

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-390

多数の偏心円孔を有する回転円板の応力

(有限要素法による計算)

松末勝利・長松昭男
橋本良作・米内山 誠

1974年10月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

多数の偏心円孔を有する回転円板の応力*

(有限要素法による計算)

松 末 勝 利** 長 松 昭 男***
橋 本 良 作** 米 内 山 誠****

Stresses in a Rotating Disk with a Central and Noncentral Holes (Stress Analysis by The Finite Element Method)

by Katsutoshi MATSUSUE, Akio NAGAMATSU,
Ryosaku HASHIMOTO and Makoto YONAIYAMA

ABSTRACT

Stresses on peripheries of holes in a rotating disk with a central and noncentral holes are calculated by the finite element method in order to discuss the strength of the disk when the additional centrifugal force acts on the circumference of the disk.

As the results of the present calculations, followings are pointed out,

1. Figures of stress distribution in the disk are affected by the position, the diameter and the number of the noncentral holes as well as the centrifugal force on the circumference of the disk,
2. The optimum condition which gives the smallest value of the maximum stress at the disk periphery is decided by the proper selection of the position, the diameter and the number of the noncentral holes for a given disk, and
3. The minimum of the stress concentration factor at the hole periphery, which is attainable for a given disk, can well be estimated by introducing a length ratio (total hole diameter to the peripheral length of the circle along the centers of the holes).

1. まえがき

回転機械の高速化とともに、より軽量化が要求されるようになり、使用条件もいっそう厳しくなってきた。従来回転体の応力解析については、数多くの研究があり、本報で行なった偏心円孔をもつ円板の応力解析についても、偏心円孔1個をもつ円板とか、2～6個もつ円板²⁾～⁸⁾などの研究がある。しかしこれらの研究では、円孔

の個数、大きさ、回転中心からの距離(偏心量)などがそれぞれ一定の場合であり、しかも外周に負荷が無い場合に限られている。

そこで本報では、有限要素法を用いて、偏心円孔の大きさ、偏心量、個数および外周に一樣に分布する遠心負荷の大きさなどが、それぞれ異なる回転円板の弾性応力分布を計算した。その結果、これらパラメータを独立に変化させた場合、偏心円孔縁の最大応力はそれぞれのパラメータについて極値をとることが示された。そしてこの結果を用いて偏心円孔縁の応力を最低にするという条件のもとに、円孔の大きさ、個数などのパラメータの組合せを適当に選べること、そしてまた、これらパラメー

* 昭和49年7月19日 受付
** 原動機部
*** 東京工業大学
**** 都立航空工業高等専門学校(元原動機部)

夕間には互いに相関関係があつて、偏心円孔縁の応力分布に微妙な影響を及ぼすことなどを示した。また著者等が以前に行なつた光弾性実験結果との比較を行ない良く一致することを確認した。

なお本報は当所で試作しているジェットエンジンの翼車を対象とした研究であるが、タービンの場合は、高温ガスにさらされるため、本報で対象とする回転応力のほかに熱応力も受ける。したがつて、タービンディスクの強度を厳密に論ずるためには、両応力を検討しなければならないが、両者は重ね合せが可能なので、本報では回転応力についてのみ検討した。

2. 有限要素法による解析方法

回転する円板内部に、それ自身の遠心力により生ずる応力 $\{\sigma\}$ とひずみ $\{\epsilon\}$ (いずれも列ベクトル) との関係は、

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (1)$$

ただし $[D]$ は円板の材料定数により決定される応力・ひずみ関係マトリックスであり、次式で表わされる。

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

円板を微小要素に分割し、各要素の節点変位 $\{\delta\}$ と節点力 $\{F\}$ との関係を表わす要素の剛性マトリックスを $[k]$ とすると、

$$\{F\} = [k] \{\delta\} - \{F_0\} \quad (3)$$

ここで $\{F_0\}$ は、回転中の要素内各部に作用する遠心力を要素の各節点に作用する力に置き換えることによって作られる列ベクトルである。これに仮想仕事の原理を適用すると、これらの $[k]$ および $\{F_0\}$ は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} [k] &= \int [B]^T [D] [B] dV \\ \{F_0\} &= \int [N]^T \cdot \rho \omega^2 \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} dV \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで ρ は材料の密度、 ω は回転角速度、積分は要素全体に関する体積積分を表わす。

$[B]$ および $[N]$ は次式で示すように、それぞれ節点変位と要素内の任意点のひずみおよび変位との関係を表わすマトリックスである。

$$[B] = \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[N] = [N_i \quad N_j \quad N_m] \quad (6)$$

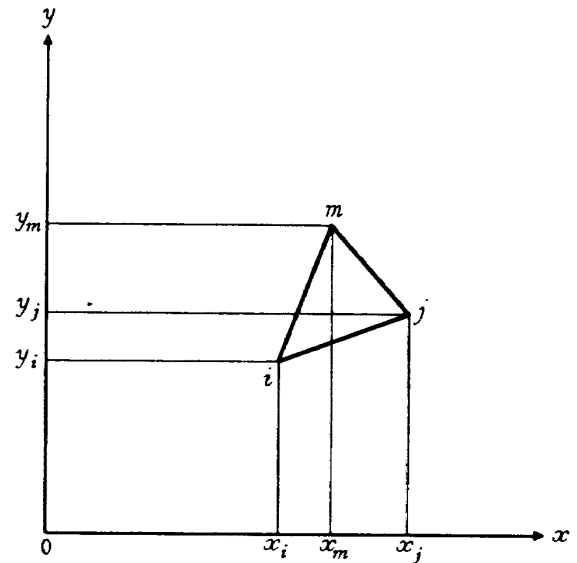


図1 有限要素法に使用した三角形要素

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ただし

$a_i = x_j y_m - x_m y_j$, $b_i = y_j - y_m$, $c_i = x_m - x_j$
 $[B]$, $[N]$ はいずれも場所 (x, y) (円板中心を原点とする) の関数である。

また(4)式の $\{F_0\}$ について説明する。

(5), (6)式を用いて(4)式を三角要素全面積にわたつて積分を行なうと次のようになる。

$$\{F_0\}^T = \{F_i, F_j, F_m\}, \quad \{F_i\} = \{F_{ix}, F_{iy}\} \quad (7)$$

ここで

$$\begin{aligned} F_{ix} &= \frac{\rho \omega^2 t}{2A} \iint (a_i + b_i x + c_i y) x dx dy \\ &= \frac{\rho \omega^2 t}{2A} (a_i J_1 + b_i J_2 + c_i J_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{iy} &= \frac{\rho \omega^2 t}{2A} \iint (a_i + b_i x + c_i y) y dx dy \\ &= \frac{\rho \omega^2 t}{2A} (a_i J_4 + b_i J_5 + c_i J_6) \end{aligned}$$

ただし

$$J_1 = \iint x dx dy, \quad J_2 = \iint x^2 dx dy, \quad J_3 = \iint xy dx dy$$

$$J_4 = \iint y dx dy, \quad J_5 = \iint y^2 dx dy$$

また $\{F_0\}^T$ に含まれる F_j , F_m の要素についても、同様の表示ができる。

ここで $J_1 \sim J_6$ は積分の結果次のようになる。

$$J_1 = \sum_{k=1}^3 (a_k c_k e_k / 2 + b_k c_k f_k / 3)$$

$$J_2 = \sum_{k=1}^3 (a_k c_k f_k / 3 + b_k c_k p_k / 4)$$

$$J_3 = -\sum_{k=1}^3 (a_k^2 e_k / 4 + a_k b_k f_k / 3 + b_k^2 P_k / 8)$$

$$J_4 = -\sum_{k=1}^3 \{ a_k^2 / (2C_k) + a_k b_k e_k / 2 + b_k^2 f_k / 6 \}$$

$$J_5 = \sum_{k=1}^3 \{ a_k^3 / (3C_k^2) + a_k^2 b_k e_k / (2C_k) + a_k b_k^2 f_k / (3C_k) + b_k^3 P_k / (12C_k) \}$$

ただし

$$e_i = (x_m^2 - y_j^2) / C_i^2, \quad f_i = (x_m^3 - x_j^3) / C_i^2,$$

$$P_i = (x_m^4 - x_j^4) / C_i^2$$

である。ここで d および t はそれぞれ三角形要素の面積および厚さである。また $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m)$ は三角形要素の節点座標を表わす。なお C_i が零となる要素については、上記諸定数のうち C_i を分母とする項を無視して計算を行えばよいことが他の定数との関係からわかる。

このようにして $\{k\}$ および $\{F_0\}$ を求め、これらを全要素について合成して系全体の節点変位を未知数とする連立方程式を作成し、これを解けば各節点の変位が求まる。各要素内の応力とひずみは、解いた節点変位から求められる。

$\{F_0\}$ については、このように仮想仕事の原理を使用して求める代わりに、要素内の遠心力を単純に三等分する方法もある。

以上の解析方法は、本研究で行なう一定厚さの有孔円板だけでなく、厚さの変化する円板、任意形状の切欠きを任意の場所に有する円板、あるいは円板の内外周など任意の場所に遠心負荷を受ける円板などの、回転による静的および動的弾性挙動、塑性挙動など広範囲の理論解析に適用することが可能である。

作成した計算プログラムの精度を検討する一例として偏心円孔の無い中空円板の一直径上の応力分布を計算した結果を図2に示す。厳密解と完全に一致していること

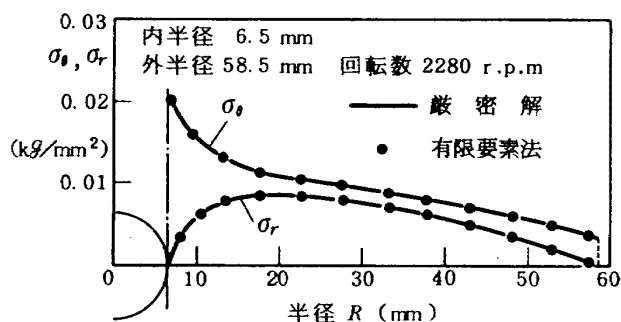


図2 中空円板の応力分布

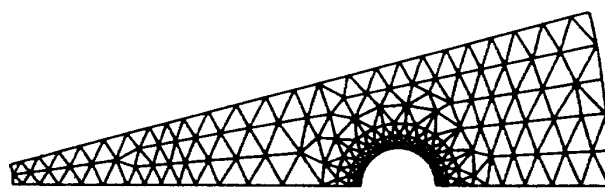


図3 計算に使用した三角形要素の分割例

要素数 300, 節点数 190
$R_0 = 40 \text{ mm}, R_1 = 6.5 \text{ mm}$
$R_2 = 58.5 \text{ mm}, d = 6.5 \text{ mm}$
$n = 12$

がわかる。図3は偏心円孔をもつ円板に使用した要素分割の一例である。図中 R_0, R_1, R_2, d, n はそれぞれ偏心円孔中心の円板中心からの距離、円板の内半径、外半径、偏心円孔の直径、偏心円孔の個数を表わす。図3に示すような要素分割によるHITAC5020を用いた計算時間は、1ケースあたり約2分であった。計算に使用した材料定数としては、光弾性結果と比較する場合は、エポキシの応力凍結時の定数 ($E = 1.56 \text{ kg/mm}^2, \nu = 0.5, \rho = 1.255 \times 10^{-11} \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{mm}^4$) を用い、その他の場合は軟鋼の定数 ($E = 21,000 \text{ kg/mm}^2, \nu = 0.3, \rho = 7.96 \times 10^{-11} \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{mm}^4$) を用いた。なお円孔縁応力の補正方法は附録に示す。

3. 結 果

前節で述べた解析方法によって、図4に示す偏心円孔をもつ回転円板の2次元応力計算を行なったが、主として偏心円孔縁の応力について説明する。

図5は光弾性実験⁹⁾の結果と本研究の計算結果について、偏心円孔の中心を通る直径上の円周方向応力 (σ_θ) および半径方向応力 (σ_r) の分布の一例を図示したもの

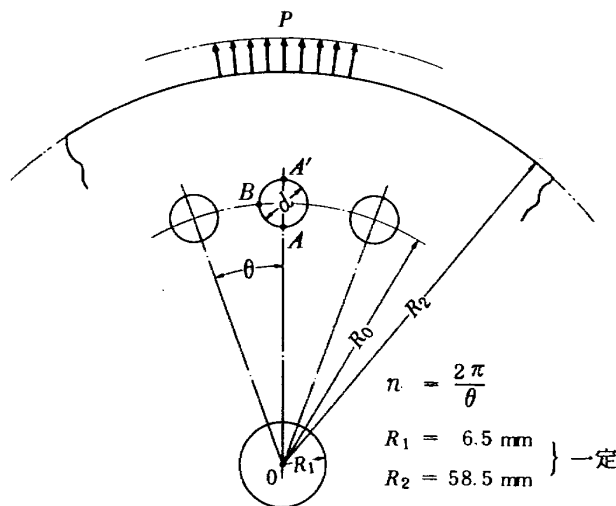


図4 多数の偏心円孔をもつ回転円板

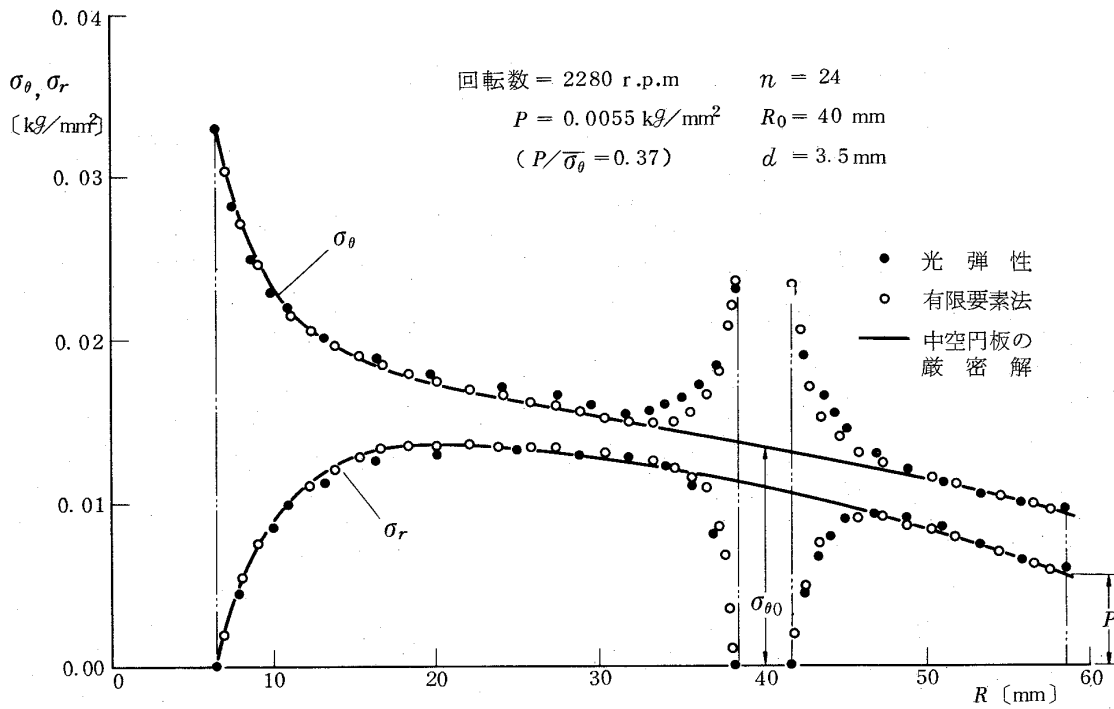


図5 偏心円孔の中心を通る半径上の応力分布

$[n=24, \frac{d}{R_2}=0.06, \frac{P}{\bar{\sigma}_\theta}=0]$
(回転数 20,000 r.p.m)

$[n=24, \frac{d}{R_2}=0.06, \frac{P}{\bar{\sigma}_\theta}=0.8]$
(回転数 20,000 r.p.m)

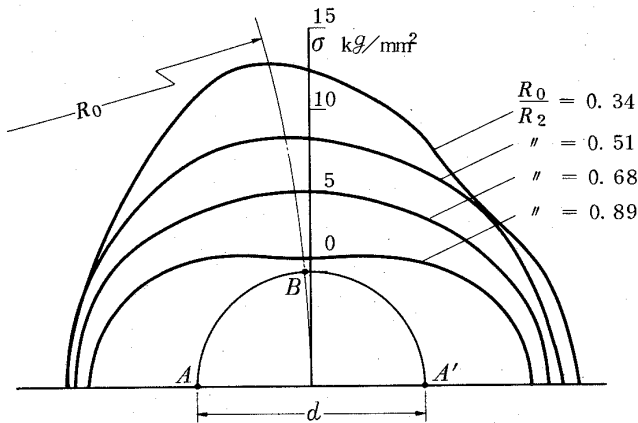


図6(a) 偏心円孔縁の主応力分布

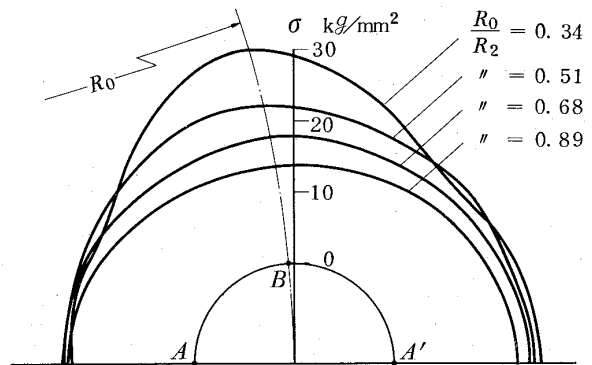


図6(b) 偏心円孔縁の主応力分布

である。両者は非常によく一致している。実線は中空円板の厳密解である。図中 $\sigma_{\theta 0}$ は偏心円孔の中心に相当する点の中空円板の円周方向の応力である。以後の図では、各応力の値をこの $\sigma_{\theta 0}$ との比で表わすことにする。したがって、この表示法によれば、偏心円孔縁の応力は一種の応力集中係数と見なすことができる。外周に作用する遠心荷重 P も無次元化するために、便宜的に次式で表わす中空円板の円周応力の平均値 $\bar{\sigma}_\theta$ との比で表わすことにする。

$$\bar{\sigma}_\theta = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_\theta dr / (R_2 - R_1) \quad (8)$$

図6(a), (b)は遠心荷重が零(a)および0.8(b)の場合につ

いて、円孔の無次元化した偏心量(R_0/R_2)が4種類異なる場合の円孔縁の周方向応力分布を示す。(a), (b)両図から円孔の偏心量および外周の遠心荷重の有無による分布状態の変化の様子がわかる。

3.1 円孔の偏心量による影響

図7は偏心円孔縁の三点の応力 $\sigma_A, \sigma_{A'}, \sigma_B$ (それぞれ図4のA, A', B点の円孔周方向の応力を表わす)の値が、偏心量 R_0/R_2 によって、どのように変化するかを調べた図である。ただし、偏心円孔の個数 n および直径 d はそれぞれ一定である。

偏心円孔が円板中心に近い場合は、三応力の大小関係は $\sigma_B > \sigma_{A'} > \sigma_A$ であるが、外周に近づくにしたがって、

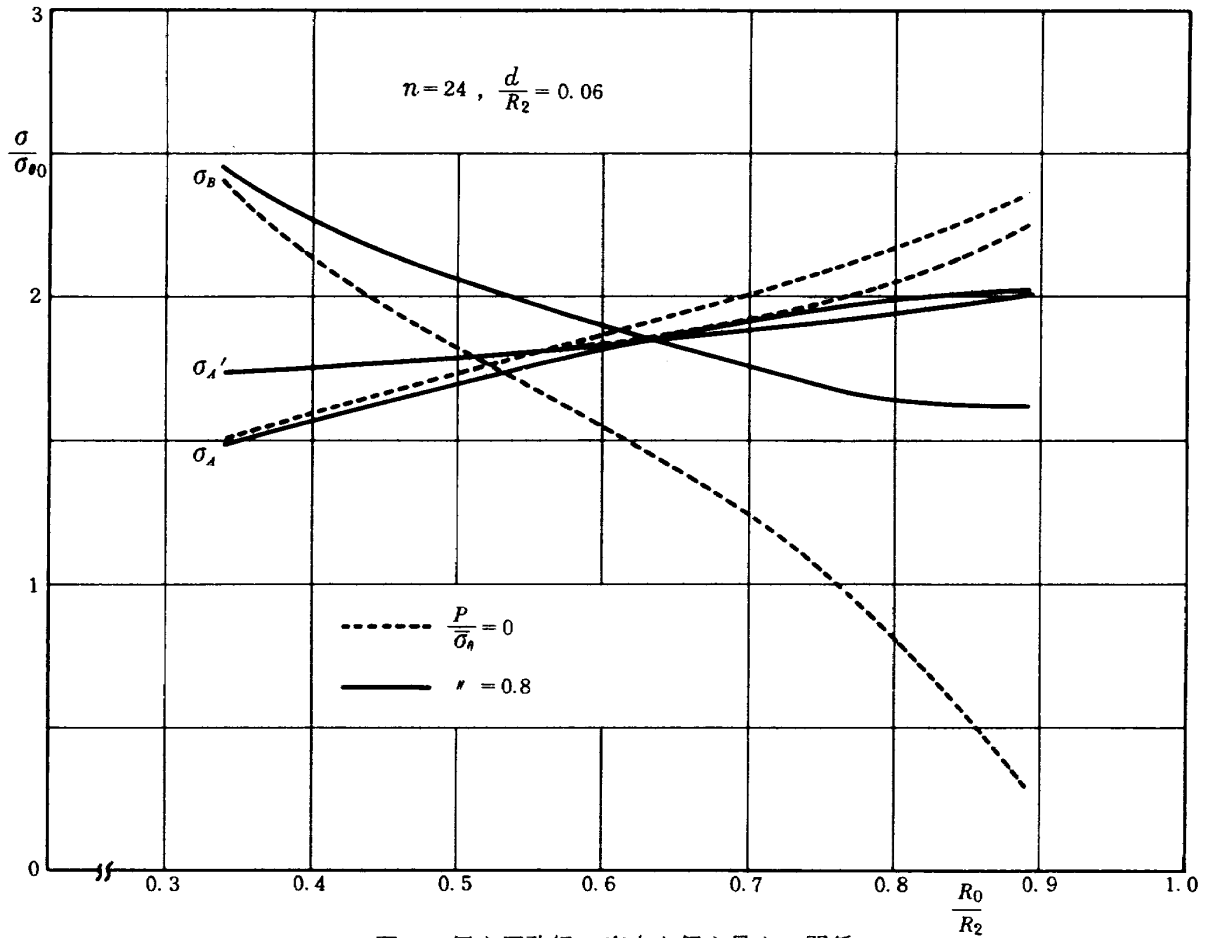


図7 偏心円孔縁の応力と偏心量との関係

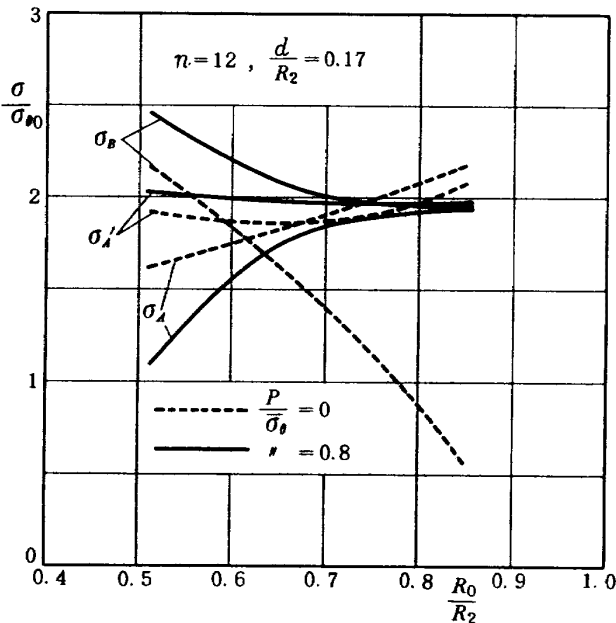


図8 偏心円孔縁の応力と偏心量との関係

σ_B は減少し、逆に σ_A, σ_A' は増加する。そしてある偏心量でその大きさが逆になって、外周に近い場合には $\sigma_B < \sigma_A' < \sigma_A$ になる。その中間に三応力が大体等しくなる偏心位置がある。この場合、円孔縁の周方向の応力はほぼ均一になる。外周に遠心負荷が作用しても、同様

の傾向を示すが、遠心負荷が無い場合に比較して、円孔の偏心量が大きい場合に三応力が等しくなる。ところで偏心円孔縁の最大応力のみに着目して、その変化を見れば、図7からわかるように、円孔の偏心量に対して極値をとることになり、そしてその極値を与える偏心量は円孔縁の周方向応力がほぼ均一になる場合である。また円孔の個数 n および大きさ d が異なる場合についても、図8に示すように、同様の変化をする。

3.2 偏心円孔の個数による影響

つぎに偏心円孔の直径 d および偏心量 R_0 をそれぞれ一定 ($R_0/R_2 = 0.68, d/R_2 = 0.06$) として、個数 n を増加させた場合は、図9に示すように、 $\sigma_A > \sigma_A' > \sigma_B$ から $\sigma_A < \sigma_A' < \sigma_B$ へと変化する。そして円孔縁の最大応力は、ある個数のとき極小値をもつ。また、直径 d が異なる場合 ($d/R_2 = 0.17$) にも、図10に示すように同様の傾向となる。しかしこのように d が大きい場合には三応力は急激に変化する。つまり円板に大きい偏心円孔を設ける場合は、その個数が重要な要素となることを意味している。また図9, 10からわかるように、外周に遠心負荷が作用すると、円孔縁の最大応力が極値をとる位置は左に移動する。

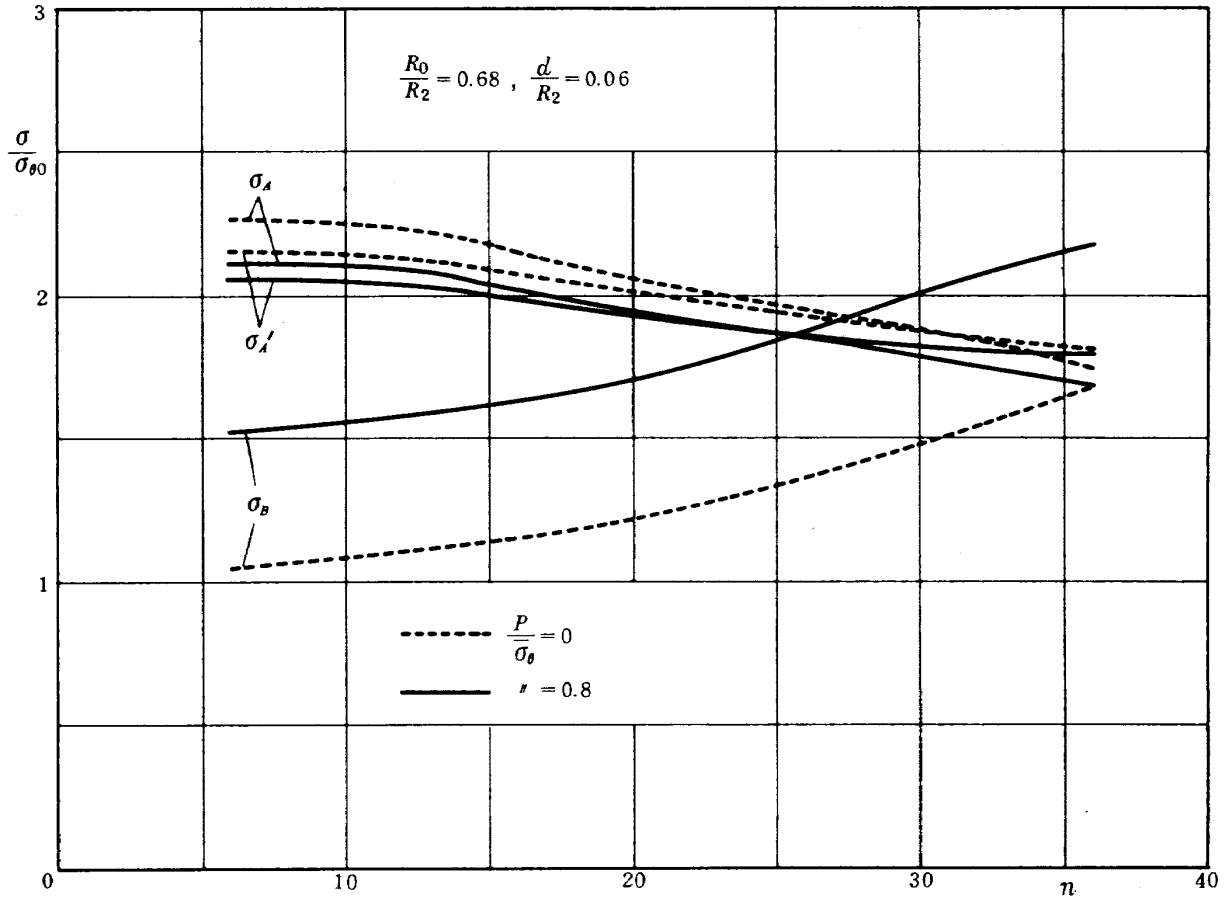


図9 偏心円孔縁の応力と個数との関係

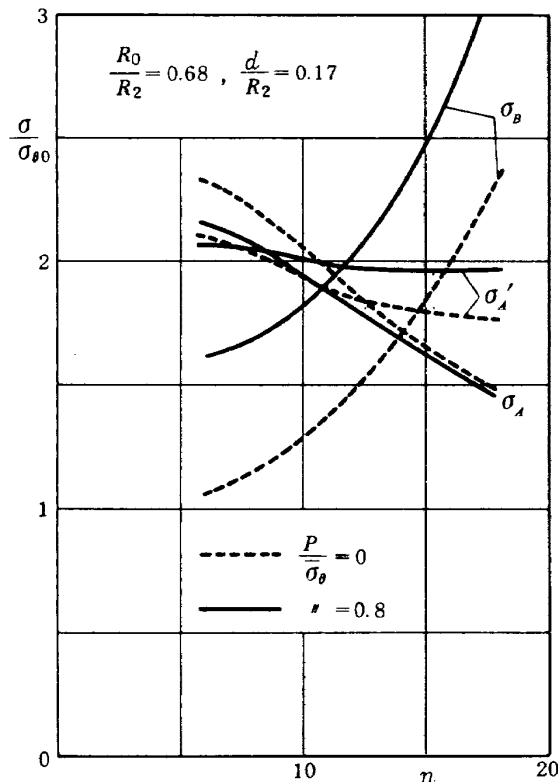


図10 偏心円孔縁の応力と個数との関係

3.3 偏心円孔の大きさによる影響

つきに偏心円孔の個数 n および偏心量 R_0 を一定として円孔の直径 d のみを変えた場合は、図 11 のように、 $\sigma_A, \sigma'_A, \sigma_B$ の大小関係は、 d の増加とともに $\sigma_A > \sigma'_A > \sigma_B$ から $\sigma_A < \sigma'_A < \sigma_B$ へと変化する。この変化は、図 9 に示した個数を変えた場合と同様な傾向である。そしてこの場合にも、遠心荷重の作用によって、円孔縁の最大応力が極値をとる点は左に移動する。すなわち小さい直径で極値をとる。

円孔数が少ない場合 ($n=12$) についても、図 12 のように同様となるが、最大応力が極値をとる直径は、 $n=24$ (図 11) の場合より大きい。図 12 で遠心荷重が零の場合には、最大応力は、円孔径 $d/R_2 = 0.2$ までは減少しているが、この場合 d/R_2 がもっと大きくなれば当然上昇することが予想される。遠心荷重の影響は図 11 の場合と同様である。

3.4 外周に作用する遠心荷重の影響

これまで外周に作用する遠心荷重の影響についても若干説明してきたが、これらをさらに詳細に検討するために、偏心円孔の個数、偏心量および直径をそれぞれ一定として、遠心荷重の大きさのみ変えた場合の円孔縁の

三点の応力 σ_A , σ'_A , σ_B の変化について検討する。図 13 (a), (b), (c) は、それぞれ偏心円孔の直径が異なる場合の図である。この図からわかるように、遠心負荷の増加とともに σ_B は明らかに増加し、 σ_A は若干減少、 σ'_A は d が大きい場合 ($d/R_2 = 0.11$) には若干増加である。つまり外用に作用する遠心負荷は σ_B に対する影響が最も大きいといえる。

円孔縁の最大応力についてのみ検討すると、図 13 (d) に示すように、 d/R_2 の値によってかなり顕著な差がある。個数 $n=12$ の場合についても、図 14 (a), (b), (c), (d) に示すように同様な傾向となる。

つきに円孔数および直径を一定として、偏心量が異なる場合には、図 15 (a), (b) に示すように、円孔が円板の中心寄りである場合 ($R_0/R_2 = 0.51$) 最大応力は、遠心

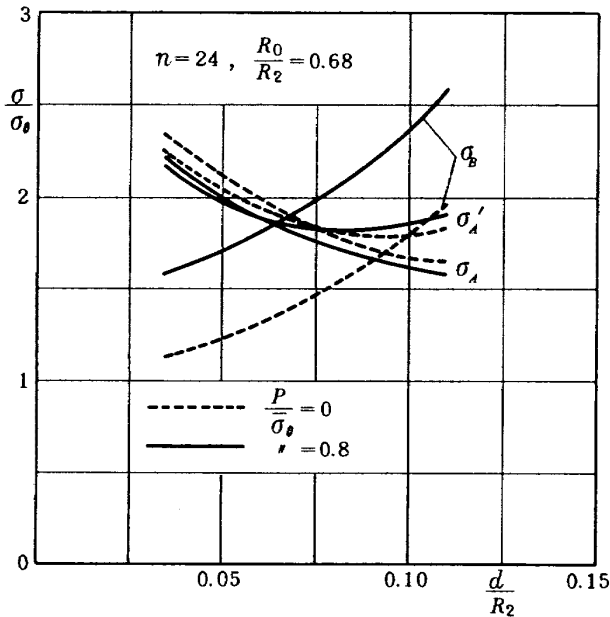


図 11 偏心円孔縁の応力と円孔直径との関係

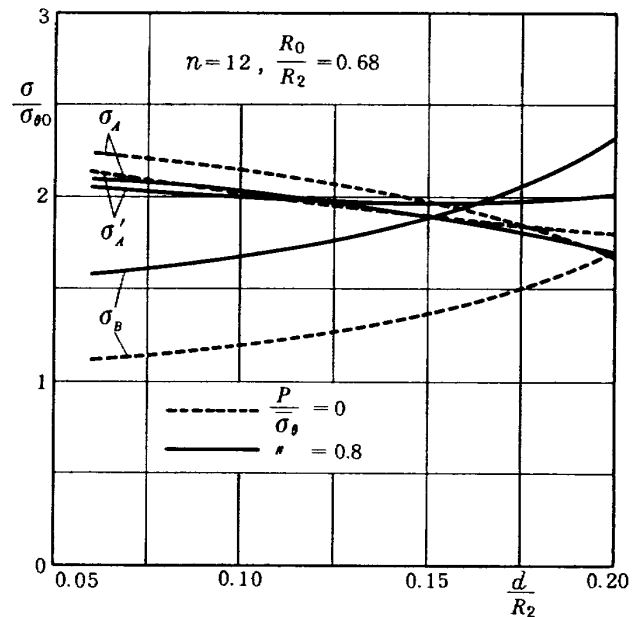


図 12 偏心円孔縁の応力と円孔直径との関係

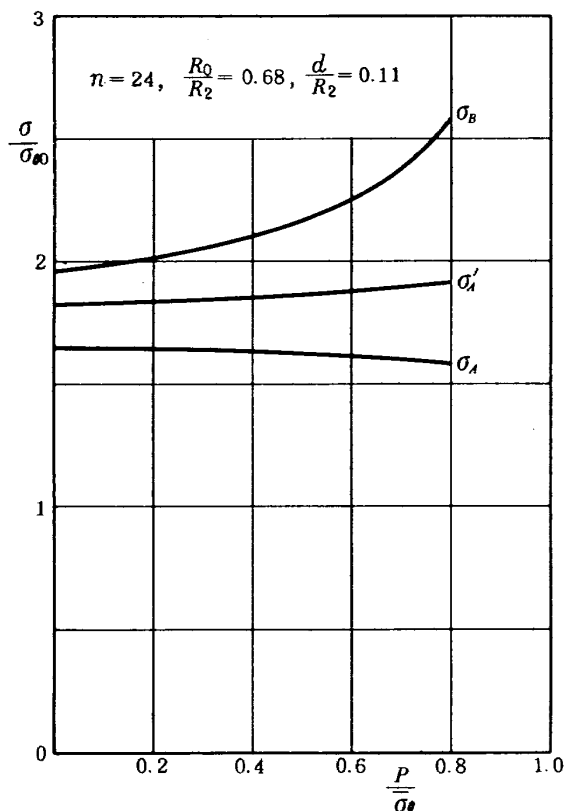


図 13 (a) 偏心円孔縁の応力と遠心負荷との関係

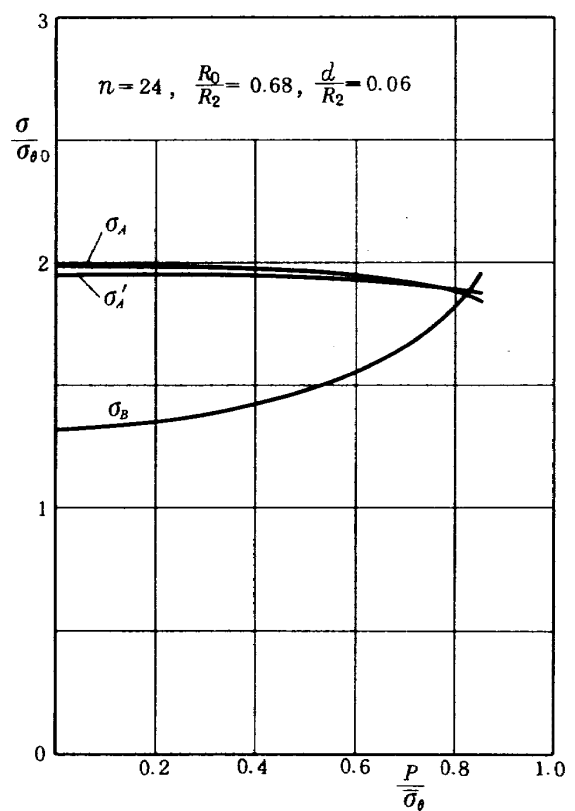


図 13 (b) 偏心円孔縁の応力と遠心負荷との関係

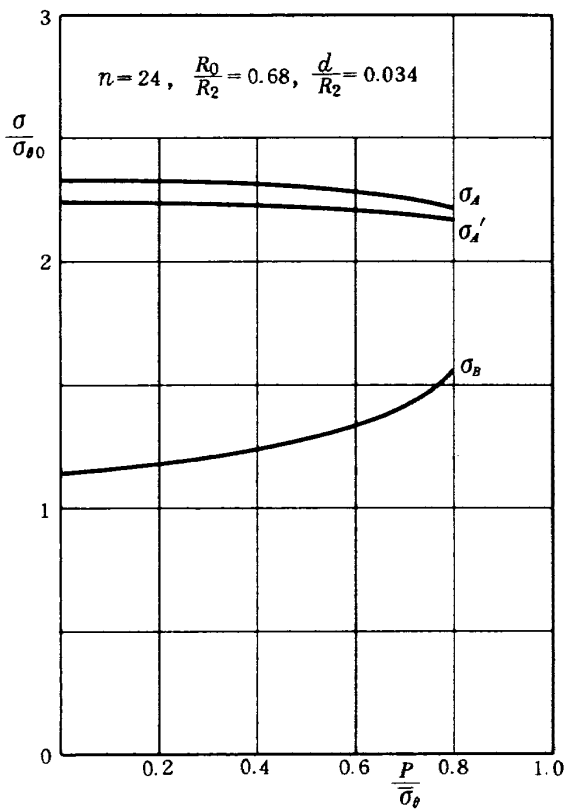


図 13(c) 偏心円孔縁の応力と遠心負荷との関係

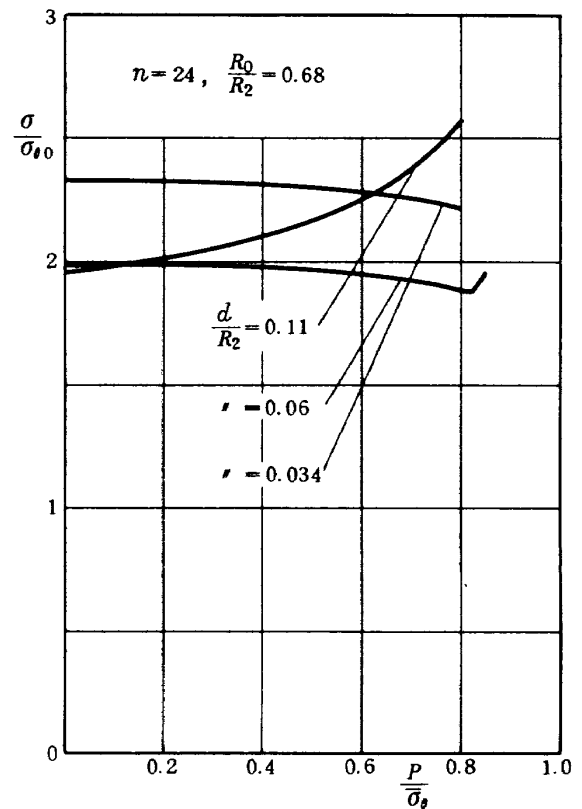


図 13(d) 偏心円孔縁の最大応力と遠心負荷との関係

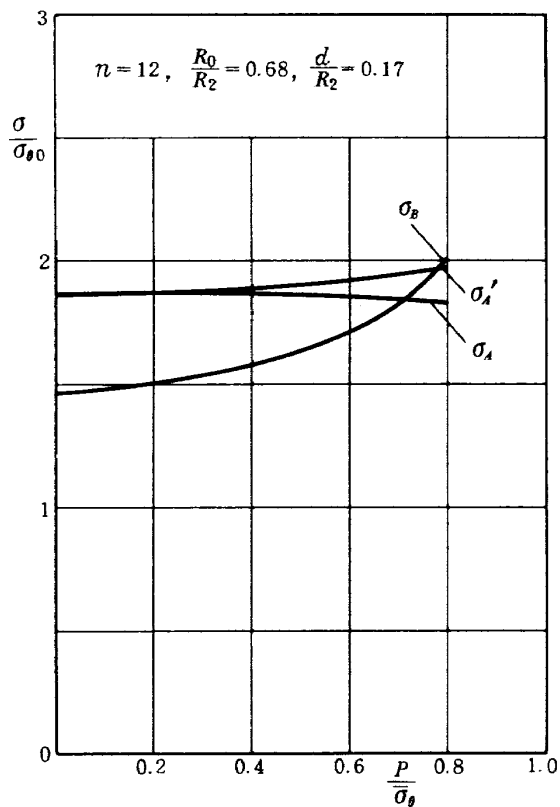


図 14(a) 偏心円孔縁の応力と遠心負荷との関係

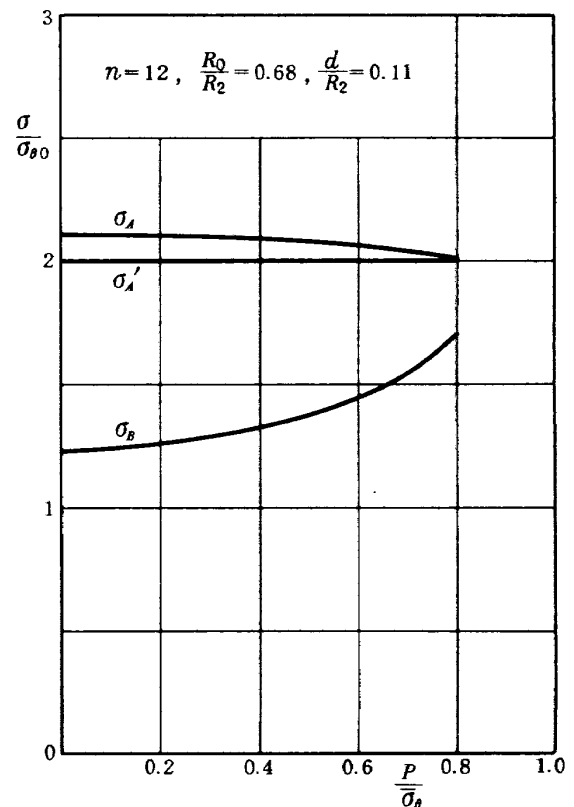


図 14(b) 偏心円孔縁の応力と遠心負荷との関係

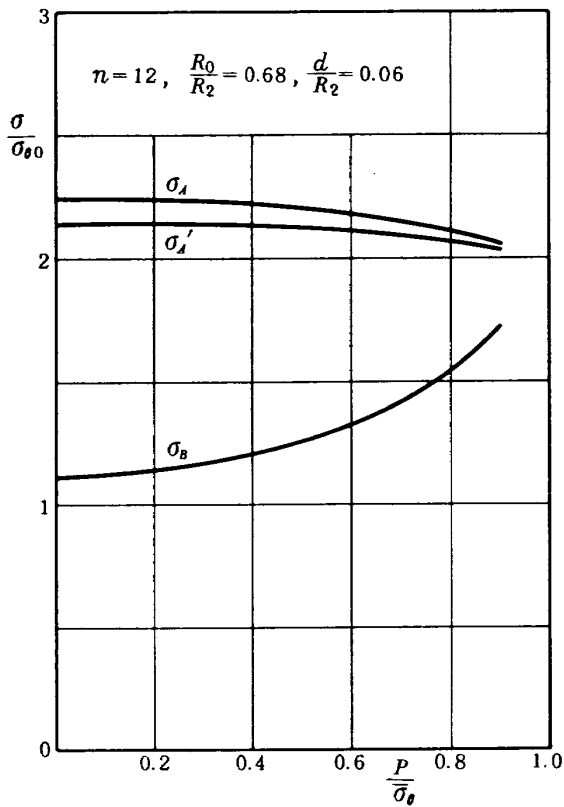


図 14 (c) 偏心円孔縁の応力と遠心負荷との関係

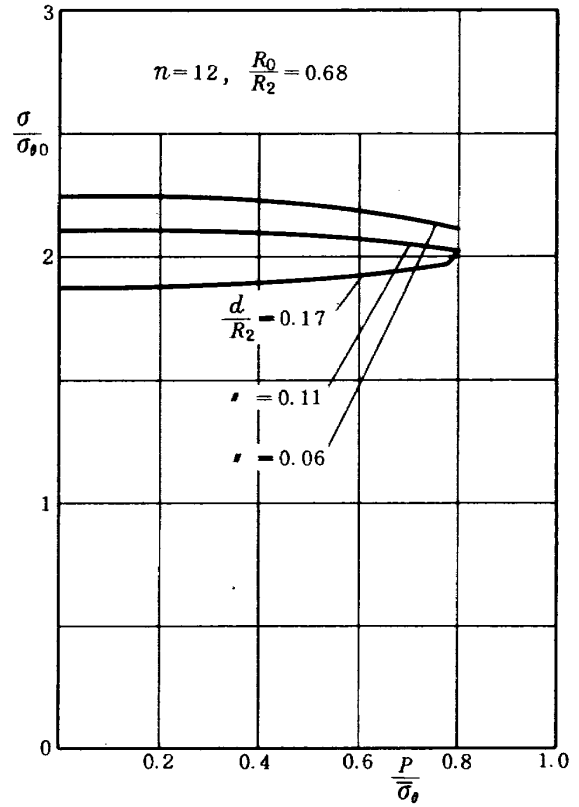


図 14 (d) 偏心円孔縁の最大応力と遠心負荷との関係

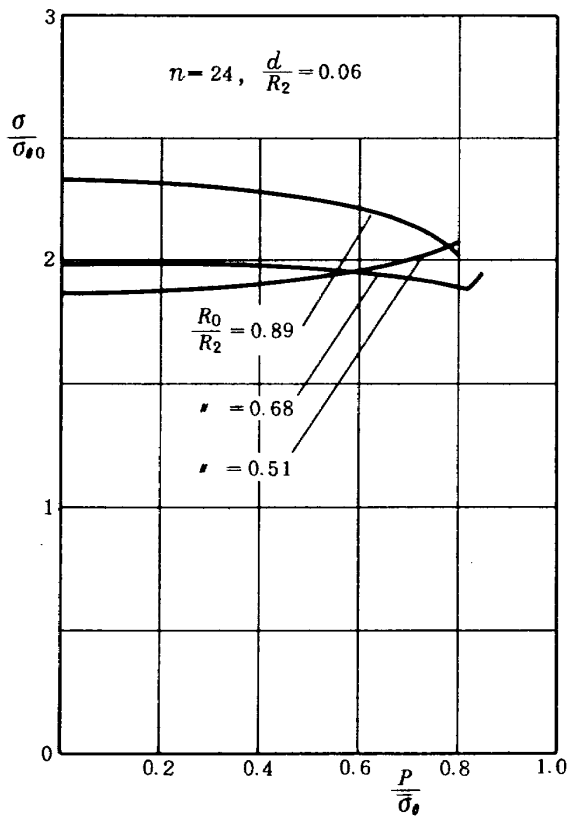


図 15 (a) 偏心円孔縁の最大応力と遠心負荷との関係

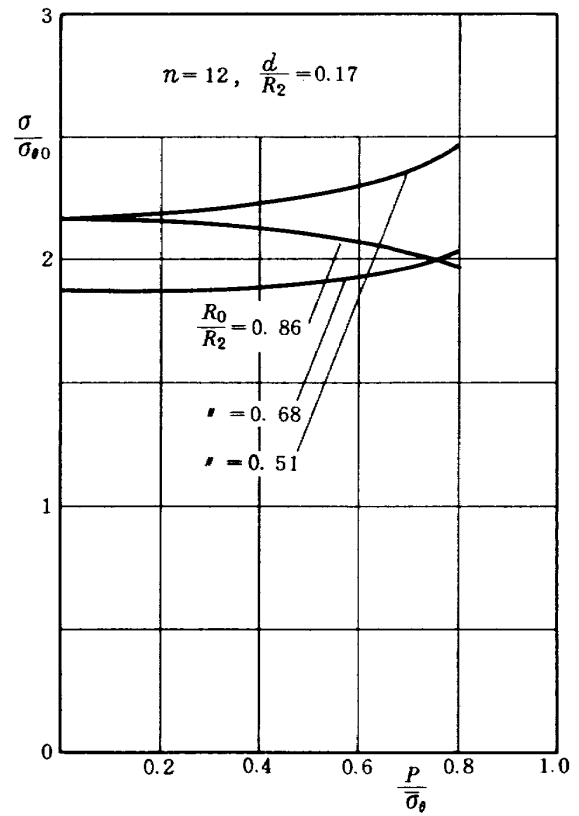


図 15 (b) 偏心円孔縁の最大応力と遠心負荷との関係

負荷の増加とともに増加し、外周寄りにある場合 ($R_0/R_2 = 0.89$) は逆に減少する。そして中間にある場合は、減少から増加へと変化する。この変化は円孔径が大きい場合 (図15 (b)) でも同様である。

偏心円孔の直径および偏心量が一定で、個数が異なる場合は、図 16 (a), (b) のように、個数が少ない場合 ($n = 12$) には、円孔縁の最大応力は、遠心負荷の増加とともに減少し、個数が多くなると、減少から増加へと変化する。また、円孔直径が大きくなっても、図 16 (b) のように同傾向になるが、その変化は顕著となる。

3.5 結果の考察

これまで、偏心円孔の個数、直径、偏心量および外周に作用する遠心負荷などのパラメータをそれぞれ独立に変えて、円孔縁の最大応力の変化を検討してきたが、これらパラメータ間には互いに相関関係があって、一つのパラメータの変化のみで応力集中の大小を論ずることはできない。しかし、各パラメータの変化を総括して、その影響を定性的に述べるとすれば、次のようになる。

円孔の個数あるいは偏心量などに関連して、円孔どししがかなり接近すると、隣接円孔に近い点 (B 点) で最大応力を示し、逆に離れると、円板の直径線上の点 (A または A' 点) の応力が最大となる。また外周の遠心負荷の作用は、B 点の応力を増大させ、A, A' 点の応力を減少させる効果があるので、最大応力が、A, A' 点で

生ずる場合は、遠心負荷の増加とともに減少し、B 点で生ずる場合は逆に増加する。

偏心円孔の直径が異なる場合についても、隣接円孔間の距離が、最大応力の大きさおよび生ずる点に重要な要素となる。以上のことは、応力比 ($\sigma/\sigma_{\theta 0}$) の変化について述べているのであって、 $\sigma_1, \sigma_1', \sigma_2$ の絶対値は遠心負荷の増加とともにいずれも増加する。

上述のように、隣接円孔間の距離が、円孔縁の最大応力を決定する重要な要素の一つになっていることが考えられるので、ここで円孔間の距離を表わす量として、 $(nd)/(2\pi R_0)$ の値を導入する。そしてこれまで述べてきたすべての図について、この値を横軸にとり、描きなおすと、図17 となる。この図は、異種要素による応力変化を、同一のグラフに図示したものであるが、定性的な最大応力の変化の様子をおおよそ知ることができる。例えば、遠心負荷が無い場合は、 $(nd)/(2\pi R_0) \approx 0.48$ にとれば、最大応力は 1.8 ~ 1.9 程度であり、遠心負荷が作用する場合は、 $(nd)/(2\pi R_0)$ の値がもっと小さくなるようにすれば、最大応力は 1.9 ~ 2.0 程度となる。

4. ま と め

外周に様に分布する遠心負荷を受けて回転する多数の偏心円孔を有する円板の強度を検討するために、偏心

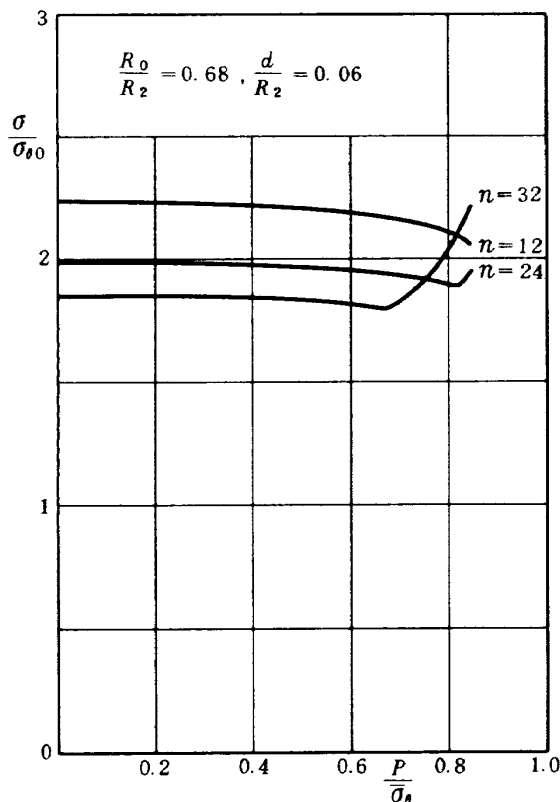


図 16 (a) 偏心円孔縁の最大応力と遠心負荷との関係

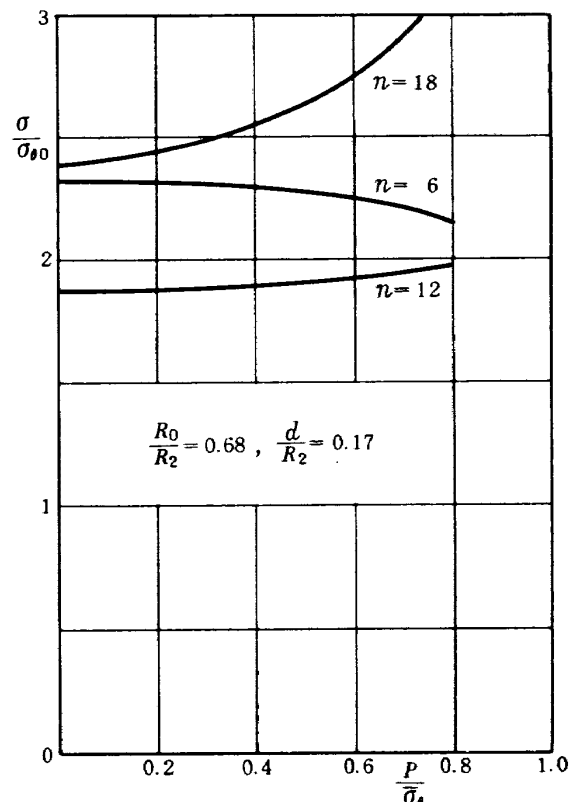


図 16 (b) 偏心円孔縁の最大応力と遠心負荷との関係

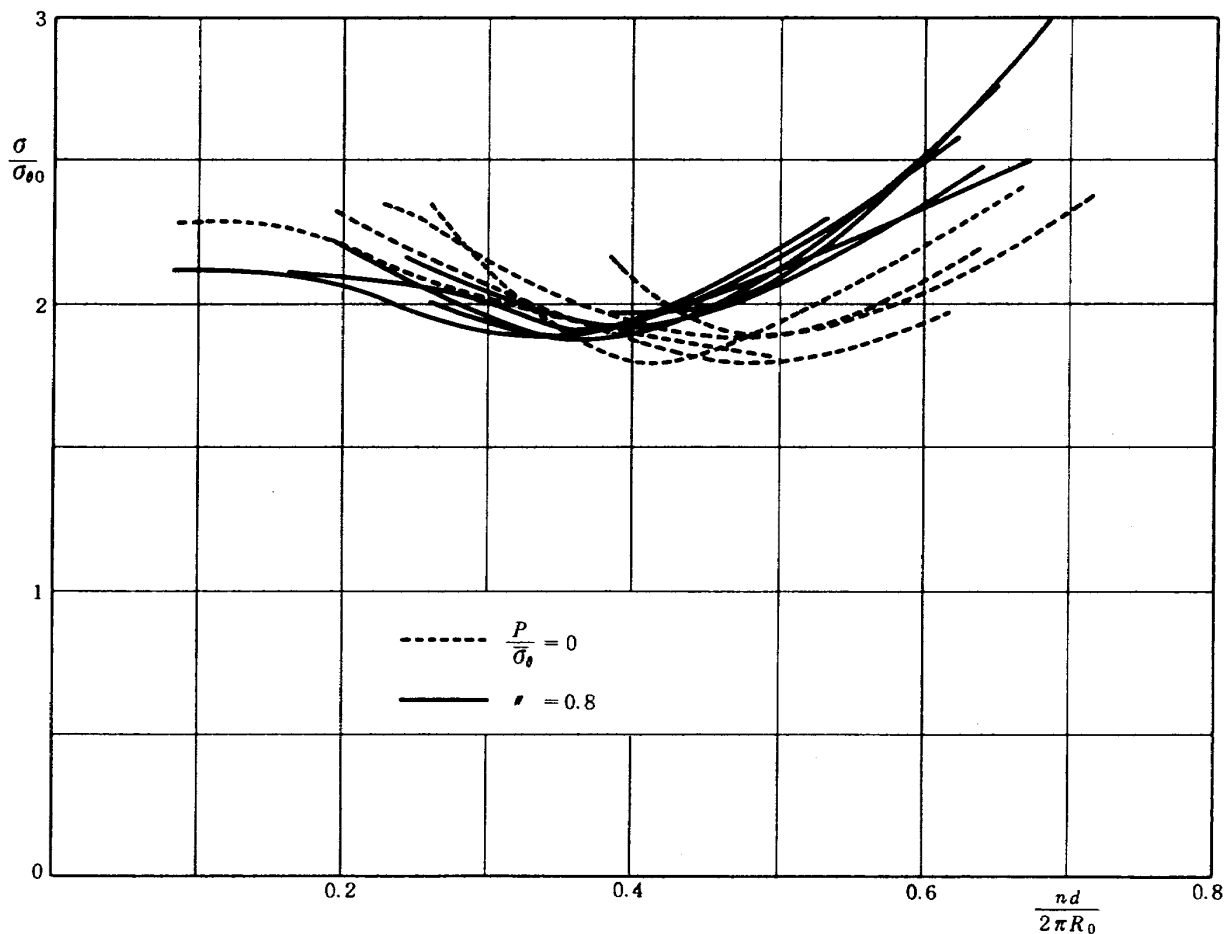


図17 偏心円孔縁の最大応力

円孔の個数，大きさおよび偏心量などが異なる円板の応力分布を有限要素法によって計算した。その結果，偏心円孔の個数，大きさ，偏心量などによって，円孔縁の応力は変化すること，さらに外周に遠心荷が作用すると，その変化の様子が異なってくることなどが明らかになった。以下にその結果を要約する。

- 1) 偏心円孔の円板中心からの偏心量を適当にとることによって，円孔縁の応力をかなり軽減することができる。
- 2) 偏心円孔の個数は1)に関連して円孔縁の応力を極小にする個数がある。
- 3) 偏心円孔の大きさも，1), 2)と相関関係があり，応力を緩和するためには，円孔の偏心量および個数に見合った大きさにとる必要がある。
- 4) 外周に作用する遠心荷の偏心円孔縁に及ぼす影響は，円孔縁の最大応力発生位置によって異なり，最大応力が円板の直径線上に生ずる場合は，その応力を減ずる作用をし，隣接円孔側に生ずる場合は，逆に増加する作用をする。特に円孔の直径が大きいとき，遠心荷の影響が大きくなる。
- 5) 偏心円孔の個数，偏心量，直径などの変化を，同

一の変化量として表示するために，円孔直径の合計（円孔の直径と個数の積）と，円孔中心を通る円周長さとの比を導入して，この比と最大応力との関係を図示した結果，円孔の個数，偏心量および直径などにほとんど無関係に，約1割のバラツキの範囲内で，円孔縁応力集中係数の最低値を推定することが可能となった。

なお，本報で使用した解析方法は，本研究で行なった一定厚さの有孔円板に限らず，厚さの変化する円板，任意形状の切欠きを任意の場所に有する円板，あるいは，円板の内外周など任意の場所に遠心荷を受ける円板の，回転による静的および動的挙動，など広範囲の理論解析に適用することが可能である。

終りに，本研究について始終御検討いただいた，当所原動機部の松木部長ならびに鳥崎室長に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) T. Udoguchi, Analysis of Centrifugal Stress in a Rotating Disc Containing an Eccentric Circular Hole, Japan Scien. Rev. Ser. 1, 1-1 (1949), pp. 53.
- 2) 斎藤秀雄，多数の偏心円孔を有する静止および回転

- 円板の応力分布について, 日本機械学会論文集,
Vol. 20, No. 95, 昭和29年, pp. 473
- 3) Ta-Cheng KU, Stress Concentration in a Rotating Disk with a Central Hole and Two Additional Symmetrically Located Holes, J. Appl. Mechanics. 1960, 6, pp. 359.
 - 4) M. Hetényi, The Application of Hardening Resins in Three-Dimensional Photoelasticity, J. Appl. Physics, Vol. 10, (1939), pp. 295.
 - 5) R.E. Newton, A Photoelastic Study of Stresses in Rotating Disks, J. Appl. Mechanics, Vol. 62, (1940), pp. 57.
 - 6) K.E. Barnhart, JR., A.L. Hale, and J.L. Meriam, Stress in Rotating Disks Due to Noncentral Holes, Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, Vol. 9 (1951), pp. 35.
 - 7) W.A. Green, G.T.J. Hooper and R. Hetherington, Stress Distribution in Rotating Discs with Non-Central Holes, Aeronautical Quarterly, Vol. 15, No. 5, (1964).
 - 8) 白鳥英亮, 偏心円孔のある軟鋼中空円板の回転試験, 日本機械学会講演会前刷No. 38, (1961.4), pp. 63
 - 9) 松末勝利, 米内山誠, 軸流圧縮機ディスクの強度に関する研究, 日本機械学会講演会(航空原動機)前刷, 昭和45年2月
 - 10) S. Timoshenko, and J.N-Goodier, Theory of Elasticity, 1951, pp. 80.

付 録

有限要素法による解は、要素分割をいくら細かくしても、境界上の値ではなく、若干内側の応力値となるので、境界上の応力を求めるには、何らかの補正をする必要がある。したがって、本報では既知の理論解を用いて、若干の近似を含む応力勾配を求め、その値から境界上の応力を補正する方法を試みた。

付図 1 に示すように、有孔無限板が二軸引張りを受ける場合、円孔縁の周方向の応力 $\sigma_{\theta A}$ 、 $\sigma_{\theta B}$ は応力集中の関係式から、次式で表わされる。

$$\sigma_{\theta A} = 3\sigma_1 - \sigma_2, \quad \sigma_{\theta B} = 3\sigma_2 - \sigma_1 \quad (A-1)$$

一方 σ_2 が零の場合、x 軸上の σ_{θ} は次式で表わされる¹⁰⁾

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_1}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \quad (A-2)$$

また σ_1 が零の場合、同じく σ_{θ} は次式となる。

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_2}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_2}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \quad (A-3)$$

したがって σ_1 、 σ_2 が同時に作用するとき、両式を重ね合せて

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \quad (A-4)$$

が得られる。(A-4) 式を r で微分すると

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{dr} = \left| \frac{a^2}{r^3} \left\{ (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{6a^2}{r^2} (\sigma_1 - \sigma_2) \right\} \right| \quad (A-5)$$

一方 (A-1) 式から

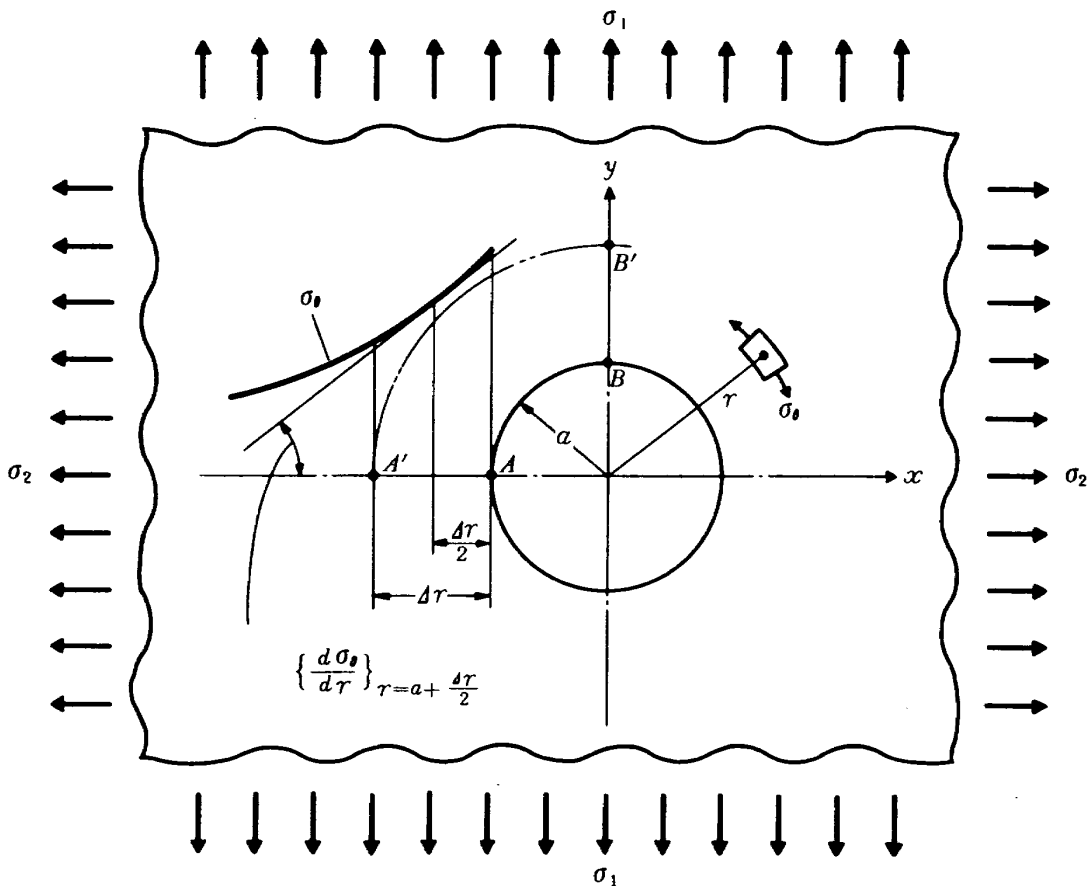
$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{\theta A} + \sigma_{\theta B}) \\ \sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{1}{4}(\sigma_{\theta A} - \sigma_{\theta B}) \end{aligned} \right\} \quad (A-6)$$

が得られる。(A-5) 式に (A-6) 式を代入すれば、 $\sigma_{\theta A}$ 、 $\sigma_{\theta B}$ を含む応力勾配の式が得られる。ここで $\sigma_{\theta A}$ 、 $\sigma_{\theta B}$ の代わりに有限要素法で求めた $\sigma_{\theta A}'$ 、 $\sigma_{\theta B}'$ を代入すると、近似的な応力勾配が計算できる。これを用いて補正量

$$\Delta\sigma_{\theta} = \left\{ \frac{d\sigma_{\theta}}{dr} \right\}_{r=a+\frac{\Delta r}{2}} \times \Delta r$$

を算出した。

なお、有孔無限板と本報の有孔円板とは、応力そのものは明らかに異なるけれども、円孔縁の応力勾配は両者大差無いものと考えた。ちなみに、 Δr は約 0.2 mm、 $\Delta\sigma_{\theta}/\sigma_{\theta}$ は平均 0.05 であった。



付図 1

航空宇宙技術研究所報告 390号

昭和49年10月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)
