

UDC 534.13:
624.074.4:
629.7.024.32

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-417

リング補強軸対称シェルの振動と座屈

小松敬治・戸田勸

1975年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

リング補強軸対称シェルの振動と座屈*

小松 敬治** 戸田 勸**

Vibration and Buckling Analysis of Ring-Stiffened Shells of Revolution

by Keiji KOMATSU and Susumu TODA

ABSTRACT

The vibration and buckling characteristics of cantilever truncated conical shells were studied using a finite element computer program for ring-stiffened shells of revolution.

For vibration modes having less than two circumferential waves, the frequencies decreased when the size of a support ring at the free end was increased, while, for modes with several circumferential waves, the frequencies initially increased rapidly when the ring size was increased and then became relatively insensitive to further increase in ring size.

It was also shown that conditions at the free end have pronounced effects on the buckling external pressure.

Results compare favorably with available experimental data.

1. まえがき

補強軸対称シェルは多くの分野で用いられており、これらの強度、振動特性を知ることは重要である。リングヤストリンガーで密に補強をされているシェルの場合には補強物の効果を軸方向あるいは円周方向に平均化して連続的に直交異方性体として取り扱って実用上十分である。しかし、補強物の取付間隔が変形波長に比べて同程度以上になった場合にはもはや補強物の効果を平均化して取り扱うことはできない。

特に近年、航空宇宙の分野では振動、座屈に対する配慮から突入体 (entry vehicle)、ロケットノズル等の自由端をリングで弾性支持した構造が見られるようになった。^{1)2)etc} このようなリングで弾性支持されたシェル構造の振動特性、座屈荷重等はリングの剛性や断面形状のある範囲まではそれらの大きさの変化に対して非常に敏感である。それゆえ構造の安全性、軽量化のために必要十分な補強効果を得られるリングの形状を知ることが必要となる。

このようなリング補強シェルの振動、座屈解析に対するものとしては差分法による SALORS³⁾、BOSOR⁴⁾、前進積分法による SRA⁵⁾等の構造解析プログラムがあり、選点法 (Collocation Method) による座屈解析⁶⁾等がある。

本研究は有限要素法によるリング補強シェルの構造解析プログラムを作成し、これによって片持ち載頭円錐シェルの振動及び座屈特性に対する自由端補強の効果を吟味することを目的とする。シェル要素としては面内変位、面外変位ともに三次の変位関数を仮定した 8 自由度の子午線方向にも曲率をもつ軸対称シェル要素を用い、リング要素としてはシェル要素と同じ節点変位をもつ断面形状が任意の要素を作成した。次にこの両要素を用いてリング補強シェルの振動特性を調べ、座屈に対しては座屈前変形を軸対称とした非軸対称の分岐座屈をしらべた。特に座屈計算では荷重増分法による非線形解析もおこなった。

2. 記号

u 変位

*昭和50年4月3日 受付

**機体第二部

- \mathbf{e} 歪 $\mathbf{e} = \mathbf{e} + \mathbf{e}_{II}$
- e 歪の線形項
- \mathbf{e}_{II} 歪の非線形項
- σ 応力
- β 角変化 式(9)
- f 物体力
- p 表面力
- δ 節点パラメーター (広義の節点変位)
- [N] 式(1) $\mathbf{u} = [N] \delta$ におけるマトリックス
- [B] 式(2) $\mathbf{e} = [B] \delta$ におけるマトリックス
- [D] 式(3) $\sigma = [D] \mathbf{e}$ におけるマトリックス
- [G] 式(4) $\beta = [G] \delta$ におけるマトリックス
- [K] 剛性マトリックス
- [M] 質量マトリックス
- [K_G] 幾何剛性マトリックス
- [A] 初期応力に関するマトリックス 式(10)
- (s, θ, Z) 図1に示す座標系
- (u, v, w) (s, θ, Z) 方向の変位
- R_1, R_2 主曲率半径
- β $\beta = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1}$
- n 円周方向波数
- ω 弾性体の固有角振動数
- α 図2に示す角度
- S_R, Z_R 図2に示すリングの偏心率
- $()^T$ 転置行列, 転置マトリックスを表わす
- $(\dot{\quad})$ 時間 t に関する微分を表わす
- $(\quad)_R$ リングに関係ある量であることを示す

3. 基礎方程式

まず, 次のような4つの関係式を定義しておく。

変位一節点パラメーター関係式 $\mathbf{u} = [N] \delta$ (1)

歪一節点パラメーター関係式 $\mathbf{e} = [B] \delta$ (2)

応力一歪関係式 $\sigma = [D] \mathbf{e}$ (3)

回転変位一節点パラメーター関係式 $\beta = [G] \delta$ (4)

これらの式の具体的な表現に関しては後述する。

振動問題と座屈問題に対する基礎方程式を同時に導くために増分理論を用いる。⁷⁾

微小時間 dt の間における任意の仮想変位を $\delta \mathbf{u}$ とすると, 時刻 t における仮想仕事方程式は

$$\int_V \sigma^T \delta \mathbf{e} dV - \int_V (f - \rho \ddot{\mathbf{u}})^T \delta \mathbf{u} dV - \int_S p^T \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (5)$$

となる。

ここに, f は物体力, p は表面力である。時刻 t にお

ける状態量を添字(0)で表わすと時刻 $t + dt$ における状態量は $\sigma^{(0)} + \sigma, \mathbf{e}^{(0)} + \mathbf{e}, \dots$ 等となる。時刻 $t + dt$ において式(5)は

$$\int_V [\sigma^T \delta \mathbf{e} + \sigma^{(0)T} \delta \mathbf{e}_{II} - (f - \rho \ddot{\mathbf{u}})^T \delta \mathbf{u}] dV - \int_S p^T \delta \mathbf{u} dS = \delta W \quad (6)$$

ここに

$$\delta W = \int_V (f^{(0)} - \rho \ddot{\mathbf{u}}^{(0)})^T \delta \mathbf{u} dV + \int_S p^{(0)T} \delta \mathbf{u} dS - \int_V \sigma^{(0)T} \delta \mathbf{e} dV$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e} + \mathbf{e}_{II}$$

δW は時刻 t における釣合方程式が計算誤差によって完全には満足されない場合の不釣合力が $\delta \mathbf{u}$ に対してなす仮想仕事である。また \mathbf{e} は有限変形理論の歪表示式で \mathbf{e} が線形部分, \mathbf{e}_{II} が非線形部分である。式(6)において $\sigma^T \delta \mathbf{e}$ に対して $\sigma^T \delta \mathbf{e}_{II}$ を微小量とみなして省略すると

$$\int_V \sigma^T \delta \mathbf{e} dV + \int_V \sigma^{(0)T} \delta \mathbf{e}_{II} dV + \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} dV = \int_V f^T \delta \mathbf{u} dV + \int_S p^T \delta \mathbf{u} dS + \delta W$$

となる。

上式に式(1), (2), (3), (4)を代入し, 共通項の δ^T を両辺より除くと

$$[M] \ddot{\delta} + ([K] + [K_G]) \delta = F \quad (7)$$

となる。

ここに, $[K] = \int [B]^T [D] [B] dV$ (8)

$$[M] = \int [N]^T \rho [N] dV \quad (9)$$

$$[K_G] = \int [G]^T [A] [G] dV \quad (10)$$

$$F = \int [N]^T f dV + [N]^T p dS + F_u \quad (11)$$

で, $[K], [M], [K_G]$ はそれぞれ剛性マトリックス, 質量マトリックス, 幾何剛性マトリックスで式(10)の中のマトリックス $[A]$ は初期応力 $\sigma^{(0)}$ に関するマトリックスである。また, 式(11)の中の F_u は前段階での計算誤差による不釣合力である。

いま, 弾性体が自由振動をすることとしてその角振動数を ω とすれば式(7)において $F = 0$ として

$$(-\omega^2 [M] + [K] + [K_G]) \delta = 0 \quad (12)$$

δ が非自明解をもつ条件より

$$|-\omega^2 [M] + [K] + [K_G]| = 0$$

この式は初期応力 $\sigma^{(0)}$ をもった弾性体の振動方程式である。初期応力がない場合には $\sigma^{(0)} = 0$ として

$$|-\omega^2 [M] + [K]| = 0$$

となる。

次に分岐座屈の場合には式(12)において角振動数 $\omega = 0$

として

$$([K] + [K_G]) \delta = 0$$

となる。

δ が非自明解をもつ条件から

$$|[K] + [K_G]| = 0 \tag{13}$$

となり振動の場合も座屈の場合も固有値問題となって統一的に取り扱うことができる。

4. 軸対称シェル要素

ここでは子午線方向にも曲率をもったシェル要素を用いる。座標系 (s, θ, Z) を図1のようにとり、円周方向

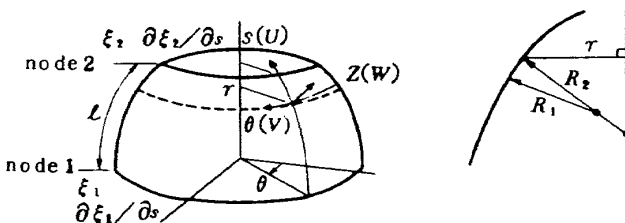


図1 シェル要素

波数を n とする。軸対称シェルの非軸対称問題を扱うときの一般的な方法として知られているように、シェルの中央面変位 u, v, w に対して次のような円周方向に正弦的な変化を仮定する。

$$\begin{aligned} u(s, \theta) &= u(s) \cos n\theta \\ v(s, \theta) &= v(s) \sin n\theta \\ w(s, \theta) &= w(s) \cos n\theta \end{aligned} \tag{14}$$

以下の議論では式(14)における $\sin n\theta, \cos n\theta$ を記述しないことにする。

まず、シェルの場合における式(1)(2)(3)(4)の具体的な表示を導く。節点パラメーターとしては図1の節点1, 2においてそれぞれ $u, \partial u / \partial s, v, \partial v / \partial s, w, \partial w / \partial s$ の6つを用いるので12自由度のシェル要素となる。以上より節点変位ベクトル δ は

$$\delta = (u_1, \partial u_1 / \partial s, v_1, \partial v_1 / \partial s, w_1, \partial w_1 / \partial s, u_2, \partial u_2 / \partial s, v_2, \partial v_2 / \partial s, w_2, \partial w_2 / \partial s)^T \tag{15}$$

要素内の任意点の変位 $u = (u, v, w)^T$ を節点パラメーター δ で表わせるように要素内の変位を適当な変位関数で仮定する。一般に軸対称シェル要素では $u(s)$ と $v(s)$ に s に対する一次式、 $w(s)$ に対して三次式を用いるが⁸⁾、ここでは $u(s), v(s)$ に対しても $w(s)$ と同じく三次式をとる。このような三次の変位関数は Adelman²¹⁾, Rao¹⁸⁾ 等が用いているがその理由としてシェルの振動、座屈波形に対して n が大きいときには w が支配的であるが、 n

が小さい場合には u, v も重要となってくることである。特に $n = 1$ の場合の振動波形では v は w とほとんど同じ大きさになる。もう一つの理由としては式(17)における歪表示式の右辺の各項をできるだけ s の同じ次数にして歪の表示の近似を合理化するためである。

仮定変位関数が同じであるので u, v, w を ξ で代表する。要素内の変位 $\xi(\eta)$ は節点での $\xi, \partial \xi / \partial s$ の値 $\xi_1, \partial \xi_1 / \partial s, \xi_2, \partial \xi_2 / \partial s$ によって式(16)のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \xi(\eta) &= (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3)\xi_1 + \ell(\eta - 2\eta^2 + \eta^3)\partial \xi_1 / \partial s \\ &\quad + (3\eta^2 - 2\eta^3)\xi_2 + \ell(-\eta^2 + \eta^3)\partial \xi_2 / \partial s \end{aligned} \tag{16}$$

ここに、 η は $\eta = s/\ell$ なる s の無次元化量である。式(16)をマトリックスの形でかけば式(1)に対応するエルミートの補間多項式を行列の要素とする変位-節点パラメーター表示式を得る。

次に歪-変位関係式として Sanders の理論⁹⁾ を用いると

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi^2) \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} u + \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2}(\phi_2^2 + \phi^2) \\ \gamma_{s\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} v \right] + \frac{1}{2} \phi_1 \phi_2 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \kappa_s &= \frac{\partial \phi_1}{\partial s} \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \phi_1 \\ \kappa_{s\theta} &= \frac{1}{2r} \left[r \frac{\partial \phi_2}{\partial s} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial r}{\partial s} \phi_2 + r \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \phi \right] \\ \phi_1 &= -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_1} \\ \phi_2 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{R_2} \\ \phi &= \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial r}{\partial s} v + r \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \tag{18}$$

ただし R_1, R_2 はそれぞれ s, θ 方向の主曲率半径、 r は図1に示した半径である。

式(17)の線形項に式(18)を代入すれば式(2)に対応する歪-節点パラメーター表示式を得る。

式(3)に対応するものにはフックの法則を用いる。

最後に式(4)に対応するものとして

$$\beta = (\phi_1, \phi_2, \phi)^T \tag{19}$$

とおけば、式(18)に式(19)を代入することにより式(4)に対応

する式が得られる。

以上の準備をしておき、 $[K]$, $[M]$, $[K_G]$ を求める。

(I) 剛性マトリックス： $[K]$

式(8)より

$$[K] = \pi h \int_s [B]^T [D] [B] r ds \quad (20)$$

(II) 質量マトリックス： $[M]$

式(9)より

$$[M] = \pi h \int_s [N]^T \rho [N] r ds \quad (21)$$

(III) 幾何剛性マトリックス： $[K_G]$

まず、式(7)の K_G に相当する部分の仮想仕事を考える
と式(18)を用いて

$$\begin{aligned} & \int_V \sigma^{(0)T} \delta e_{II} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\sigma_s^{(0)} \delta(\phi_1^2 + \phi^2) + \sigma_\theta^{(0)} \delta(\phi_2^2 + \phi^2)] dV \end{aligned}$$

となる。ここで、座屈前変形は軸対称である（従って $\tau_{s\theta}^{(0)} = 0$ ）と仮定している。上式を行列の形に書くと次式のようになる。

$$\int_s \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_s^{(0)} h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^{(0)} h & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_s^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}) h \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi \end{bmatrix} r ds d\theta$$

座屈前応力 $\sigma^{(0)}$ に関する上式の行列を A とおけば式(4)を用いて、

$$\int_s \beta^T [A] \delta \beta r ds d\theta = \delta^T \int_s [G]^T [A] [G] r ds d\theta \delta \delta$$

よって

$$[K_G] = \pi \int_s [G]^T [A] [G] r ds \quad (22)$$

以上で $[K]$, $[M]$, $[K_G]$ が式(20), (21), (22)の形にもとめられた。これらは $n \geq 1$ に対するもので $n = 0$ の場合、すなわち変形が軸対称の場合には θ に関する積分が2倍となる。

ここまで導いたシェル要素は u , $\partial u / \partial s$, v , $\partial v / \partial s$, w , $\partial w / \partial s$ を節点パラメーターとする12自由度の要素である。いま、 $\partial w / \partial s$ の代わりに角変化

$$\beta = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \quad (23)$$

を節点パラメーターとすると、剛性方程式は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

ただし、 $\delta = [u_1, v_1, w_1, \beta_1, u_2, v_2, w_2, \beta_2]$

$$\delta' = [\partial u_1 / \partial s, \partial v_1 / \partial s, \partial u_2 / \partial s, \partial v_2 / \partial s]$$

ここで δ に対応する節点力は s, θ, Z 方向の力, s 方向の曲げモーメントであるが、 δ' に対応する節点力は物理的に明確な意味をもたない。この δ' を δ で表わし⁽¹⁶⁾ 節点パラメーターとしては δ だけの 8×8 の剛性マトリックスをつくる。式(24)の下段より

$$\delta' = -[K_{22}]^{-1} [K_{21}] \delta \quad (25)$$

これを式(24)の上段に代入することにより

$$([K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}]) \delta = F$$

よって 12×12 のマトリックスを縮約した 8×8 の剛性マトリックスを新たに $[K]$ とすると

$$[K] = [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] \quad (26)$$

同様に質量マトリックス、幾何剛性マトリックスも式(25)を用いて次のようになる。

$$[M] = [M_{11}] - [M_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] \quad (27)$$

$$[K_G] = [K_{G11}] - [K_{G12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] \quad (28)$$

5. リング要素

リング要素としては、面内力と曲げモーメントによる変形を考えた4自由度の要素を用いる。節点パラメーターとしてはシェル要素との結合を考え、リングとシェルとの接合点におけるシェルの変位 u , v , w と角変化 β の4つを用いることにする。

ここではリングを梁とみなす。リングの変位

u_R, v_R, w_R は Bernoulli-Euler の仮定より

$$u_R(s, \theta, Z) = u_R(0, \theta, Z)$$

$$v_R(s, \theta, Z) = v_R(0, \theta, Z) - s / r_R \frac{\partial u_R(0, \theta, Z)}{\partial \theta}$$

$$w_R(s, \theta, Z) = w_R(0, \theta, Z) - s \frac{\partial u_R(0, \theta, Z)}{\partial Z} \quad (29)$$

となる。ここに r_R は図2に示すリング接合点における半径である。

リングとシェルの変位の適合条件より

$$u_R(0, \theta, Z) = u - Z \frac{\partial w}{\partial s}$$

$$v_R(0, \theta, Z) = v + Z / r_R (v \cos \alpha - \frac{\partial w}{\partial \theta}) \quad (30)$$

$$w_R(0, \theta, Z) = w$$

ただし、 u, v, w はリング接合部におけるシェルの中央

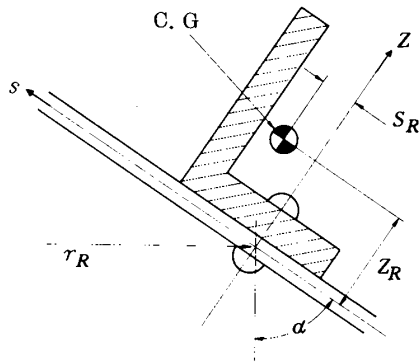


図2 リング要素

面変位であり、 α は図2に示す角度である。式(30)を(29)に代入して高次の微小量を省略すると

$$\begin{aligned} u_R(s, \theta, Z) &= u - Z \frac{\partial w}{\partial s} \\ v_R(s, \theta, Z) &= v + Z \left(-\frac{\partial w}{r_R \partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r_R} v \right) - \frac{s}{r_R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ w_R(s, \theta, Z) &= w + s \frac{\partial w}{\partial s} \end{aligned} \quad (31)$$

このリング要素では式(23)において R_1 を無限大と考えているので $\beta = \partial w / \partial s$ となる。

よって、式(7)に対応するリングの変位-節点パラメータ関係式が式(31)からただちに導かれる。

リングの歪-変位関係式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} (\varepsilon_\theta)_R &= \frac{1}{r_R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{r_R} u_R + \frac{\cos \alpha}{r_R} w_R \\ &\quad - \frac{1}{2} (\phi_{2R}^2 + \phi_R^2) \\ (\kappa_{s\theta})_R &= -\frac{2}{r_R} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{r_R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{3 \cos \alpha \sin \alpha}{2 r_R^2} \\ &\quad v - \frac{\cos \alpha}{2 r_R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\phi_{2R} = -\frac{1}{r_R} \frac{\partial w_R}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r_R} v_R \quad (33)$$

$$\phi_R = \frac{1}{2 r_R} \left[\sin \alpha v_R - \frac{\partial u_R}{\partial \theta} \right]$$

式(32)の振り $(\kappa_{s\theta})_R$ の歪表示式に関しては、シェルの表示式において $\partial v / \partial s = 0$ としたものをを用いた。

式(32), (33)に式(31)を代入して

$$\begin{aligned} (\varepsilon_\theta)_R &= \left[\frac{n}{r_R} v + \frac{w \cos \alpha + u \sin \alpha}{r_R} \right] \\ &\quad + Z \left[\frac{n^2}{r_R^2} w + \frac{n \cos \alpha}{r_R^2} v - \frac{\sin \alpha}{r_R} \beta \right] \\ &\quad + s \left[\frac{n^2}{r_R^2} u + \frac{\cos \alpha}{r_R} \beta \right] + \frac{1}{2} [\phi_{2R}^2 + \phi_R^2] \end{aligned} \quad (34.1)$$

$$\begin{aligned} (\kappa_{s\theta})_R &= \frac{2n}{r_R} \beta - \frac{n \sin \alpha}{r_R^2} w - \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{2 r_R^2} v \\ &\quad + \frac{n \cos \alpha}{2 r_R^2} u \end{aligned} \quad (34.2)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2R} &= \left[\frac{n}{r_R} w + \frac{\cos \alpha}{r_R} v \right] \\ &\quad + Z \left[\frac{n \cos \alpha}{r_R^2} w + \frac{\cos^2 \alpha}{r_R^2} v \right] \\ &\quad + s \left[\frac{n}{r_R} \beta + \frac{n \cos \alpha}{r_R^2} u \right] \end{aligned} \quad (35.1)$$

$$\begin{aligned} \phi_R &= \left[\frac{\sin \alpha}{2 r_R} v + \frac{n}{2 r_R} u \right] \\ &\quad + Z \left[\frac{n \sin \alpha}{2 r_R^2} w + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 r_R^2} v - \frac{n}{2 r_R} \beta \right] \\ &\quad + s \left[\frac{n \sin \alpha}{2 r_R^2} \right] \end{aligned} \quad (35.2)$$

線形化した式(34.1)と式(34.2)が式(2)に対応する歪-節点パラメータ関係式となり、式(35)が式(4)に対応する回転変位-節点パラメータ関係式となる。

リングの応力-歪関係式としては次式を用いる。

$$\begin{aligned} (\sigma_\theta)_R &= E_R (\varepsilon_\theta)_R \\ (\tau_{s\theta})_R &= (GJ)_R / A_0 (\kappa_{s\theta})_R \end{aligned} \quad (36)$$

ここに E_R はリングのヤング率、 $(GJ)_R$ はリングの振り剛性、 A_0 はリングの断面積である。

リングに関して式(1)~(4)に対応する関係式が導き出されたので、式(8)~(10)よりリング要素の剛性マトリックス、質量マトリックス、幾何剛性マトリックスが求められる。ここで式(8)~(10)における積分で、 s, s^2, Z, Z^2, sZ 等がかかった積分をおこなうことになるが、これらの積分は図2のリングの偏心率 S_R, Z_R 及び断面二次モーメント等で表わすことができる。このリング要素の剛性マトリックス、質量マトリックス、幾何剛性マトリックスを付録に示す。

6. 数値計算例

4と5で導いたシェル要素とリング要素を用いてロケットエンジンのノズル・スカート、突入体に関するものを中心に興味ある数値計算例を示す。4で導いた要素をS-12Aと名付けて、他の要素S-12, S-8との比較もおこなった。S-12というのは4での縮約をおこなわない前の12自由度要素、S-8というのは u, v の変位関数として式(16)において一次式をとったもので一般に用いられている8自由度要素⁸⁾である。なお、S-8, S-12等は便宜上つけた名称であり、一般的にそのように呼ばれているわけではない。

6.1 振動問題

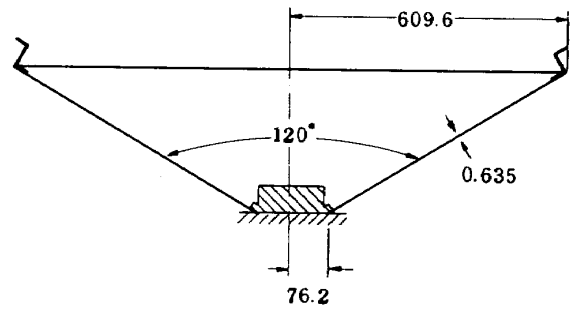
まず解の精度の検討のために円板の固有振動を計算したものを表 1 に示す。m は半径方向の振動次数, n は円

表 1 周辺固定円板の固有振動数

$$Z_{mn} = 2\pi f a^2 \sqrt{\rho/D}$$

m \ n	0	1	2	3
0	3.196 (3.196)	4.611 (4.611)	5.906 (5.906)	7.143 (7.143)
1	6.307 (6.306)	7.800 (7.799)	9.198 (9.197)	10.54 (10.54)
2	9.441 (9.440)	10.96 (10.96)	12.41 (12.40)	13.80 (13.80)
3	12.58 (12.58)	14.12 (14.11)	15.60 (15.60)	17.03

周方向波数, D は板の曲げ剛性, a は円板の半径であり, 振動数 f を無次元化して示した。表の上段の数値が有限要素法によるもので S-12A, S-12, S-8 のいずれの場合も要素分割が半径方向に 10 等分の場合で有効数字 4 桁の範囲では同じ値となる。下段の括弧内の数値が厳密理論解¹⁷⁾であり, 両者は非常に良く一致していることがわかる。



$$r = 76.2 + \sqrt{3}/2 s \quad E = 69000 \text{ N/mm}^2$$

$$1/R_1 = 0 \quad \nu = 0.315$$

$$1/R_2 = \frac{1}{152.4 + \sqrt{3}s} \quad \rho = 0.27 \times 10^{-8} \text{ N sec}^2/\text{mm}^4$$

図 3 120° 円錐シェル

次に図 3 のような Z 型リングを自由端につけた頂角 120° の片持ち載頭円錐シェルを解析する。このような形状のシェルは突入体等にみられる。まず, リングをつけない場合の固有振動数を表 2 に示す。有限要素法ではいずれも母線方向に 10 等分割であるが S-12A, S-12 は S-8 よりも振動数の低い部分 (n = 3~6) で収束がよい。S-12A あるいは S-12 を用いた場合, ほとんど同精度の数値が得られるが, S-12A の方は 8 自由度で計算時間が少ないこと, 物理的に不明確な $\partial u/\partial s, \partial v/\partial s$ のパラメーターをもたないということで S-12 より

表 2 120° 円錐シェルの振動数 (Hz) (m = 1)

n	有 限 要 素 法			差 分 法 ¹⁵⁾	実 験 値 ¹⁰⁾
	S-12A	S-12	S-8		
0	513.3	513.3	514.3		
1	96.9	96.9	97.4	95.7	
2	42.9	42.9	43.7	41.8	43.8
3	24.0	24.0	25.8	23.4	25.4
4	18.6	18.6	20.4	18.4	19.6
5	21.1	21.1	22.3	21.1	21.0
6	26.9	26.9	27.5	26.9	26.7
7	33.6	33.6	33.7	33.6	33.1 33.7
8	41.0	41.0	41.1	41.0	40.6 41.3
9	49.2	49.2	49.8	49.2	47.9 49.3
10	58.1	58.1	58.6	58.1	57.8 58.5

も優れているといえる。このS-12Aを用いて計算したZ型リング(図4)をつけた場合の振動数~円周方向波数関係図を図5に示す。またこのときの w の振動モードを図6に示す。図6において実線がリングをつけたときのモード、点線はリングをつけないときのモードである。要素の分割は振動モードをなめらかにするために20分割した。解析結果はSewall等の実験値¹⁰⁾と良く一致している。 m は母線方向の振動次数である。 n が大きい場合にはリングを付けることにより振動数は大きく上がっている。

しかし、 n が小さい場合には $m=1, m=2$ の両方もリングを付けることによりかえって振動数が下がって

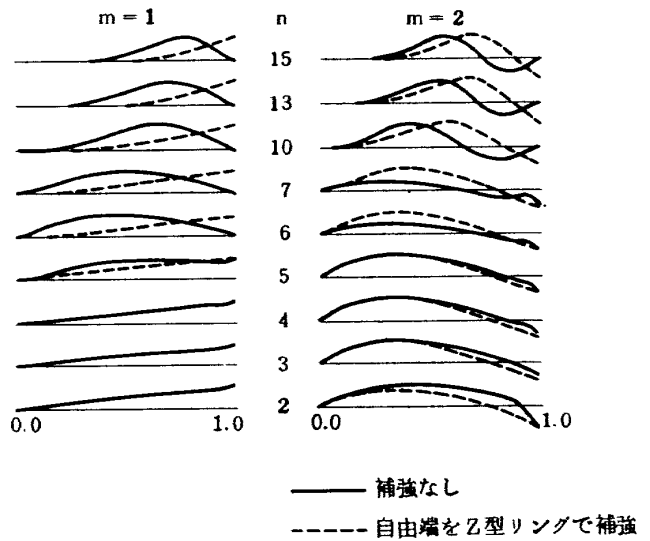


図6 120°円錐シェルの振動モード

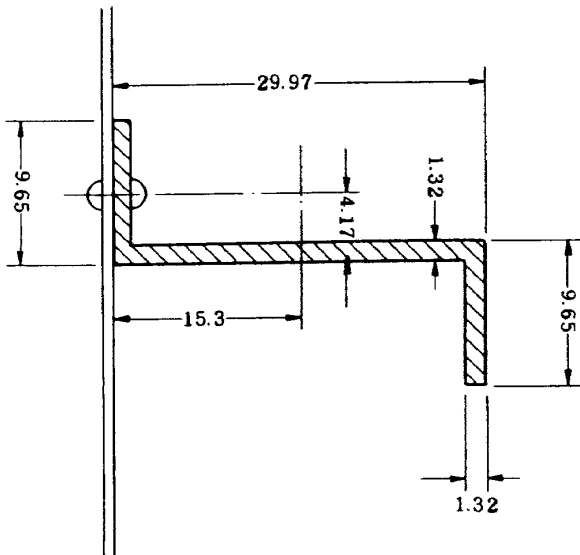


図4 リング詳細図(単位はmm)

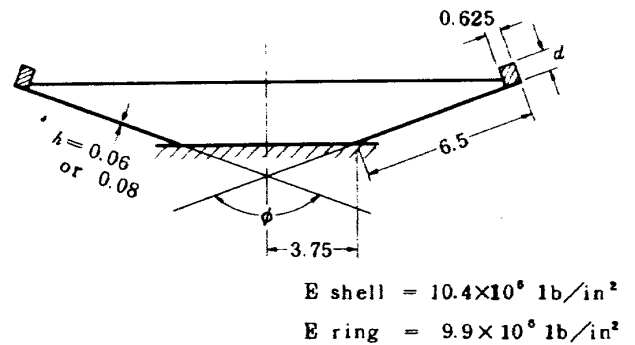


図7 矩形リングを付けた円錐シェル(単位 inch)

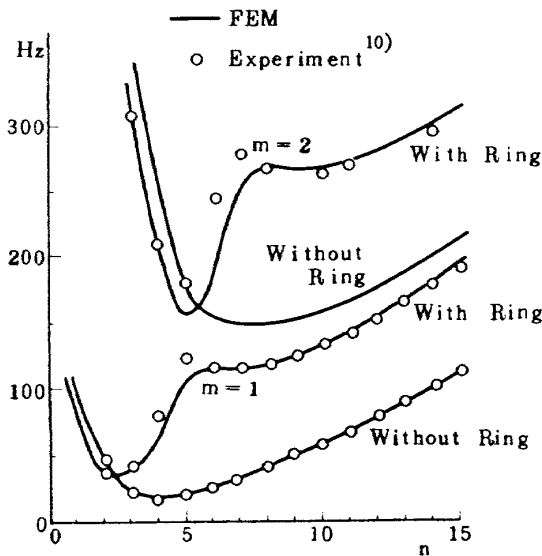


図5 リングをつけた120°円錐シェルの振動数

いる。次にこのような形状のシェルの振動特性におよぼす自由端補強リングの影響を詳細に調べる。まず、リングの大きさを種々に変化させてみる。図7のような円錐シェルを考えリングの深さ d を変えた振動数曲線を図8に示す。図中の括弧の中の番号は

- (1) $d = 0.0$ (リングなし)
- (2) $d = 0.125$ inch
- (3) $d = 0.250$ inch
- (4) $d = 0.375$ inch
- (5) $d = 0.500$ inch
- (6) $d = 0.750$ inch
- (7) $d = 1.000$ inch
- (8) 両端固定支持(リングなし)

である。数値計算はS-12Aの要素を使用し、母線方向に10等分割で頂角 ϕ が各々140°, 100°, 及び0°の場合についておこなった。頂角 ϕ が140°の場合についてはMiserentino等の実験値¹¹⁾があるのでリング寸法が(5)の場合を図9に示す。点線が本解析で丸印は実験値

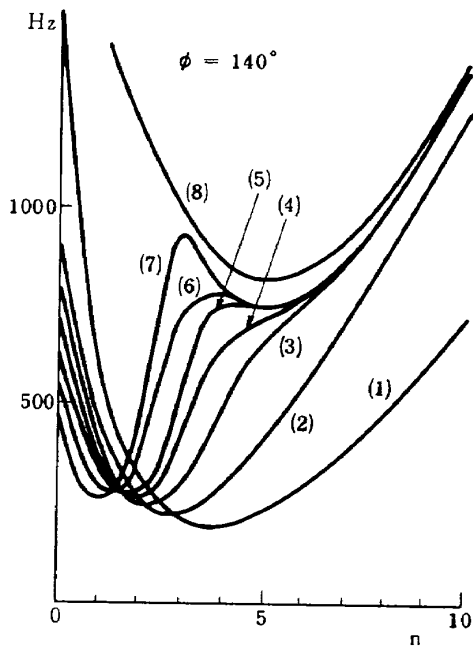


図 8 (1) 矩形リング補強載頭円錐シェルの固有振動数 $\phi = 140^\circ$

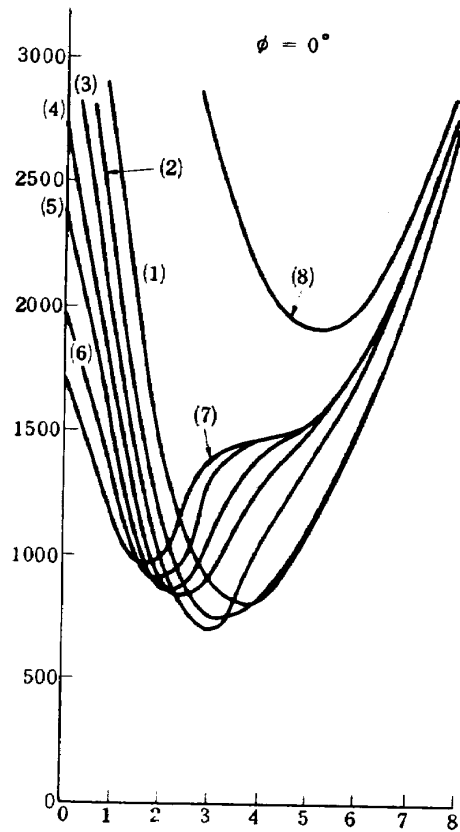


図 8 (3) $\phi = 0^\circ$

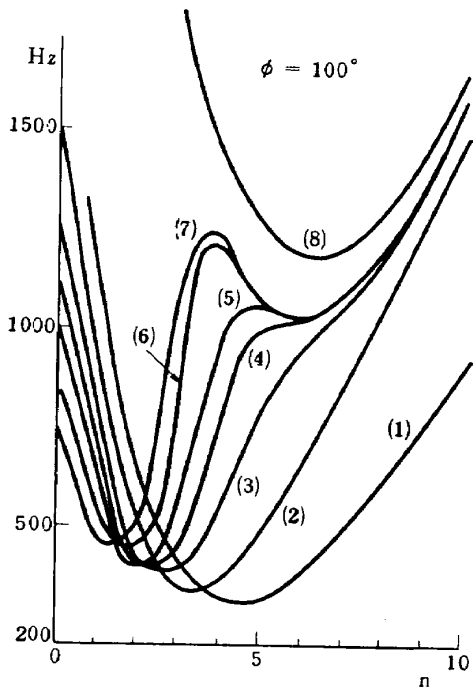


図 8 (2) $\phi = 100^\circ$

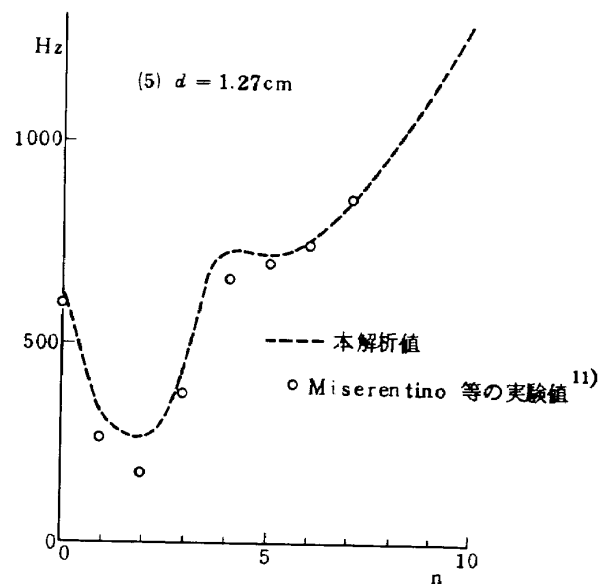


図 9 140° 円錐シェルの振動数

である。 n が大きい場合にはリングを大きくしていくと固定支持の条件に近くなっていくが n が小さいときはリングを大きくしていくに従って振動数は下がってくる。 $\phi = 0^\circ$ の円筒シェルの場合、 $n = 1$ の横揺れ振動は原子力容器などの耐震設計に関連して重要であることが指摘されている。自由端にリングや円板で補強をした場合、 $n = 1$ のときには補強効果(振動数を上げる効果)はな

く、補強物の質量の影響が大きくなり、振動数が下がることが解析的にも説明できる。¹²⁾

6.2 座屈問題

まず、リングを付けない場合の例題として図10のような球殻の引張座屈の座屈荷重値を表3に示す。ここで注目されるのは Navaratna らの有限要素法による解析結果¹³⁾と S-12A, S-8との解析結果が2倍近く違うこ

表3 球殻の引張座屈値 ($P/Eh \times 10^4$)

n	有限要素法					Galerkin法 ¹⁴⁾	実験値 ¹⁴⁾
	S-12A		S-8	Navaratna etc ¹³⁾	Rao etc ¹⁸⁾		
	曲げ理論	薄膜理論	曲げ理論	曲げ理論	曲げ理論	薄膜理論	
36	13.2	14.5	13.3				
37	13.1	14.3	13.2				
38	13.0	14.3	13.2	7.00	13.074		
39	12.93	14.12	13.13	6.88	13.024		6.15
40	12.94	14.14	13.10	6.93	13.009	13.49	
41	13.0	14.3	13.2		13.028		
42	13.1	14.4	13.2				
43	13.3	14.5	13.4				

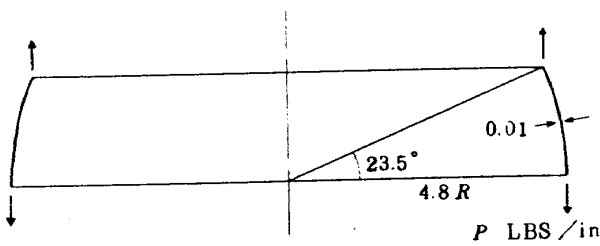


図10 引張力を受ける球殻

とである。最近Rao等¹⁸⁾が本報告のS-12に相当する要素で数値計算し、Navaratna等の結果との相違は要素の相違に起因するとしているが、Navaratnaらの用いたシェル要素は本質的にS-8と同じであるからこの不一致は要素の精度、収束というより他の原因によるものと思われる。S-12Aについては座屈前応力を曲げ理論(有限要素法による解析)と薄膜理論($\sigma_s^{(0)} h = P \sec^2 \varphi \cos \alpha$, $\sigma_\theta^{(0)} h = -P \sec^2 \varphi \cos \alpha$)で計算した座屈値を併記した。

次に図7のようなリングを付けた円錐シェルが外圧を受ける場合の座屈を調べる。 ϕ が大きい場合にはViking Aeroshell等の突入体の場合に問題となり¹⁾、 ϕ が小さい場合にはロケットエンジンノズルスカート¹⁾の燃焼実験の場合などに問題となることもある。特に前者の場合にはリングがかなりの重量を占め、座屈荷重がクリティカルとなることが多いので必要十分なリングの大きさ、取付位置等を決定することは重要になる。

$\phi = 140^\circ$ の場合のリングの深さ d と座屈外圧値との関係を Miserentino 等の実験値と共に図11に示す。計算値は実験値と比較的によく一致し、ある程度リングを大きくするとそれ以上大きくしても座屈値は上がらない

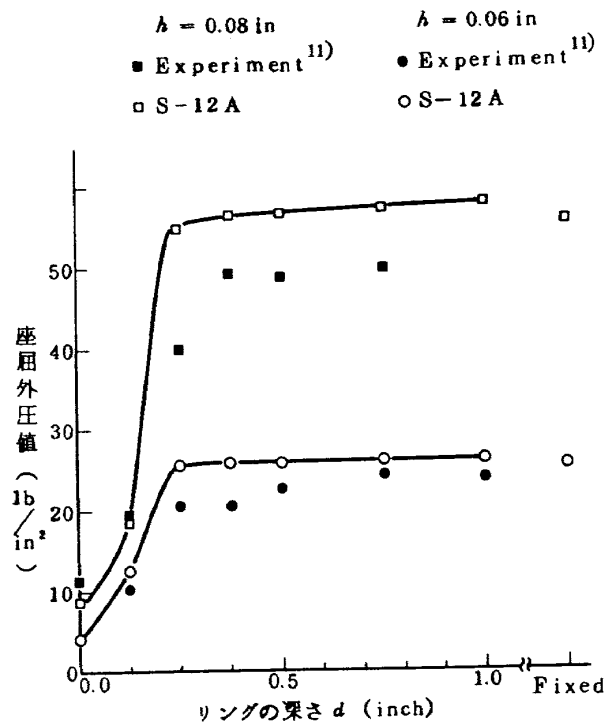


図11 外圧を受ける円錐シェルの座屈値

ことがよくわかる。

このような外圧を受ける円錐シェルの問題に対する非線形解析の必要性を吟味するために図7の円錐シェルでリングをつけない場合を非線形解析した。方法は荷重増分法で、式(7)を増分形に書きかえたもので次式のようになる。

$$[K] \Delta \theta + [K_G] \Delta \theta = \Delta F \quad (37)$$

このように線形化された方程式を各荷重ステップで解くことにより全体として非線形解析をおこなう。各ステップでは前ステップでの変形後の座標系で各マトリックス

をもとめ、これを全体座標系に変換して組み立てる。一つのステップでの荷重増分は変位の最大値が板厚の20分の1を越えないようにプログラミングした。この解析結

果を図12に示す。図12で実線が非線形解析、点線が線形解析であるが、安定領域、すなわち P_{cr} 以下の座屈前の状態ではほとんど差がない。このことから、この

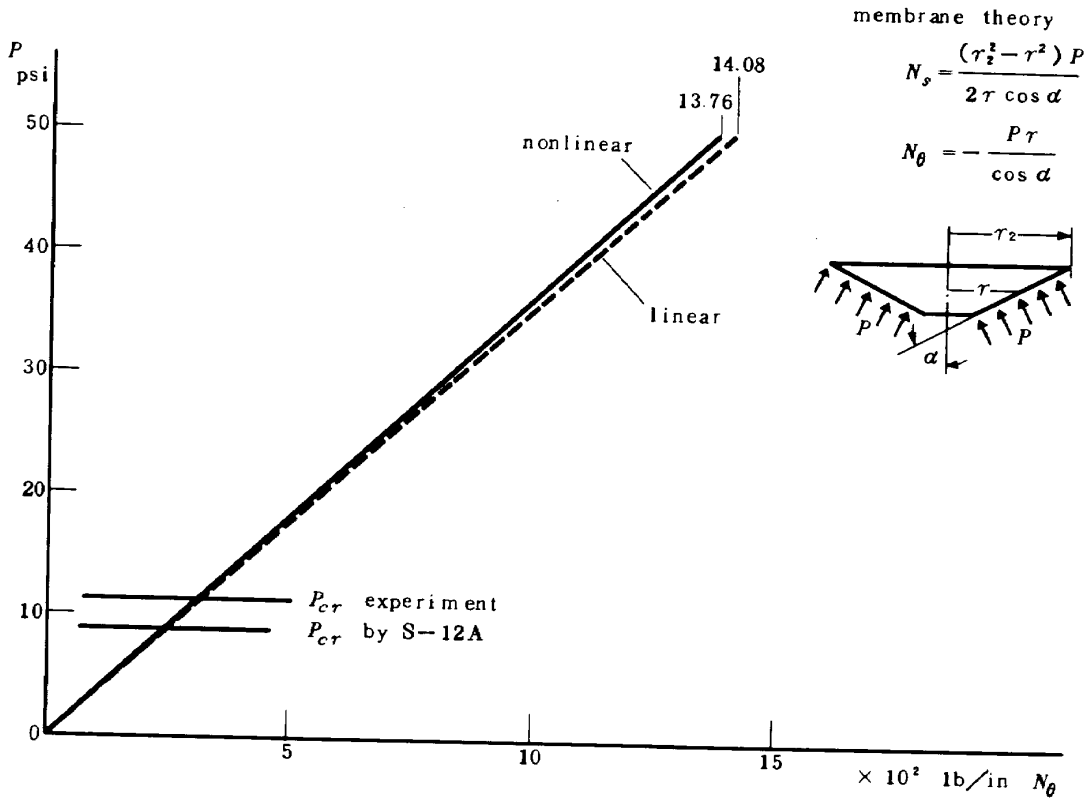


図12(a) 荷重-応力関係図

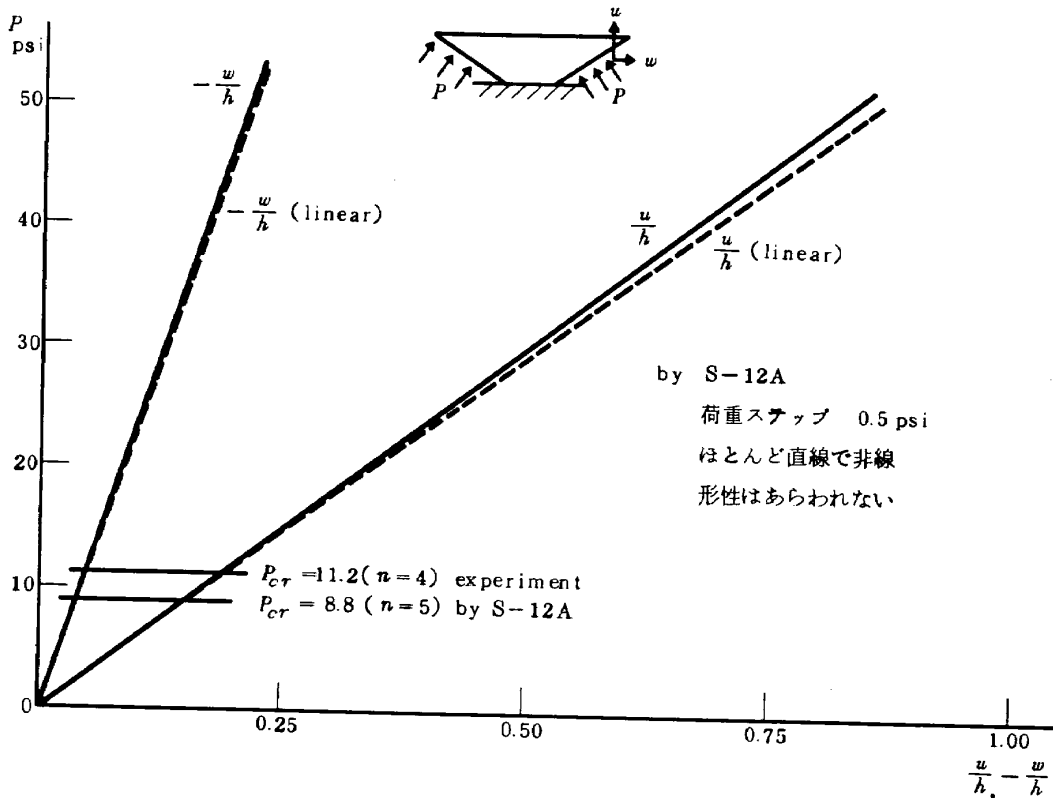


図12(b) 荷重-変位関係図

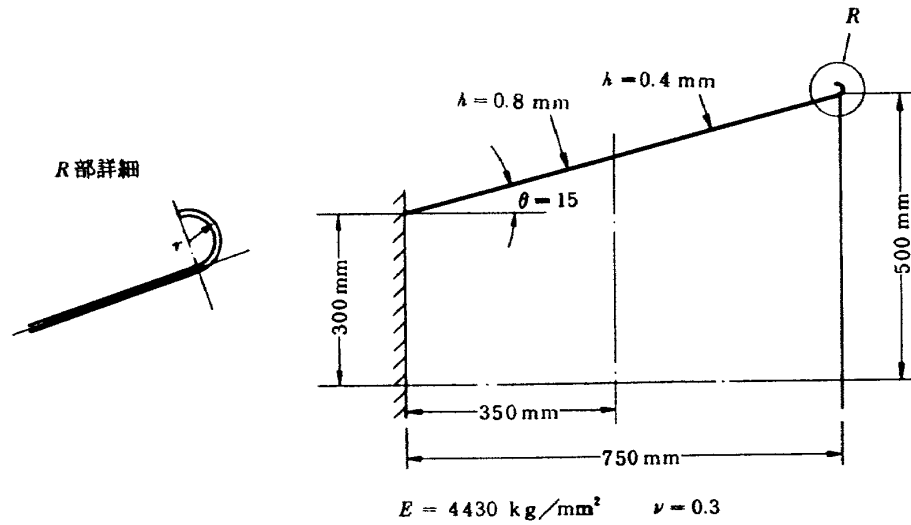


図 13 自由端に R 部をもつ円錐シェル

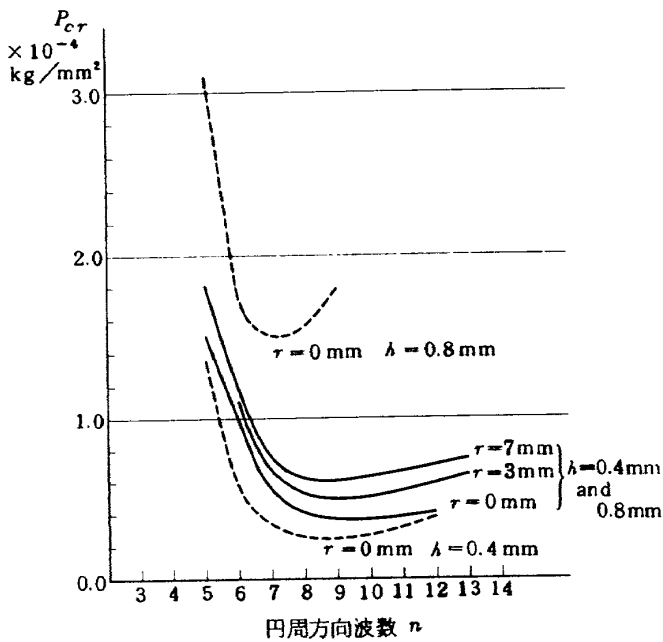


図 14 (a) 座屈荷重値～円周方向波数関係図

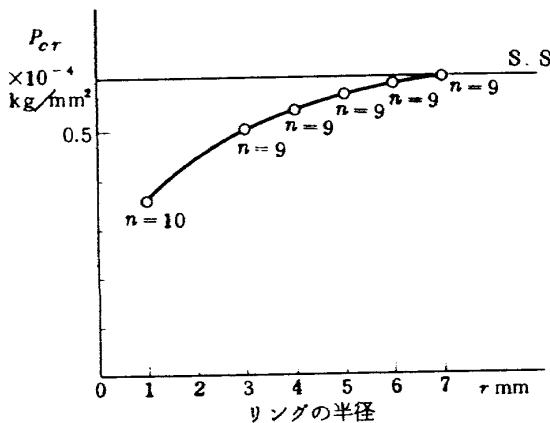


図 14 (b) 座屈荷重値～リング半径関係図

ような問題に対しては線形理論で十分であることがわかる。

最後に図 13 に示す変厚載頭円錐シェルの座屈荷重を図 14 (a) に示す。図 14 (a) において実線が図 13 のような肉厚をもったもの、点線は肉厚を一律に 0.4 mm あるいは 0.8 mm としたものである。シェルの座屈荷重として次の Niordson の式がある。¹⁹⁾

$$P_{cr} = \frac{0.92 E}{(\ell/\rho_{av})(\rho_{av}/t)^2} \quad (38)$$

ただし

$$\rho_{av} = \frac{r_1 + r_2}{2 \cos \alpha}$$

ここに α は半頂角、 ℓ は母線の長さ、 t は肉厚であり、 r_1 と r_2 は円錐上下半径である。

上式より座屈荷重を求めた値を図 14 (b) に S.S. と示している。これから自由端の R 部の半径を大きくするに従い単純支持条件に近づいていくことがわかる。なお、設計式として Weingarten 等²⁰⁾ は実験値との比較から式 (38) の 80% の値を用いることを提案している。

7. むすび

リングで補強した軸対称シェルの振動と座屈を解析するため u, v, w に三次の変位関数をもつ 8 自由度の軸対称シェル要素とこれに接続できるような 4 自由度のリング要素を導き、有限要素法でプログラムを作成した。これらを用いて自由端をリングで弾性支持した載頭円錐シェルの振動と座屈を解析した。振動問題では、円周方向波数 n が大きい場合には、リングの寸法が大きくなるに従い固定支持の条件に近づくが、 n が小さい場合には

リングで補強したにもかかわらず固有振動数が低下する。一方、座屈問題ではリング寸法がある大きさ以上になると座屈荷重は固定支持の条件で求めた解に近づくようなリング寸法があることを示した。また頂角 30° の片持ち円錐シェルに自由端にR部を設けることによる補強効果を調べ、ほぼ単純支持の条件に近づくことを示した。

8. 参考文献

- 1) W.L. HEARD, Jr., M.S. ANDERSON: "Design, Analysis, and Tests of a Structural Prototype Viking Aeroshell," AIAA Paper No. 72-370, 1972
- 2) R.A. NEWTON: "Free Vibration of Rocket Nozzles," AIAA J., Vol. 4, No. 7, pp. 1303-1306, 1966
- 3) M.S. ANDERSON, R.E. FULTON, W.L., HEARD, Jr., and J.E. WALZ: "Stress, Buckling, and Vibration Analysis of Shells of Revolution," Computers & Structures, Vol. 1 nos. 1/2 pp. 157-192, 1971.
- 4) B.O. ALMROTH, D. BUSHNELL, L.H. SOBEL: NASA CR-1049-1050-1051, 1968
- 5) G.A. COHEN: "Computer Analysis of Ring-Stiffened Shells of Revolution," NASA CR-2085-2086, 1973
- 6) A. SHALEV, M. BARUCH, E. NISSIM: "Buckling Analysis of Elastically Constrained Conical Shells under Hydrostatic Pressure by the Collocation Method," T.A.E. Report No. 137, 1972
- 7) 鷲津久一郎「弾性学における変分原理」コンピューターによる構造工学講座II-3-A 培風館 1972
- 8) O.C. ZIENKIEWICZ: The Finite Element Method in Engineering Science, chap. 12 McGraw-Hill. 1971
- 9) J.L. SANDERS, Jr.: Nonlinear Theories for Thin Shells,' Quarterly of Applied Mechanics, Vol. 21, No. 1 pp. 21-36, 1963
- 10) J.L. SEWALL, D.S. CATHERINES: "Analytical Vibration Study of a Ring-Stiffened Conical Shell and Comparison with Experiment," NASA TN D-5663, 1970
- 11) R. MISERENTINO, S.C. DIXON: "Vibration and Aerodynamic Buckling Experiments for Blunt Truncated Conical Shells with Ring-Stiffened Edges," NASA TN D-6864, 1972
- 12) 小松敬治「片持ち円筒シェルの横揺れ振動」第16回構造強度に関する講演会講演集 pp. 79-82, 1974
- 13) D.R. NAVARATNA, T.H.H. PIAN, E.A. WITMER: "Stability Analysis of Shells of Revolution by the Finite-Element Method," AIAA J., Vol., 6 No. 2 pp. 355-361, 1968.
- 14) J.C. YAO: "Buckling of a Truncated Hemisphere Under Axial Tension," AIAA J., Vol. 1, No. 10, pp. 2316-2319, 1963.
- 15) E.C. NAUMANN: "On the Prediction of Vibratory Behavior of Free-Free Truncated Shells," NASA TN D-4772, 1968
- 16) T.H.H. PIAN: Derivation of Element Stiffness Matrices, AIAA J., Vol. 2, No. 3, pp. 576-577 1964
- 17) S. TIMOSHENKO: Vibration Problems in Engineering, §70 Third Edition 1955 D. Van Nostrand
- 18) G.V. RAO, S.K. RADHAMOHAN, I.S. RAJU: "Reinvestigation of Backling of Shells of Revolution by a Refined Element" AIAA J. Vol. 12, No. 1, pp. 100-101, 1974
- 19) C.R.C.: Handbook of Structural Stability, Corona, Japan 1971
- 20) V.I. WEINGARTEN, E.J. MORGAN and P. SEIDE: "Elastic Stability of Thin-Walled Cylindrical and Conical Shells under Combined External Pressure and Axial Compression," AIAA J., Vol., 3 No. 5, pp. 500-505, 1965
- 21) H.M. ADELMAN, D.S. CATHERINES and W. C. WALTON, Jr.: "A Method for Computation of Vibration Modes and Frequencies of Orthotropic Thin Shells of Revolution having General Meridional Curvature," NASA TN D-4792, 1969

付録：リング要素の各マトリックス

I. 符号

$$A_0 = \int dA$$

$$A_s = A_0 S_R$$

$$A_z = A_0 Z_R$$

$$I_s = \int s^2 dA$$

$$I_z = \int Z^2 dA$$

$$I_{sz} = \int sZ dA$$

$$N = n/\gamma_R$$

$$C = \cos \alpha/\gamma_R$$

$$S = \sin \alpha/\gamma_R$$

E : リングのヤング率

GJ : リングの振り剛性

ρ : リングの密度

$$Q = GJ/E$$

II. リングの剛性マトリックス $K(i, j)$

$$K(1, 1) = A_0 S^2 + 2 A_s S N^2 + I_s N^4 + \frac{1}{16} Q C^2 N^2$$

$$K(1, 2) = A_0 S N + A_s N^3 + A_z C S N + I_{sz} C N^3 - \frac{3}{16} Q C^2 S N$$

$$K(1, 3) = A_0 C S + A_z S N^2 + A_s C N^2 + I_{sz} N^4 - \frac{1}{4} Q C S N^2$$

$$K(1, 4) = -A_z S^2 + A_s C S - I_{sz} S N^2 + I_s C N^2 + \frac{1}{4} Q C N^2$$

$$K(2, 2) = A_0 N^2 + 2 A_z C N^2 + I_z C^2 N^2 + \frac{9}{16} Q C^2 S^2$$

$$K(2, 3) = A_0 C N + A_z N^3 + A_s C^2 N + I_z C N^3 + \frac{3}{4} Q C S^2 N$$

$$K(2, 4) = -A_z S N + A_s C N - I_z C S N + I_{sz} C^2 N - \frac{3}{4} Q C S N$$

$$K(3, 3) = A_0 C^2 + 2 A_z C N^2 + I_z N^4 + Q S^2 N^2$$

$$K(3, 4) = -A_z C S - I_z S N^2 + A_s C^2 + I_{sz} C N^2 - Q S N^2$$

$$K(4, 4) = I_z S^2 + I_s C^2 - 2 I_{sz} C S + Q N^2$$

$$K(i, j) = E \pi \gamma_R K(i, j) \quad (n \geq 1)$$

(注) $n=0$ のときは上記の π のかわりに 2π をかける。

III. リングの質量マトリックス $M(i, j)$

$$M(1, 1) = A_0 + I_s N^2$$

$$M(1, 2) = A_s N + I_{sz} C N$$

$$M(1, 3) = I_{sz} N^2$$

$$M(1, 4) = -A_z$$

$$M(2, 2) = A_0 + 2 A_z C + I_z C^2$$

$$M(2, 3) = A_z N + I_z C N$$

$$M(2, 4) = 0$$

$$M(3, 3) = A_0 + I_z N^2$$

$$M(3, 4) = A_s$$

$$M(4, 4) = I_s + I_z$$

$$M(i, j) = \rho \pi \gamma_R M(i, j) \quad (n \geq 1)$$

(注) $n=0$ のときは上記の π のかわりに 2π をかける。

IV. リングの幾何剛性マトリックス $K_G(i, j)$

$$K_G(1, 1) = I_s C^2 N^2 + \frac{1}{4} I_s S^2 N^2 + \frac{1}{2} A_s S N^2 + \frac{1}{4} A_0 N^2$$

$$K_G(1, 2) = A_s C^2 N + I_{sz} C^3 N + \frac{1}{4} A_0 S N + \frac{1}{4} A_s S^2 N + \frac{1}{4} A_z C S N + \frac{1}{4} I_{sz} C S^2 N$$

$$K_G(1, 3) = A_s C N^2 + I_{sz} C^2 N^2 + \frac{1}{4} A_z S N^2 + \frac{1}{4} I_{sz} S^2 N^2$$

$$K_G(1, 4) = I_s C N^2 - \frac{1}{4} A_z N^2 - \frac{1}{4} I_{sz} S N^2$$

$$K_G(2, 2) = A_0 C^2 + 2 A_z C^3 + I_z C^4 + \frac{1}{4} A_0 S^2 + \frac{1}{2} A_z C S^2 + \frac{1}{4} I_z C^2 S^2$$

$$K_G(2, 3) = A_0 C N + 2 A_z C^2 N + I_z C^3 N + \frac{1}{4} A_z S^2 N + \frac{1}{4} I_z C S^2 N$$

$$K_G(2, 4) = A_s C N + I_{sz} C^2 N - \frac{1}{4} A_z S N - \frac{1}{4} I_z C S N$$

$$K_G(3, 3) = A_0 N^2 + 2 A_z C N^2 + I_z C^2 N^2 + \frac{1}{4} I_z S^2 N^2$$

$$K_G(3, 4) = A_s N^2 + I_{sz} C N^2 - \frac{1}{4} I_z S N^2$$

$$K_G(4,4) = I_s N^2 + \frac{1}{4} I_z N^2$$

$$K_G(i,j) = [\sigma_\theta^{(0)}]_R \pi \tau_R K_G(i,j) \quad (n \geq 1)$$

(注) $n = 0$ のときには上記の π のかわりに 2π をかける。

航空宇宙技術研究所報告417号

昭和50年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)
