_0;0,u^1)$$
$$=\lambda V_1(x_t(\cdot,t_0;0,u^1),t)+\lambda V_2(u_t^1(\cdot),t)$$
$$=V_1(\lambda x_t(\cdot,t_0;0,u^1),t)+V_2(\lambda u_t^1(\cdot),t)$$

上式からつぎの関係が得られる。

(5.7) $$\lambda x(t,t_0;0,u^1)=x(t,t_0;0,\lambda u^1)$$

同様にして (5.4) 式の解 $x(t,t_0;0,u^2)$ について，つぎの関係が成立する。

(5.8) $$(1-\lambda)x(t,t_0;0,u^2)=x(t,t_0;0,(1-\lambda)u^2)$$

いま，つぎのような函数 $w(t)$ を定義する。

$$w(t)=x(t,t_0;0,\lambda u^1)+x(t,t_0;0,(1-\lambda)u^2)$$

V_1 の x に関する線形性と V_2 の u に関する線形性によって，上式からつぎの関係が導びかれる。

$$\dot{w}(t)=V_1(x_t(\cdot,t_0;0,\lambda u^1),t)+V_2(\lambda u_t^1(\cdot),t)$$
$$+V_1(x_t(\cdot,t_0;0,(1-\lambda)u^2),t)$$
$$+V_2((1-\lambda)u_t^2(\cdot),t)$$
$$=V_1(w_t(\cdot),t)+V_2(u_t(\cdot),t)$$

よって，$w(t)$ はすべての $t\in[\alpha,t_0]$ に対して $w(t)=0$ なる初期条件を満足し制御函数 $u=\lambda u^1+(1-\lambda)u^2$ に対応した (5.4) 式の解となっているから，$w(t)=x(t,t_0;0,u)$ と表わせる。したがって，つぎの関係が得ら

れる。

(5.9) $x(t, t_0; 0, u)=x(t, t_0; 0, \lambda u^1+(1-\lambda)u^2)$
$=x(t, t_0; 0, \lambda u^1)+x(t, t_0; 0, (1-\lambda)u^2)$

(5.6)～(5.9)式から容易に，つぎの補題を得る。

補題 5.4 (5.4)式の V_1 と V_2 は t に関して連続であり，任意の $t\in(t_0, \gamma]$ に対して有界であり，それぞれ x と u に関して線形であるとする。このとき，任意の $u^1, u^2\in U$ と $0\leqq\lambda\leqq 1$ なる任意の λ に対して，u^1, u^2 および $u=\lambda u^1+(1-\lambda)u^2$ なる制御函数と初期函数 $\phi\in\Phi$ に対応した(5.4)式の解の間には，つぎの関係が成立する。

$$x(t, t_0; \phi, u)=\lambda x(t, t_0; \phi, u^1)+(1-\lambda)x(t, t_0; \phi, u^2)$$

以上の準備のもとに，つぎのデータをもつ最適制御**問題 Q_2** を考える。

(D_1) 与えられた初期函数 $\phi\in\Phi$。

(D_2) 終端条件 $x(t_f)=x_f$。ここに t_f と x_f は固定。

(D_3) 状態拘束領域 $D\subseteq E^n$。

(D_4) (5.4)式で記述された状態方程式。

(D_5) コスト汎函数

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_f} V_0(x_t(\cdot), u_t(\cdot), t)dt \tag{5.10}$$

ある $u\in U$ に対応した(5.4)式の解 $x(t)=x(t, t_0; \phi, u)$ がすべての $t\in[t_0, t_f]$ において D に含まれ，$x(t_f)=x_f$ を満足するならば，u は問題 Q_2 に対する許容制御であるという。すべての許容制御の集合を P でもって表わす。このとき，すべての $u\in P$ に対して

$$J(u^*)\leqq J(u)$$

を満足するような $u^*\in P$ が存在するならば，u^* は問題 Q_2 に対する大域的最小コストを達成する。もしこのような u^* のすべての集合がただ一つの元から成っているならば，最適制御は一意に定まる。問題 Q_2 に対する最適制御の存在と一意性について，つぎのことがいえる。

定理 5.1 2章の仮定 (a)～(b), (h)～(i) および (k) に加えて，つぎの条件が満たされるものとする。

(A) (5.4)式の V_1 と V_2 は t に関して連続であり，任意の $t\in(t_0, \gamma]$ に対して有界であり，それぞれ x と u に関して線形である。

(B) (5.10)式の V_0 は u に関して強連続かつ凸である。

(C) D は E^n のコンパクトな凸部分集合である。

(D) $J(u)$ は U の上で厳密に凸である。

このとき，P が空でないかぎり，問題 Q_2 に対して一意な最適制御が存在する。

証明 条件(A)は補題 5.1 と 5.2 により仮定(c)～(g) を満たし，条件(B)は補題 5.3 により仮定(j)を満たす。よって，定理 4.1 のすべての仮定が満たされるから，問題 Q_2 に対して最適制御 $u^*\in P$ が少なくとも一つ存在し，すべての $u\in P$ に対して次式を満足する。

$$J(u^*)\leqq J(u)$$

このようなすべての u^* の集合を Ω で表わすことにする。この Ω が実際にはただ一つの元から成っていることがいえれば，最適制御の一意性は証明される。

そのためにまず，$J(u)$ は Ω の凸閉包の上で定義できることを示す。任意の $v^1, v^2\in\Omega$ と $0\leqq\lambda\leqq 1$ なる任意の λ に対して $v=\lambda v^1+(1-\lambda)v^2$ なる函数を定義すると，$v\in U$ は明らかである。したがって補題 5.4 により，初期函数 ϕ を満たし v^1, v^2, v なる各制御函数に対応する(5.4)式の解の間には，すべての $t\in[\alpha, t_f]$ に対してつぎの関係が成立する。

$$x(t, t_0; \phi, v)=\lambda x(t, t_0; \phi, v^1)+(1-\lambda)x(t, t_0; \phi, v^2) \tag{5.11}$$

v^1 と v^2 は許容制御であるから，それらに対応する解 $x(t, t_0; \phi, v^1)$ と $x(t, t_0; \phi, v^2)$ はともにすべての $t\in[t_0, t_f]$ に対して D に含まれる。したがって，条件(C)および(5.11)式にもとづき，v に対応する解 $x(t, t_0; \phi, v)$ もまたすべての $t\in[t_0, t_f]$ に対して D に含まれる。また，(5.11)式から $t=t_f$ において

$$\begin{aligned} x(t_f, t_0; \phi, v) &=\lambda x(t_f, t_0; \phi, v^1)+(1-\lambda)x(t_f, t_0; \phi, v^2) \\ &=x_f \end{aligned}$$

が成立するから，v に対応する(5.4)式の解は終端条件を満たす。よって，$v=\lambda v^1+(1-\lambda)v^2$ で表現される函数は $0\leqq\lambda\leqq 1$ なる任意の λ に対して許容制御となっている。このことは $J(u)$ が Ω の凸閉包の上で定義できることを示している。

つぎに，Ω がただ一つの元から成っていることを示す。矛盾を導びくために，Ω には異なった元 v^1 と v^2 が存在すると仮定しょう。このとき条件(D)によって，$0<\lambda<1$ なる任意の λ に対して次式が成立しなければならない。

$$J(\lambda v^1+(1-\lambda)v^2)<J(v^1)=J(v^2)$$

一方，Ω の定義の仕方から明らかなように，任意の $0<\lambda<1$ なる λ に対して次式が成立す。

$$J(v^1)=J(v^2)\leqq J(\lambda v^1+(1-\lambda)v^2)$$

これは矛盾である。ゆえに，Ω はただ一つの元から成

っている。 (証明終)

ここで，定理 5.1 の条件を満たすようなコスト汎函数 $J(u)$ の具体例を与えておく。線形ノルム空間 Y の任意の元 y, y' と $0 \leqq \lambda \leqq 1$ なる任意の λ に対して，つぎの関係が成立する。

$$\begin{aligned}&\|\lambda y+(1-\lambda)y'\|_Y^2\\&\leqq \lambda^2\|y\|_Y^2+2\lambda(1-\lambda)\|y\|_Y\|y'\|_Y\\&+(1-\lambda)^2\|y'\|_Y^2=\lambda\|y\|_Y^2+(1-\lambda)\|y'\|_Y^2\\&-\lambda(1-\lambda)(\|y\|_Y-\|y'\|_Y)^2\\&\leqq\lambda\|y\|_Y^2+(1-\lambda)\|y'\|_Y^2\end{aligned} \tag{5.12}$$

したがって $\|\cdot\|_Y^2$ の凸性がいえるから，

$$V_0(x_t(\cdot),\ u_t(\cdot),\ t)=\|x_t(\cdot)\|_{X_t}^2+\|u_t(\cdot)\|_{U_t}^2$$

で定義される汎函数は定理 5.1 の V_0 に関する条件を満たす。上式に対応するコスト汎函数

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_f}(\|x_t(\cdot)\|_{X_t}^2+\|u_t(\cdot)\|_{U_t}^2)dt \tag{5.13}$$

を考えよう。補題 5.4 と(5.12)式にもとづいて，u^1, $u^2 \in U$ と $0<\lambda<1$ なる任意の λ に対して次式が導出される。

$$\begin{aligned}J(\lambda u^1+(1-\lambda)u^2)=&\int_{t_0}^{t_f}(\|\lambda x_t(\cdot,\ t_0;\ \phi,\ u^1)\\&+(1-\lambda)x_t(\cdot,\ t_0;\ \phi,\ u^2)\|_{X_t}^2\\&+\|\lambda u_t^1(\cdot)+(1-\lambda)u_t^2(\cdot)\|_{U_t}^2)dt\\&\leqq\lambda J(u^1)+(1-\lambda)J(u^2)\end{aligned}$$

上式の等号が成立するための必要十分条件は，すべての $t\in[t_0,\ t_f]$ に対して次式が恒等的に成立することである。

$$\begin{aligned}&\|\lambda x_t(\cdot,\ t_0;\ \phi,\ u^1)+(1-\lambda)x_t(\cdot,\ t_0;\ \phi,\ u^2)\|_{X_t}\\&=\lambda\|x_t(\cdot,t_0;\ \phi,u^1)\|_{X_t}+(1-\lambda)\|x_t(\cdot,\ t_0;\ \phi,\ u^2)\|_{X_t},\\&\|\lambda u_t^1(\cdot)+(1-\lambda)u_t^2(\cdot)\|_{U_t}\\&\qquad=\lambda\|u_t^1(\cdot)\|_{U_t}+(1-\lambda)\|u_t^2(\cdot)\|_{U_t}\end{aligned}$$

上式は $u^1=u^2$ のときそのときにのみ成立する。したがって，$J(u)$ は U の上で厳密に凸である。よって，つぎのことがいえる。

定理 5.2 2章の仮定 (a)～(b) と定理 5.1 の条件(A)と(C)が満たされるものとする。このとき P が空でないかぎり，(5.13)式なるコスト汎函数をもつ問題 Q_2 に対して，一意な最適制御が存在する。

最後に，(5.4) 式のような線形遅れ微分制御系に関して，もう少し具体的な表示を与えておく。時間遅れ τ_1, τ_2 を伴う制御系

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t-\tau_1)+B(t)u(t-\tau_2)$$

は(5.4)式の特別な場合である。また，定理 5.1 の条件(A)のもとで Riesz の表現定理を適用すると，(5.4)式はつぎのように書ける。

$$\dot{x}(t)=\int_\alpha^t d_\tau A(\tau,\ t)x(\tau)+\int_\alpha^t B(\tau,\ t)u(\tau)d\tau$$

ここに，A は V_1 により一意に定まる有界変動函数を要素とする $n\times n$ マトリクスであり，B は V_2 により一意に定まり L_2 に属する函数を要素とする $n\times r$ マトリクスである。また，右辺の第一項は固定した t に対して τ に関する Stielties 積分を表わす。つぎのような形の方程式は上式の特別な場合である。

$$\dot{x}(t)=A_1(t)x(t-\tau_1)+\int_\alpha^t A_2(t-\tau)x(\tau)d\tau$$
$$+\int_\alpha^t B(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

6. 結　　言

本報告では，一般的な遅れ微分方程式によって記述しえる制御系に対して最適問題を定式化し，最適政策の存在に関する一つの定理を与えた。この最適制御問題は状態だけでなく制御にも遅れを考慮し，評価基準を状態函数および制御函数の空間の上で定義された汎函数としている点で，M.N. Oguztoreli によって定式化された問題を一般化している。すなわち，彼は状態方程式が

$$\dot{x}(t)=V(x_t(\cdot),\ u(t),\ t)$$

で記述され，評価基準として

$$J(\phi,\ u)=\int_{t_0}^{t_f}V_0(x(t),\ u(t),\ t)\,dt$$

をもつ最適制御問題を考え，この問題に対する最適政策の存在を

$$\begin{aligned}&\tilde{V}(x_t(\cdot),\ R,\ t)\\&\quad=\{V_0(x(t),\ u(t),\ t),\ V(x_t(\cdot),\ u(t),\ t):\ u\in U\}\end{aligned}$$

なる集合が任意の $t\in[t_0,\ \gamma]$ と $x(t)\in D$ に対して凸集合であるという条件のもとで証明した。この条件は A.F. Filippov[23] が常微分方程式で記述される制御系に対する最短時間制御の存在条件として与えたものの直接的拡張である。この Oguztoreli の問題を3章のように一般化した場合，4章で示したように，最適政策は(3.1)式の V が u に関して弱連続であり，(3.2)式の V_0 が u に関して弱下半連続であるという条件のもとで存在する。

5章では，汎函数が弱連続または弱下半連続になるための十分条件を与え，線形遅れ微分方程式に対する解の一般的性質を示すとともに，存在定理の応用例として線形遅れ微分制御系に関する最適問題を取り上げ，一意な最適制御の存在について考察した。一意性は(5.10)式の $J(u)$ が U の上で厳密に凸ならば保証

できるが，その条件を満たすようなコスト汎函数の具体例を与えた。

なお，本報告ではいわゆる出力制御（または到達）問題について考察したのであって，状態制御（または整定）問題についてではないことを明言しておく。すなわち，最適政策 (ϕ^*, u^*) とは状態拘束条件を満たしつつ最小コストでもって，初期状態函数 ϕ^* から出発した制御系の最終出力 $x^*(t_f^*)$ を標的集合 T に到達せしめるような制御函数 u^* のことである。一方，整定問題の場合には，たとえば $t \geqq t_f^*$ なるすべての t に対して $x^*(t) \in T$ のごとき条件によって，到達後の制御系の状態が規定される。したがって，前者の終端条件が有限次元で与えられるに対して，後者の場合には無限次元となる。そこに整定問題を取り扱う際の困難さがある。遅れ微分制御系に対する整定問題は今後の重要な研究課題である。

終りに，計測部の三好甫室長と高橋匡康技官から本研究に対して多くの討論をいただいたことを附記する。

引 用 文 献

1) H.F. Meissinger: Lunar Landing by Command Guidance in the Presence of Transmission Time-Delay, AIAA Paper No. 63-346 (1963)
2) A.S. Boksenbom, D. Novik and H. Heppler: Optimum Controllers for Linear Closed-Loop Systems, NACA TN-2939 (1953)
3) D. McRuer and D.H. Weir: Theory of Manual Vehicular Control, Ergonomics, Vol. 12, No. 4, pp. 599-633 (1969)
4) L.E. Ercsson and J.P. Reding: Ablation Effects on Vehicle Dynamics, J. Spacecraft and Rockets, Vol. 3, No. 10, pp. 1476-1483 (1966)
5) M. Summerfield: A Theory of Unstable Combustion in Liquid Propellant Rocket Systems, J. Amer. Rocket Soc., Vol. 21, No. 5, pp. 108-114 (1951)
6) G.L. Haratisvili: The Maximum Principle in the Theory of Optimal Processes Involving Delay, Soviet Math. Dokl., Vol. 2, pp. 28-32 (1961)
7) N.N. Krasovskii: On the Analytic Construction of an Optimal Control in a System with Time Lags, J. Appl. Math. Mech., Vol. 26, pp. 50-67 (1962)
8) M.N. Oguztoreli: A Time Optimal Control Problem for Systems Described by Differential Difference Equations, J. SIAM Control, Ser. A, Vol. 1, No. 3, pp. 290-309 (1963)
9) 示村，吉田，河村，小松：むだ時間を含む線形系の最適制御（最短時間問題），計測と制御，第3巻，第6号，pp. 7-12（昭和39年）
10) 示村，小松：むだ時間を含む線形系における最短時間問題の解法，計測自動制御学会論文集，第1巻，第3号，pp. 15-22（昭和40年）
11) 示村：むだ時間を含む線形系の可制御性について，計測自動制御学会論文集，第1巻，第4号，pp. 1-5（昭和40年）
12) D.H. Chyung and E.B. Lee: Linear Optimal Systems with Time Delays, J. SIAM Control, Vol. 4, No. 3, pp. 548-575 (1966)
13) M.N. Oguztoreli: Time-Lag Control Systems, Academic Press, New York (1966)
14) A.T. Fuller: Optimal Nonlinear Control of Systems with Pure Delay, Int. J. Control, Vol. 8, No. 2, pp. 145-168 (1968)
15) R.E. Foerster: Control of Linear Systems with Large Time Delays in the Control, NASA CR-1553 (1970)
16) D.H. Chyung and E.B. Lee: Delayed Action Control Problems, Fourth Congress of IFAC, Paper No. 13.1, pp. 3-15 (1969)
17) M.M. Veinberg: Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden-Day Inc., San Francisco (1964)
18) K. Yosida: Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin·Heidelbeg (1966)
19) A.N. Kolmogorov and S.V. Formin: Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Graylock Press, Rochester, New York (1957)
20) N. Dunford and J. Schwartz: Linear Operators, Part I, Interscience, New York (1958)
21) L.W. Neustadt: The Existence of Optimal Controls in the Absence of Convexity Conditions, J. Math. Appl., Vol. 7, pp. 110-117 (1963)
22) A.V. Balakrishnan: Introduction to Optimization Theory in a Hilbert Space (Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems Vol. 42), Springer-Verlag, New York (1971)
23) A.F. Filippov: On Certain Questions in the Theory of Optimal Control, J. SIAM Control, Ser. A, Vol. 1, No. 1, pp. 76-84 (1962)

航空宇宙技術研究所報告357号
昭和49年2月発行
発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所　有限会社啓文堂松本印刷
東京都文京区水道2-7-5

Printed in Japan