

UDC 62.503  
512.8:  
629.7.05

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-520

有色外乱を受ける線形フィードバック系の  
共分散指定問題

永安正彦

1977年12月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 有色外乱を受ける線形フィードバック系の 共分散指定問題\*

永安正彦\*\*

## Covariance Specification for Linear Time-invariant Feedback Control Systems with Colored System Noise

By Masahiko NAGAYASU

This paper discusses optimal instantaneous state feedback control problems for time-invariant linear systems with additive color disturbances.

Linear stochastic control problems based on quadratic performance criteria have been considered many times in past years. However, the relationships between performance criteria and behavior of the resultant closed loop system are still in question today.

This paper describes an optimal state-feedback control with which the stationary state covariance matrix coincides with the prescribed covariance matrix.

The system is disturbed by additive color system noise.

Using gradient matrices, an optimal feedback gain matrix is obtained under the requirement of the state covariance coinciding with that prescribed for minimizing the control effort.

The numerical example presented in this paper is a control problem of an aircraft in an atmospheric disturbance.

### § 1 まえがき

本報告では、線形定係数システムに不規則なシステムノイズが加わっている場合の共分散マトリクス指定による状態フィードバック系の設計問題（共分散指定問題）について述べる。システムノイズが正規性白色確率過程である場合の共分散指定問題についてはすでに報告してある<sup>(4)</sup>。本報告では、システムに加わる外乱が正規性有色確率過程である場合の共分散指定問題を定式化し、最適フィードバックゲインの決定法を示す。

一般に、システムに加わる外乱は、図1に示すような「システムノイズ」と「観測ノイズ」にわけて考えることができる。システムノイズとは、制御対象への入力としてモデル化できる不規則過程であり、その要因としては、アクチュエータ部の作動誤差にもとづくものとシステムをと

りまく環境の変化にもとづくものがある。前者は、アクチュエータへの入力信号とアクチュエータの作動による実際の操作量との間に生じる誤差にもとづくものであり、これが不規則に変動するときにシステムノイズとしてモデル化することができる。後者の例としては、環境の温度変化を受ける化学プラント、突風を受ける航空機、波を受ける船舶などがある。ここではシステムの状態が直接変動する場合もあるし、システムの特徴が変化する場合もある。このような場合にも、変動が不規則であればシステムノイズとしてモデル化することができる。観測ノイズは、システムの状態を測定する過程で信号に重畳される不規則信号である。観測ノイズは、開ループ系ではシステムの状態に影響を与えないが、図1の破線で示してあるようなフィードバックをかけて制御系を構成する場合には、観測ノイズも制御対象への入力に重畳し、システム応答に影響を与える。観測ノイズのある場合に対しては、Kalman フィルタを用いた状態推定の手法が確立されており、LQG問題（

\* 昭和52年10月12日受付

\*\* 計測部

Linear-Quadratic-Gaussian Problem) の場合は観測系と分離して制御系を設計することができる<sup>(3)</sup>。本研究では、観測ノイズが無視でき、システムノイズだけを受けているとみなせる場合について扱う。

Florentinは、ダイナミックプログラミングの理論にもとづいて、不規則な外乱を受ける系の制御はフィードバック系で構成されるべきである事を示した<sup>(1)</sup>。また、Axsäterは、システム出力を静的にフィードバックする出力フィードバック制御系を設計する際に、状態変数と制御変数の2次形式評価関数

$$J = E \left\{ \int_0^T [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt + x^T(T)Sx(T) \right\}$$

を最小にするような最適フィードバックゲインを求めている<sup>(2)</sup>。Axsäterの手法は、2次形式評価関数にもとづいているため、得られた閉ループ系の制御特性は、この評価関数に依存する。すなわち、閉ループ特性は、評価関数に含まれている重みマトリクスQ, R, Sを媒介して実現されるわけである。重みマトリクスQ, R, Sを与えればフィードバックゲインは一意に求まるのであるが、よく知られているように、ここでの最大の問題点は、重みマトリクスと得られる閉ループ系の特性との関係がはっきりせず、重みマトリクスをどのように与えたらよいか分からないという事にある<sup>(3)</sup>。従って、実際に設計する場合には、重みマトリクスをいろいろ変えてみてシミュレーションを行ない、結果から判断して適当な重みマトリクスを選ぶという試行錯誤が必要になる。

これに対し、状態変数の望ましいばらつきが与えられたときに、それを実現するフィードバックが得られるならば、より直接的な設計法として有効であると考えられる。著者は、前に、閉ループ系の状態変数の定常共分散マトリクスがあらかじめ与えられた望ましい値になるようにフィードバックゲインを決定するという共分散指定問題を定式化した<sup>(4)</sup>。共分散指定問題においては、制御系の設計目標は「システムの状態を要求される確度で制御すること」である。そして、この目標を実現できるフィードバックゲインのクラスの中から、何らかの意味で最適な一つのフィード

バックゲインを選ぶ。

システムノイズが加わる確率制御問題の一例として、不規則突風中を飛行する航空機の制御問題をあげることができる。不規則突風は、一定の帯域幅をもった有色確率過程とみなされているので、これに対して共分散指定問題を適用する場合には、前に報告した白色外乱を受ける共分散指定問題を、有色外乱を受ける場合に拡張する必要がある。

本稿の主たる目的は、このような有色外乱を受ける場合の共分散指定問題を定式化し、その解法と計算アルゴリズムを与えることである。

本報告の構成は次のようになっている。第2章では、正規性有色外乱を受ける線形系およびその応答を数式で記述し、第3章で、共分散指定問題をエネルギー最小化問題を含めた形で定式化する。第4章では、ラグランジュ乗数法およびMatrix Gradient法を用いて、共分散指定問題に対する解となるべきフィードバックゲインKの満たすべき必要条件を与える。第5章では、4章で与えられた必要条件からKの数値解を求めるための、逐次代入法による数値計算アルゴリズムを与える。そして、第6章で、例題として、不規則突風中を飛行する航空機の制御問題をとりあげ、共分散指定問題の数値例を示す。さらに、7章で、逐次代入法よりもより一般的に収束を与える修正逐次代入法のアルゴリズムを与え、5章で示した数値解法を補足する。

## 記号

本報告で用いる主な記号をまとめておく。

$x \in \mathbb{R}^n$  :  $x$ が $n$ 次元ベクトル

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  :  $X$ が $m \times n$ マトリクス

$E\{\cdot\}$  : 期待値

$\text{tr} A$  : マトリクスのトレース

$\frac{\partial L(X)}{\partial X}$  : グラディエントマトリクス。 $\left\{ \frac{\partial L(X)}{\partial X_{ij}} \right\}$ を  
( $i, j$ )要素とするマトリクス

$A > 0$  ( $\geq 0$ ) :  $A$ が(準)正定マトリクス

$A^T$  :  $A$ の転置マトリクス

$\|\cdot\|$  : ベクトルまたはマトリクスのユークリッドノルム

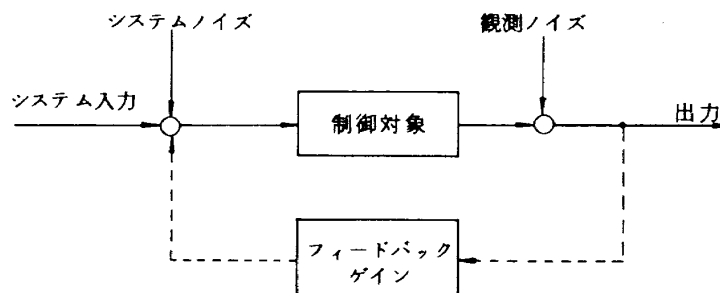


図 1 外乱を受ける制御系

§ 2 有色正規外乱を受ける線形制御系<sup>(5,6,7)</sup>

本研究で扱う制御系は、次の Langevin 型確率微分方程式で記述されるものとする。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Cw(t) & (2.1) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

ここで、 $x(t)$  は  $n$  次元状態変数、 $u(t)$  は  $r$  次元制御変数、 $w(t)$  は  $p$  次元システムノイズである。A, B, C はそれぞれ  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $n \times p$  の定数マトリクスであり、マトリクス対 { A, B } は完全可制御対であるとする。 $\dot{x}(t)$  は  $x(t)$  の時間微分を表わしている。システムノイズ  $w(t)$  は平均値が 0 の定常な正規マルコフ過程であり、次式で示される成形フィルタによって白色正規確率過程から生成されるものとする。

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= Fw(t) + Gv(t) & (2.2) \\ w(0) &= w_0 \end{aligned}$$

ここで、F は漸近安定 \* な  $p \times p$  の定数マトリクス、G は  $p \times q$  の定数マトリクスであって、マトリクス対 { F, G } は完全可制御対であるとする。 $v(t)$  は、システムノイズ  $w(t)$  の成形フィルタへの入力であり、 $q$  次元の白色正規確率過程であって、 $t, \tau \geq 0$  に対して次の性質を有している。

$$\begin{aligned} E\{v(t)\} &= 0 \\ E\{v(t)v^T(\tau)\} &= V\delta(t-\tau) \\ E\{x_0 v^T(t)\} &= 0, \quad E\{w_0 v^T(t)\} = 0 \end{aligned}$$

ここで、V は  $q \times q$  の正定対称マトリクスであって、 $E\{\cdot\}$  は期待値を、右肩の添字 T はマトリクス又はベクトルの転置を表わし、 $\delta(\cdot)$  は Dirac のデルタ関数を表わしている。また、初期値  $x_0, w_0$  は正規確率変数であって次の性質を有している。

$$\begin{aligned} E\left\{\begin{bmatrix} x_0 \\ w_0 \end{bmatrix}\right\} &= 0 \\ E\left\{\begin{bmatrix} x_0 \\ w_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ w_0 \end{bmatrix}^T\right\} &\triangleq \begin{bmatrix} X_0 & Y_0 \\ Y_0^T & W_0 \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

ここで、記号  $\geq (>)$  は、マトリクスが準正定 (正定) である事を表わす。

本研究で扱う制御系では、制御  $u(t)$  が

$$u(t) = Kx(t) \tag{2.3}$$

のように状態フィードバックで与えられるものとする。ここで、K は  $r \times n$  の定係数のフィードバックゲインマトリ

クスである。(2.3) 式を (2.1) 式に代入すると、閉ループ系

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + Cw(t) & (2.4) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

が得られる。正規確率過程を入力とする線形システムの出力は正規確率過程となるから、(2.4) 式で  $w(t)$  が正規確率過程であれば  $x(t)$  もやはり正規確率過程となる。従って、 $x(t)$  の統計的性質はその平均値と共分散で完全に記述できる。いま (2.2) 式と (2.4) 式をまとめて書き表わすと

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BK & C \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} v(t) \\ \begin{bmatrix} x(0) \\ w(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ w_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} z(t) &\triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{A} \triangleq \begin{bmatrix} A + BK & C \\ 0 & F \end{bmatrix}, \quad \underline{G} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}, \\ z_0 &\triangleq \begin{bmatrix} x_0 \\ w_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とおくと、(2.5) 式は

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \underline{A}z(t) + \underline{G}v(t) & (2.6) \\ z(0) &= z_0 \end{aligned}$$

と表わされる。(2.6) 式は、 $z(t)$  を状態変数とし、白色正規確率過程  $v(t)$  を入力とする線形系であり、 $z(t)$  の平均値と共分散は次のように求めることができる。まず、 $v(t)$  を入力とした時の  $z(t)$  の応答は

$$z(t) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\underline{G}v(\tau)d\tau \tag{2.7}$$

で与えられる。ここで  $\Phi(t)$  はシステム (2.6) の遷移マトリクスであって

$$\Phi(t) \triangleq e^{\underline{A}t}$$

である。 $z(t)$  の平均値を  $\bar{z}(t)$ 、初期値  $z_0$  が確定した時の条件つき平均値を  $\bar{z}(t; z_0)$  とすると、(2.7) 式から

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &\triangleq E\{z(t)\} = 0 \\ \bar{z}(t; z_0) &\triangleq E\{z(t) | z_0\} = \Phi(t)z_0 \end{aligned}$$

となる。また、 $z(t)$  の共分散マトリクスを  $Z(t)$  とすると、 $Z(t)$  は次のマトリクス微分方程式を満たす。

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \underline{A}Z(t) + Z(t)\underline{A}^T + \underline{G}V\underline{G}^T \\ Z(0) &= Z_0 \triangleq E\{z_0 z_0^T\} \end{aligned}$$

ここで、マトリクス  $\underline{A}$  が漸近安定であれば、 $t \rightarrow \infty$  で  $Z(t)$  は有界な定常共分散  $Z$  に収束する。すなわち、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = Z$$

注 \* マトリクス F が漸近安定とは、F の全ての固有値の実部が負となることである。

そして、 $Z$ は(2・8)式から

$$\underline{A}Z + Z\underline{A}^T + \underline{G}\underline{V}\underline{G}^T = 0 \quad (2.9)$$

の一意解であり

$$Z = \int_0^{\infty} \Phi(t) \underline{G}\underline{V}\underline{G}^T \Phi^T(t) dt \quad (2.10)$$

で与えられる。

### §3 共分散指定問題

本章では、(2・2)、(2・4)式で示される制御系に対して、共分散指定問題を定式化する。いま

$$E\{x(t)x^T(t)\} \triangleq X(t)$$

$$E\{x(t)w^T(t)\} \triangleq Y(t)$$

$$E\{w(t)w^T(t)\} \triangleq W(t)$$

とし、 $t \rightarrow \infty$ での極限が存在する場合にそれぞれ $X$ 、 $Y$ 、 $W$ とする。こうすると $Z$ の定義より

$$Z = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & W \end{bmatrix}$$

となる。

さて、(2・4)式で表わされるフィードバック制御系にもどって考えると、 $(A+BK)$ が漸近安定となるような $K$ を与えれば、閉ループ系の状態 $x(t)$ の定常共分散マトリクス $X$ は(2・9)式の一意解 $Z$ から得ることができる。

ここでは、逆に、閉ループ系の定常共分散マトリクス $X$ が、あらかじめ与えられたある望ましい値になるようにフィードバックゲイン $K$ を見出す問題(共分散指定問題)を考えることにする。ただし、設計目標として与える共分散マトリクス $X$ は正定対称実マトリクスとする。

(2・9)式の $\underline{A}$ 、 $\underline{G}$ 、 $Z$ をブロックマトリクスで表わして展開すると

$$(a) (A+BK)X + X(A+BK)^T + CY^T + YC^T = 0$$

$$(b) (A+BK)Y + YF^T + CW = 0$$

$$(c) FW + WF^T + GVG^T = 0$$

(3.1)

を得る。(3.1-c)式は外乱に関する定常共分散の式であり、 $F$ が漸近安定であるから一意的に外乱の定常共分散マトリクス $W$ が求まる。従って、(3.1-c)式はフィードバックゲイン $K$ には依存しない。 $K$ に依存するのは、(3.1-a, b)の両式に含まれている $X$ と $Y$ である。そして、上述の共分散指定問題では、 $X$ と $Y$ のうち、状態共分散マトリクス $X$ が指定されているだけで、相互共分散

マトリクス $Y$ は指定されていないから、 $Y$ は(3・1)式を満たささえすれば、任意の値を取ることができる。(3・1-a, b)式で $K$ 、 $X$ 、 $Y$ を変数と考えたとき、両式は $K$ 、 $X$ 、 $Y$ に関する拘束条件式とみなせる。ここで、さらに、 $X$ としてある正定対称マトリクスを与えて、あらためて、(3・1-a, b)式を $K$ 、 $Y$ に関する拘束条件式とみなす。この拘束条件式を満たすマトリクス対 $(K, Y)$ が得られれば、このマトリクス $K$ が共分散指定問題の解である。

任意の正定対称マトリクス $X$ を与えた時に、(3・1-a, b)の解 $(K, Y)$ が存在するかどうかという問題の検討は必要であるが、解の存在に関してはここではふれない。本報告では、指定した $X$ に対して解 $(K, Y)$ が存在すると仮定する。

(3・1-a, b)式の解は、存在するとすれば、一般には一意的ではないから、共分散指定問題の解は集合 $\{K\}$ をなす。制御系の設計問題としては、この解集合 $\{K\}$ の中から適当な $K$ を選ぶことが必要である。そこで、 $K$ の選択の規範として、評価関数

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E\{u^T(t)Ru(t)\} \\ = \text{tr}K^T R K X \quad (3.2)$$

を考えることにする。ここで、 $R$ は正定対称マトリクスであり、 $\text{tr} \cdot$ はマトリクスのトレースである。

(3.2)式の評価関数は、エルゴード性の仮定をすれば、

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^T(t)Ru(t) dt$$

となる。 $R$ が単位マトリクスであれば、これは制御エネルギーを表わしている。従って、(3.2)式の評価関数を最小にするということは、重みつきのエネルギーを最小化するという意味をもっている。こうして、エネルギー最小化問題も含めた共分散指定問題は次のように述べることができる。

#### 共分散指定問題

正定対称マトリクス $X$ が与えられたとき、(3・1-a, b)式の拘束条件のもとに、(3.2)式の評価関数を最小にする最適フィードバックゲイン $K$ を見出せ。

### §4 最適フィードバックゲインの必要条件

共分散指定問題が、(3・1)式の等式拘束条件のもとに(3.2)式の評価関数を最小化する問題であると定式化されたので、本章では、Lagrange乗数法を用いて、最適解のもつべき必要条件を導びく。(3・1)式の中で(c)式から $W$ が一意的に確定し、この $W$ を(b)式に代入すれば、変数 $K$ と $Y$ に関する拘束条件式は(3・1・a)式と(3・1・b)式であると考えてよい。ここでLagrange係数

マトリクス  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times p}$  を導入して次の Lagrange 関数  $L$  を定義する。

$$L(K, Y, P, Q) \triangleq \frac{1}{2} \text{tr} K^T R K X + \frac{1}{2} \text{tr} \{ (A + BK) X + X(A + BK)^T + CY^T + YC^T \} P + \text{tr} \{ (A + BK) Y + YF^T + CW \} Q^T \quad (4.1)$$

こうすると、上に述べた条件つき極値問題での極値条件は、(4.1) 式の  $L$  の  $K, Y, P, Q$  に関する偏導関数を 0 とおけばよいから、Matrix Gradient<sup>(8)</sup> を用いると、フィードバックゲイン  $K$  が共分散指定問題の解であるための必要条件は

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial L}{\partial K} &= RKX + B^T P X + B^T Q Y^T = 0 \\ (b) \quad \frac{\partial L}{\partial Y} &= PC + (A + BK)^T Q + Q F = 0 \\ (c) \quad 2 \frac{\partial L}{\partial P} &= (A + BK) X + X(A + BK)^T + CY^T + YC^T = 0 \\ (d) \quad \frac{\partial L}{\partial Q} &= (A + BK) Y + YF^T + CW = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。

### § 5 計算アルゴリズム<sup>(16)</sup>

共分散指定問題の解の必要条件が (4.2) 式で与えられたが、これは  $K, Y, P, Q$  に関する多元 2 次代数方程式であり、解析的に解を得ることは困難である。ここでは、(4.2) 式の数値解を求めるための逐次代入法による計算アルゴリズムを示す。  $R$  と  $X$  は正定対称マトリクスであるからそれぞれ逆行列が存在し、(4.2. a) 式から

$$K = -R^{-1} B^T (P + Q Y^T X^{-1}) \quad (5.1)$$

が得られる。ここで (5.1) 式を (4.2. c) 式に代入すると

$$\begin{aligned} BR^{-1} B^T P X + X P B R^{-1} B^T + BR^{-1} B^T Q Y^T \\ + Y Q^T B R^{-1} B^T - [AX + XA^T + CY^T + YC^T] = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

となる。以上から問題は、(4.2. b), (4.2. d) 式と、(5.1), (5.2) 式を連立させて解を求めることと考えるとよい。本問題に逐次代入法を適用する場合には次のように考えればよい。独立変数として  $K$  をとり、 $P, Q, Y$  は  $K$  の関数であると考え、この事を強調するために、 $P(K), Q(K), Y(K)$  と表わすと、(5.1) 式は

$$K = -R^{-1} B^T \{ P(K) + Q(K) Y^T(K) X^{-1} \} \quad (5.3)$$

と書く事ができる。上式の不動点  $K^*$  を求めるための逐次代入法によるアルゴリズムは

$$\begin{aligned} K_{i+1} &= -R^{-1} B^T (P_i + Q_i Y_i^T X^{-1}) \\ K_0 &: \text{given} \end{aligned} \quad (5.4)$$

である。ここで  $P_i, Q_i, Y_i$  は次式で定義する。

$$P_i \triangleq P(K_i), Q_i \triangleq Q(K_i), Y_i \triangleq Y(K_i)$$

$K_i$  が与えられたときに、 $P_i, Q_i, Y_i$  は次のようにして求める。まず、 $Y_i$  に関しては (4.2. d) 式から

$$(A + BK_i) Y_i + Y_i F^T + CW = 0 \quad (5.5)$$

を得る。  $F$  と  $(A + BK_i)$  が漸近安定であれば (5.5) 式の一意解として  $Y_i$  が得られる。さらに  $P_i, Q_i$  に関しては、(4.2. b) 式と (5.2) 式から

$$\begin{aligned} (a) \quad P_i C + (A + BK_i)^T Q_i + Q_i F &= 0 \\ (b) \quad \Gamma P_i X + X P_i \Gamma + P Q_i Y_i^T + Y_i Q_i^T \Gamma &= Q_i \end{aligned} \quad (5.6)$$

の連立代数方程式を得る。ここで

$$\begin{aligned} \Gamma &\triangleq BR^{-1} B^T \\ Q_i &\triangleq CY_i^T + Y_i C^T + AX + XA^T \end{aligned}$$

である。(5.6) 式において  $K_i$  と  $Y_i$  はすでに確定しているから、この式は  $P_i$  と  $Q_i$  に関する線形代数方程式となる。また  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は対称マトリクスであるから、 $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$  とともに未知数の数は  $(n \times \frac{n+1}{2} + p)$  となり、(5.6. b) 式が対称である事を考慮すると、方程式の数と等しくなるので、(5.6) 式から  $P_i, Q_i$  が求まる。

以上の事から、(4.2) 式の数値解を得るための逐次代入法による計算アルゴリズムは次の通りである。

ステップ 1:  $(A + BK_0)$  が漸近安定となるように  $K$  の初期推定値  $K_0$  を与える。

ステップ 2:  $i = 0$  とし、 $K_i = K_0$  とする。

ステップ 3: (5.5) 式から  $Y_i$  を求める。

ステップ 4: (5.6) 式から  $P_i, Q_i$  を求める。

ステップ 5: (5.4) 式から  $K_{i+1}$  を求める。

ステップ 6:  $\|K_{i+1} - K_i\| > \epsilon$  なら  $i = i + 1$  としてステップ 3 にもどって繰り返す。

$\|K_{i+1} - K_i\| \leq \epsilon$  なら計算を終了する。

ここで  $\|\cdot\|$  はマトリクスのユークリッドノルムを表わし、 $\epsilon$  は収束判定を与えるための値である。

### § 6 例題

有色外乱を受ける共分散指定問題の例題として、不規則突風中を飛行する航空機の縦の短周期運動の制御問題をと

り上げる。

航空機の短周期運動方程式 (9,10,11)

突風を受ける航空機の短周期運動の線形化された方程式は次式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= Z_w w(t) + V q(t) + Z_{\delta_e} \delta_e(t) + Z_{\delta_f} \delta_f(t) \\ &\quad - Z_w w_g(t) \\ \dot{q}(t) &= M_w w(t) + M_q q(t) + M_{\delta_e} \delta_e(t) + M_{\delta_f} \delta_f(t) \\ &\quad - M_w w_g(t) \end{aligned} \tag{6.1}$$

ここで  $w(t)$  は航空機の上下速度であり、図2に示すように下向きを正にとる。 $q(t)$  は、機体姿勢角  $\theta(t)$  の時間微分で縦ゆれ角速度である。この2つの変数が航空機の短周期運動での状態変数である。 $\delta_e(t)$  と  $\delta_f(t)$  はそれぞれ、昇降舵およびフラップの舵角変化量であって、制御入力にあたる。 $w_g(t)$  は上下方向の不規則突風であってシステム外乱である。

突風の数学モデル (付録)

不規則突風  $w_g(t)$  は平均値0で標準偏差が  $\sigma_{wg}$  の正規性確率過程であり、そのパワースペクトルは次のDryden型関数で表わされるものとする。

$$\Phi_{wg}(\omega) = \frac{\sigma_{wg}^2 L}{\pi V} \frac{1 + 3 \frac{L^2}{V^2} \omega^2}{\left(1 + \frac{L^2}{V^2} \omega^2\right)^2} \tag{6.2}$$

ここで  $L$  は突風の integral scale,  $V$  は航空機の速度,  $\omega$  は時間周波数である。パワースペクトルが (6.2) 式で表わされるような確率過程は、次のように、定常白色過程  $n(t)$  を入力とする成形フィルタの出力として得ることができる。

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \eta(t) \\ \dot{\eta}(t) &= -\frac{V^2}{L^2} \xi(t) - \frac{2V}{L} \eta(t) + n(t) \\ w_g(t) &= -\frac{V^2}{L^2} \xi(t) - \frac{\sqrt{3}V}{L} \eta(t) \end{aligned} \tag{6.3}$$

ここで  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  は成形フィルタの内部状態量であり、 $n(t)$  は次の性質をもつ定常な正規性白色過程である。

$$\begin{aligned} E\{n(t)\} &= 0 \\ E\{n(t)n(\tau)\} &= N \delta(t-\tau) \quad ; \quad N = \frac{\sigma_{wg}^2 L}{\pi V} \end{aligned}$$

突風応答に対する共分散指定問題

(6.1) 式と (6.3) 式は次のように表現することができる。

$$\begin{aligned} (a) \quad \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) + C z(t) \\ (b) \quad \dot{z}(t) &= F z(t) + G n(t) \end{aligned} \tag{6.4}$$

ここで

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} w(t) \\ q(t) \end{bmatrix} & z(t) &= \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \\ u(t) &= \begin{bmatrix} \delta_e(t) \\ \delta_f(t) \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} Z_w & V \\ M_w & M_q \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} & Z_{\delta_f} \\ M_{\delta_e} & M_{\delta_f} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} \frac{Z_w V^2}{L^2} & \frac{\sqrt{3} Z_w V}{L} \\ \frac{M_w V^2}{L^2} & \frac{\sqrt{3} M_w V}{L} \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{V^2}{L^2} & -\frac{2V}{L} \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

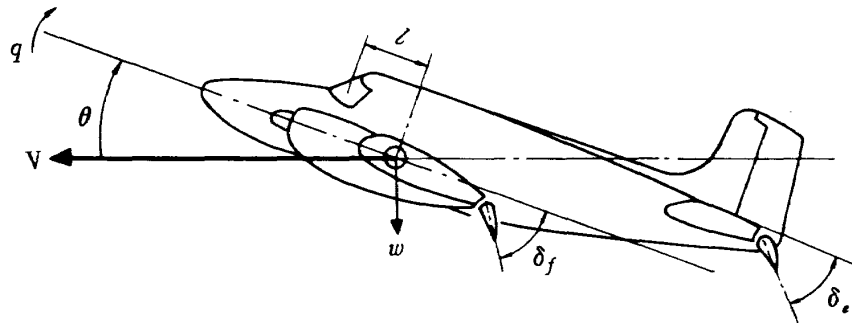


図 2 航空機運動概念図

である。状態フィードバックをかけると(6.4.a)式は、

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Cz(t) \quad (6.5)$$

となる。ただし、Kは2×2のフィードバックゲインマトリクスである。

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

(6.5)式は、(6.4.b)式で生成される有色のシステム外乱  $z(t)$  を受けるフィードバック制御系をあらわしており、それぞれ(2.4)、(2.2)式に対応しているから、3章以後の共分散指定問題を適用することができる。ここでは次のような共分散指定問題を考えることにする。マトリクスAが漸近安定であるとし、開ループ系の  $x(t)$  の定常共分散マトリクスを  $X_0$  とする。このとき、フィードバック  $u(t) = Kx(t)$  をかける事によって閉ループ系の  $x(t)$  の定常共分散マトリクス  $X$  が開ループの場合の  $\frac{1}{4}$  になるようにする。すなわち、 $X = \frac{1}{4} X_0$  となるようなフィードバックゲイン  $K$  を求めることにする。こうすると  $w(t)$  と  $q(t)$  の標準偏差は開ループ系の時の半分になる。さらに評価関数として制御エネルギー

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \quad (6.6)$$

を考え、前記条件を満たすフィードバックゲインのうちで、制御エネルギーを最小にするような最適フィードバックゲインを求めることにする。

数値例<sup>(13,14,15)</sup>

双発軽飛行機ビーチクラフト65型(クイーンエア)のデータをもとに数値計算を行なう。飛行条件等のデータは

表1に示しておく。

計算の結果、開ループ系の状態変数の定常共分散マトリクスは

$$X_0 \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_w^2 & \sigma_{wq}^2 \\ \sigma_{wq}^2 & \sigma_q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.904 & 0.17 \times 10^{-4} \\ 0.17 \times 10^{-4} & 0.8 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

表1 クイーンエア機の必要諸元及び微係数

翼面積	$S = 25.75 \text{ m}^2$
平均翼弦長	$\bar{c} = 1.978 \text{ m}$
慣性モーメント	$I_y = 1,200.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
質量	$m = 3,300 \text{ kg}$
空気密度	$\rho = 1.07 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
重力加速度	$g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$
高度	$H = 1,370 \text{ m}$
速度	$V = 67 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$
スケール	$L = 533 \text{ m}$
突風の標準偏差	$\sigma_{wg} = 1.7 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$

$Z_w$	$= -0.02$
$M_w$	$= -0.07$
$M_q$	$= -2.0$
$Z_{\delta_e}$	$= -0.75$
$M_{\delta_e}$	$= -1.7$
$Z_{\delta_f}$	$= -1.6$
$M_{\delta_f}$	$= 0.59$

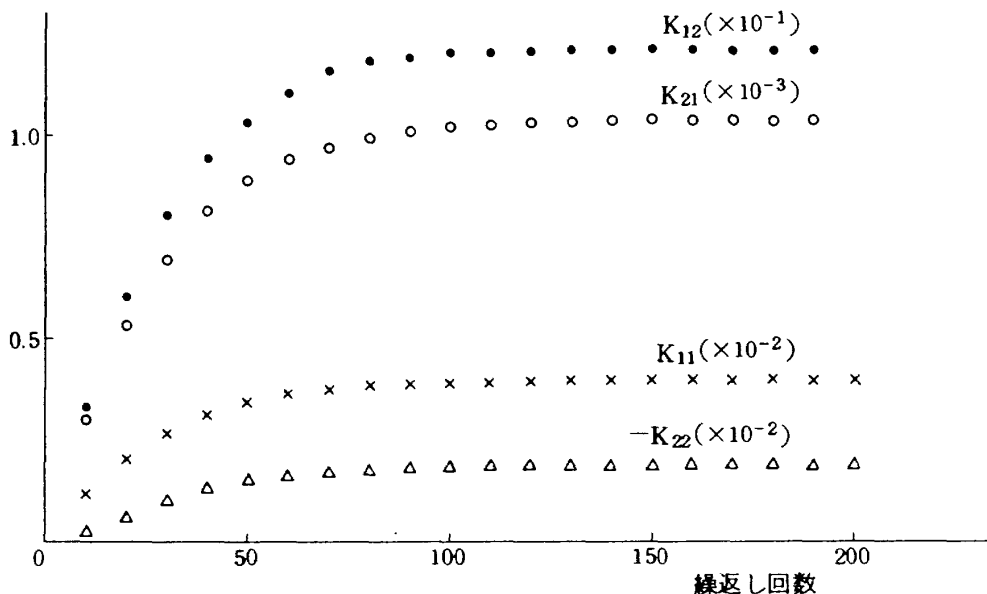


図3 共分散を指定した場合の逐次代入法による最適フィードバックゲインの数値解の収束



となり、従って標準偏差は

$$\sigma_{w_0} = 0.95 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$\sigma_{q_0} = 0.89 \times 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$$

である。

指定すべき共分散マトリクスは

$$X = \frac{1}{4} X_0 = \begin{bmatrix} 0.226 & 0.426 \times 10^{-5} \\ 0.426 \times 10^{-5} & 0.2 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

このように共分散を指定して5章の計算アルゴリズムで最適フィードバックゲインKを求めた時の解の収束の様子を図3に示す。横軸は繰返し回数であり、縦軸はフィードバックゲインを表わしている。ただし、実際のゲインの値は、それぞれ図中( )の中に示した値をかけたものである。初期値は $K_0 = 0$ から出発しており、それぞれ約100回の繰返して収束している。得られた最適ゲインは

$$K = \begin{bmatrix} 0.397 \times 10^{-2} & 0.121 \\ 0.104 \times 10^{-2} & -0.19 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

である。航空機が開ループのまま突風中を飛んでおり、その途中で、上で得られたゲインKを用いて状態フィードバック制御に切りかえたとする。この時、 $1-\sigma$ 等密度楕円が時間とともにどのように変化するかを図4に示しておく。図中、 $x^T X_0^{-1} x = 1$ で示された楕円が、 $1-\sigma$ 等密度楕円であって、開ループで飛んでいる場合には、状態量 $w(t)$ と $q(t)$ は0.394の確率でこの楕円の中にあるということである。ちなみに、この3倍の大きさの楕円、 $3-\sigma$ 等密度楕円、

の場合には、 $w(t)$ 、 $q(t)$ がその楕円の中にある確率は0.989となる。

さて、時刻 $t = 0$ で開ループ系からフィードバック制御に切りかえたとする、図に示すように、 $1-\sigma$ 等密度楕円は時間とともに時計方向に回転し、それにつれて小さくなっていっている。楕円と楕円の長軸との交点が時間とともにどのように動いてゆくかを図中・印で示してある。十分時間が経過した後には、楕円の大きさが2分の1になっており、所期の設計目的を達成していることがわかる。閉ループ系の定常状態での $1-\sigma$ 等密度楕円は定常共分散マトリクスをXとすると $x^T X^{-1} x = 1$ で表わされる。状態 $w(t)$ 、 $q(t)$ 、制御 $\delta_s(t)$ 、 $\delta_f(t)$ の標準偏差が時間とともにどのように応答するかを図5および図6に示しておく。

共分散  $E\{w(t)q(t)\}$  について

共分散マトリクスを指定する場合、 $E\{w^2(t)\}$ 、 $E\{q^2(t)\}$ はそれぞれ、 $w(t)$ 、 $q(t)$ の分散であって、そのばらつきの尺度であるから、物理的な意味がわかりやすく、これをどの程度にしたいかという希望値も与えやすいが、 $w(t)$ と $q(t)$ の共分散である $E\{w(t)q(t)\}$ が物理的にどのような意味をもち、また、どういう値を指定してやればよいかということは、今までの取扱いではわかりにくいと思われるので、一つの例をあげてどのような考え方があるかを示しておく。

いま、図2で重心と操縦席の間の距離を $l$ とし、操縦席の上下方向の速度を $w_c(t)$ とすると、 $\theta \approx 0$ として近似的に

$$w_c(t) = w(t) - l q(t) \tag{6.7}$$

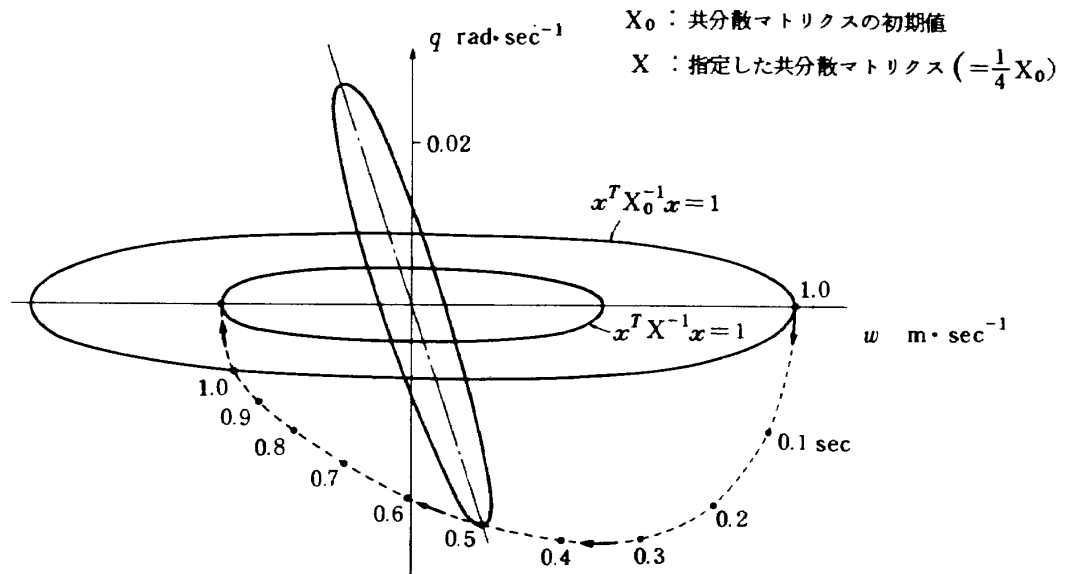


図 4 共分散指定によるフィードバック制御系の  $1-\sigma$ 等密度楕円の過渡応答

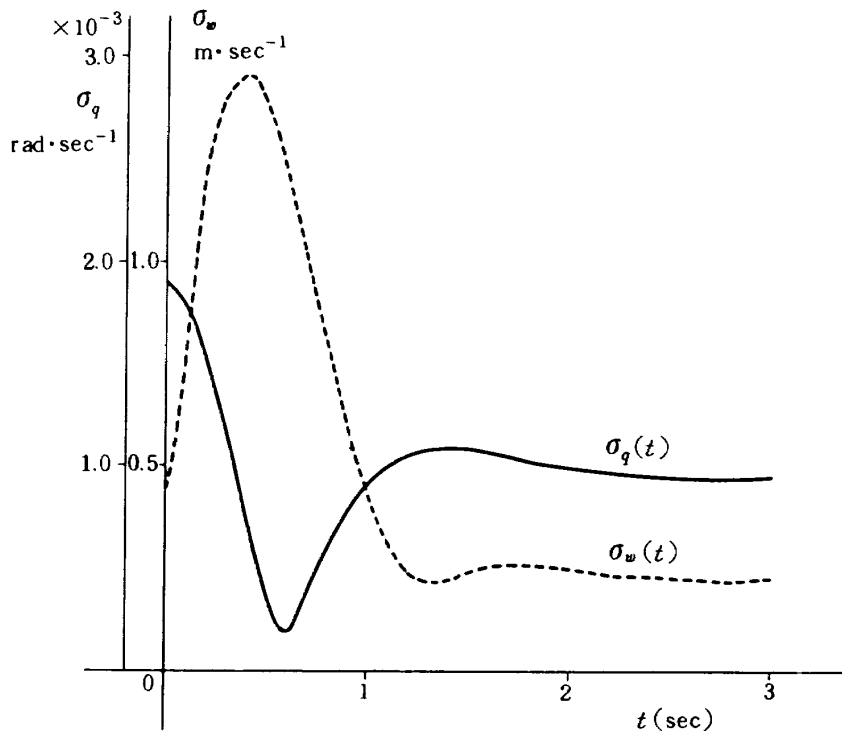


図 5 状態変数の標準偏差の過渡応答

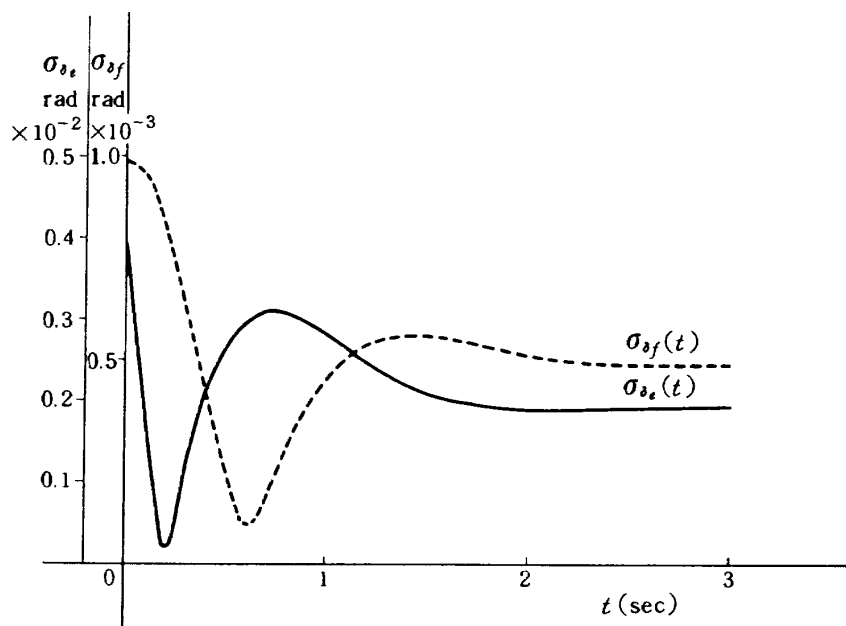


図 6 制御変数の標準偏差の過渡応答

とおくことができる。いま  $w_c(t)$  の分散を小さくすることを考えると、その分散は

$$E\{w_c^2(t)\} = E\{w^2(t)\} + \ell^2 E\{q^2(t)\} - 2\ell E\{w(t)q(t)\}$$

となる、ここで第1, 2項は正であるから、 $E\{w_c^2(t)\}$  を小さくするためには第3項の  $E\{w(t)q(t)\}$  が大きくないなければならないことがわかる。 $E\{w(t)q(t)\}$  には

$$|E\{w(t)q(t)\}| \leq \sqrt{E\{w^2(t)\}E\{q^2(t)\}}$$

の拘束条件があるので、この範囲で適当な値を選べばよい。ただし、 $E\{w(t)q(t)\}$  を  $\sqrt{E\{w^2(t)\}E\{q^2(t)\}}$  に近づけてゆくと一般にフィードバックゲイン  $K$  が大きくなってゆくの、この点も考慮して  $E\{w(t)q(t)\}$  の設計値を与える必要がある。

また、他に  $E\{w(t)q(t)\}$  を0とおいて  $w(t)$  と  $q(t)$  の相関をなくするという設計法も考えられる。本稿の例題では指定すべき共分散マトリクスを開ループ系の共分散マトリクスの4分の1として与えたが、以上述べたように、制御対象に応じて共分散マトリクスの非対角項の物理的意味を解釈できればそれによって設計値を与えることもできる。このような相互共分散に着目したアプローチは設計に新たな視点を加えるものと思われる。

## §7 修正逐次代入法について

5章で、(4・2)式の数値解法として、逐次代入法による計算アルゴリズムを示し、6章で例題について実際に数値計算を行なった結果を示した。この例題では繰返し計算によって解に収束したが、一般には逐次代入法が収束するかどうかは、もとの関数の形に依存しているので、5章で示したアルゴリズムでは収束しない場合が考えられる。このような場合にどのような方策をとればよいかの指針を明らかにしておく必要がある。本章では、一次元の非線形問題の解法について、逐次代入法を一般化し、逐次代入法で収束しない場合にどのような方策をとればよいかを示し、5章で述べた内容を補足する。

非線形方程式

$$g(x) = 0 \quad (7.1)$$

を逐次代入法で解く場合には、(7・1)式を

$$x = f(x) \quad (7.2)$$

の形に書き表わし、初期推定値  $x_0$  を与えて、

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (7.3)$$

の計算を繰返していつ解を求める。このときこの解法が収束するための条件は、解の真値を  $x^*$  とすると

$$|f'(x^*)| < 1 \quad (7.4)$$

となることである。従って、(7・1)式を(7・2)式のように書きなおす場合、(7・4)式の条件を満たすように選ばなければならない。ところで、解の真値  $x^*$  は事前にはわかっていないのであるから、(7・4)式の条件を満たしているかどうかを確かめることはむづかしい。また、5章でそうであったように、(7・2)式のある形が与えられたとき、(7・4)の条件を満たさなくても収束するようなアルゴリズムが得られれば非常に有効であろう。

そこで逐次代入法の一般化アルゴリズムとして次のような繰返し法を考える。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \alpha \{x_n - f(x_n)\} \\ &= (1 + \alpha)x_n - \alpha f(x_n) \end{aligned} \quad (7.5)$$

この計算アルゴリズムを修正逐次代入法と呼ぶことにする。(7・5)式で  $\alpha = -1$  とすれば逐次代入法になる。(7・2)式の解の真値を  $x^*$  とするとき、

$$\Delta x_{n+1} = (1 + \alpha)\Delta x_n - \alpha \Delta f_n \quad (7.6)$$

を得る。ただしここで

$$\begin{aligned} \Delta x_n &\triangleq x_n - x^* \\ \Delta f_n &\triangleq f(x_n) - f(x^*) \end{aligned}$$

である。従って

$$\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} = (1 + \alpha) - \alpha \frac{\Delta f_n}{\Delta x_n} \quad (7.7)$$

が得られる。逐次法の収束の条件は

$$\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} < 1$$

であるから、 $x_n$  が真値  $x^*$  に十分近いとすると、(7・7)式の関係から(7・5)の逐次法の収束条件は

$$|1 + \alpha(1 - f'(x^*))| < 1 \quad (7.8)$$

となる。(7・8)の不等式条件から、 $f'(x^*)$  に対しての取り得る値が得られるが、その領域を図7に示しておく。これからわかるように、 $|f'(x^*)| > 1$  の場合でも(7・5)式の  $\alpha$  として適当な値を用いれば修正逐次代入法は真値に収束することができる。逐次代入法は  $\alpha = -1$  の場合であるから、このときには  $-1 < f'(x^*) < 1$  の場合にだけ収束するということが図7から容易に理解することができる。

ここで、収束の速さについてふれておく。 $\alpha$  が(7・8)式の条件を満たせば収束は保証されるのであるが、図7の  $f'$  軸の近くの値を用いるとステップ巾が小さくなって収束が遅くなり、双曲線  $\alpha(f'(x^*) - 1) = 2$  の近くの値を用いると振動的になってやはり収束が遅くなる。双曲線上の値  $\alpha = \frac{2}{f'(x^*) - 1}$  の半分すなわち  $\alpha = \frac{1}{f'(x^*) - 1}$  を用いると(7・5)式は

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x^*)}$$

となってNewton-Raphson 法と等しくなって解の収束がよくなる。5章で示したアルゴリズムを用いて計算した時に、収束しない場合や収束が遅い場合には、以上の検討結果を参考にして、アルゴリズムの改良を行えばよい。

## §8 まとめ

システム外乱が加わっている制御対称に対してフィードバック制御を行なう場合、閉ループ系の状態変数のばらつきがどの程度になるかということは、設計者にとって重要な関心事である。本報告では、線形定係数システムに有色のシステム外乱が加わっている場合について、

① 設計目標として、ある望ましい状態共分散マトリクスが与えられたとし、それを実現するような状態フィードバック系を構成するという共分散指定問題を定式化し、

② 解の存在の仮定の下に与えられた状態共分散マトリクスを実現し、さらに制御エネルギー  $E\{u^T R u\}$  が最小になるという意味で最適なフィードバックゲインの満たすべき必要条件式を導き

③ 逐次代入法を適用してその数値解を得るための計算アルゴリズムを与えた。そして、

④ 不規則突風中を飛行する航空機の制御問題を例題として取り上げ、その数値例を解くことによって本研究で得られた結果を例証するとともに、共分散指定問題の物理的意味を明らかにした。

⑤ さらに、逐次代入法を  $|f'| \geq 1$  の場合に拡張することを意図して、修正逐次代入法について検討し、収束条件を明らかにすることによって逐次代入法のアルゴリズムを補足した。

以上によって有色外乱を受ける場合の共分散指定問題に対する解法を用意することができた。

なお、解の存在と一意性に関する問題は今後に残されており、また一部の状態量しか観測できないような出力フィードバックの場合の共分散指定問題も今後検討されるべき課題である。

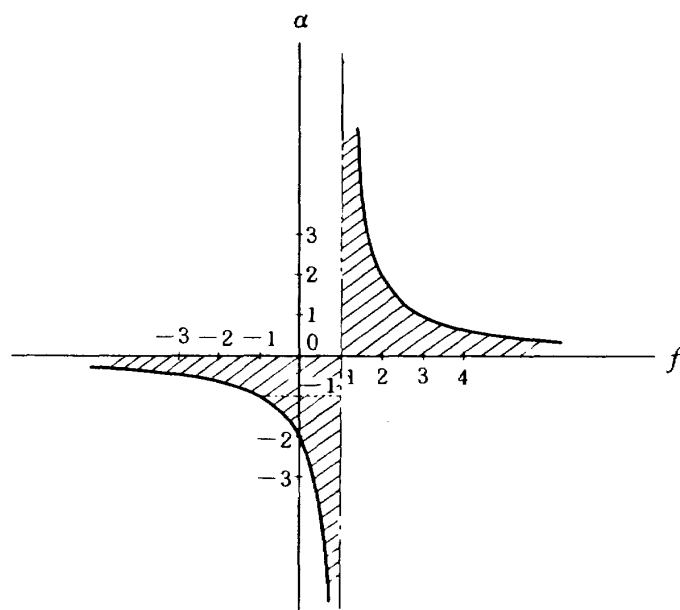


図 7 修正逐次代入法の収束域

## References

- (1) J.J.Florentin, "Optimal Control of Continuous Time, Markov, Stochastic Systems" J.Electron Contr., vol.10, pp473-488, 1961
- (2) S.Axsäter, "Sub-optimal Time-variable Feedback Control of Linear Dynamic Systems with Randon Inputs," Int.J.Control, vol.4, No6, pp549-566, 1966
- (3) M.Athans, "The Role and Use of the Stochastic Linear-Quadratic-Gaussian Problem in Control System Design," IEEE Trans.on Automatic Control, vol.AC-16, pp. 529-552, 1971
- (4) 永安正彦, "外乱を受ける線形状態フィードバック系の状態変数の共分散指定による設計法," 航技研報告TR-492
- (5) A.Papoulis, "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes," McGraw-Hill, 1965
- (6) Bryson and Ho, "Applied Optimal Control," John Wiley & Sons 1975
- (7) H.Kwakernaak, "Linear Optimal Control Systems," Wiley-Interscience, 1972
- (8) M.Athans, "The Matrix Minimum Principle, " Information and Control, vol.11, pp592-606, 1968
- (9) B.Etkin, "Dynamics of Flight," John Wiley & Sons, Inc., 1959
- (10) B.Etkin, "Dynamics of Atmospheric Flight," John Wiley & Sons, Inc. 1972.
- (11) McRuer "Aircraft Dynamics and Automatic Control," Princeton Univ. Press.1973
- (12) U.S.Air Force, "MIL-F-8785B(ASG)," 1969
- (13) 広末 他, "クインエア機の風洞試験," 航技研資料 TM-61, 1965
- (14) 森 他, "クインエア機の縦の安定操縦微係数の推定," 航技研報告TR-406, 1975
- (15) 渡辺 他, "QA機のフレア制御シミュレーション実験," 航技研資料TM-307, 1976
- (16) F.Hildebrand, "Introduction to Numerical Analysis," .McGraw-Hill, 1956.

付 録

突風のモデル

通常不規則突風の性質はパワースペクトル密度や確率密度関数などの統計量で表わされる。従来からよく知られている突風のパワースペクトルのモデルとしてはDrydenモデルと von Kalmanモデルがある。上下突風に関する両モデルは次のように表わされる。

$$\text{Dryden } \phi(Q) = \frac{\sigma_{wg}^2 L}{\pi} \frac{1 + 3(LQ)^2}{[1 + (LQ)^2]^2} \quad (A1)$$

$$\text{Von Kalman } \phi(Q) = \frac{\sigma_{wg}^2 L}{\pi} \frac{1 + \frac{8}{3}(1.339LQ)^2}{[1 + (1.339LQ)^2]^{11/6}} \quad (A2)$$

ここで  $Q$  は空間周波数 (spacial frequency) であって、突風の波長 (wave length) を  $\lambda$  とすると  $Q = \frac{2\pi}{\lambda}$  で与えられる (図 A-1)。 $\sigma_{wg}$  は不規則突風の標準偏差であり、平均値を 0 とし、次式で定義される。

$$\sigma_{wg}^2 \triangleq E\{w_g^2(t)\}$$

水平距離  $r$  はなれた 2 点の上下突風の相関関数を

$$R(r) \triangleq E\{w_g(x)w_g(x+r)\}$$

とする (図 A-2)。そして、正規化された相関関数を新たに

$$g(r) \triangleq \frac{R(r)}{\sigma_{wg}^2}$$

とすると、 $L$  は次式で定義される。

$$L \triangleq \int_0^\infty g(r) dr$$

$L$  は積分スケール (integral scale) 又は単にスケールと呼ばれ、どの程度の距離まで突風の相関が顕著であるかを示す尺度である。

Dryden モデルでは周波数が高くなっていくと、周波数の -2 乗でパワーが減少していくのに対し、von-Kal-

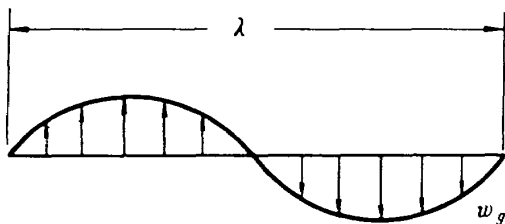


図 A-1 正弦波状突風

manモデルでは  $-\frac{5}{3}$  乗で減少してゆく。そして高周波帯域では von Kalmanモデルの方が実測データとよく一致しているとされている。然しながら、航空機の飛行性の解析に対しては、どちらのモデルを用いても得られる結果に大きな違いがないことが知られている。とくに機体の構造解析を含まない場合には Drydenモデルで十分である。また、Drydenモデルは有理式で表わされているので、von Kalmanモデルに比べて解析や計算が非常に容易になる。特に、これから示すような突風の時間領域でのモデルを構成する場合には von Kalmanモデルでは実現できないので、おのずから Drydenモデルを用いざるを得ない。

以下 Drydenモデルに関してその時間領域での成形フィルタを求める。なお、Drydenモデルのパワースペクトルの 1 例を図 A-4 に示しておく。

さて、(A1) 式のパワースペクトルは空間周波数で表現されているが、突風中を飛行する航空機の運動を解析するには、これを時間領域で表現することが必要である。航空機が速さ  $V$  で、波長  $\lambda$  の突風中を飛行していると、さらに凍結突風 (frozen gust) の仮定をおくと、単位時間当りに通過する波数  $f$  は

$$f = \frac{V}{\lambda}$$

であるから、時間周波数 (temporal frequency)  $\omega$  は

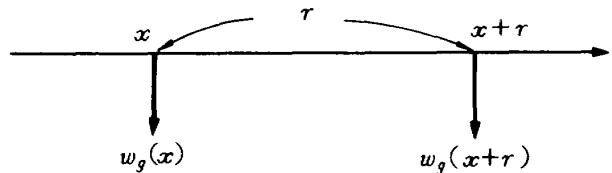


図 A-2 水平面内での上下突風

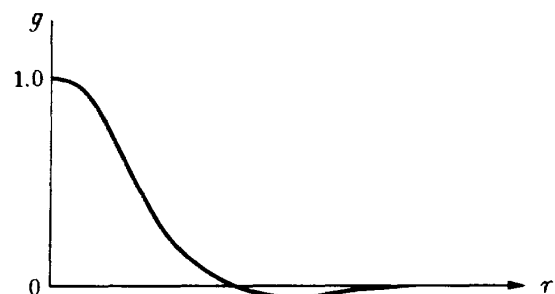


図 A-3 正規化された相関関数

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi V}{\lambda} = VQ \tag{A3}$$

となる。さて、Drydenモデルのパワースペクトルを時間周波数 $\omega$ で表現したものを $\Phi(\omega)$ とすると空間周波数で表わしたパワースペクトル $\phi(Q)$ との間に

$$\int_0^\infty \phi(Q) dQ = \int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega = \sigma_{wg}^2 \tag{A4}$$

の関係が成り立たなければならない。一方(A3)式か

$$Q = \frac{\omega}{V} \quad dQ = \frac{d\omega}{V}$$

が得られるからこれを(A4)式に代入すると

$$\int_0^\infty \phi\left(\frac{\omega}{V}\right) \frac{d\omega}{V} = \int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega$$

となり、従って

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{V} \phi\left(\frac{\omega}{V}\right)$$

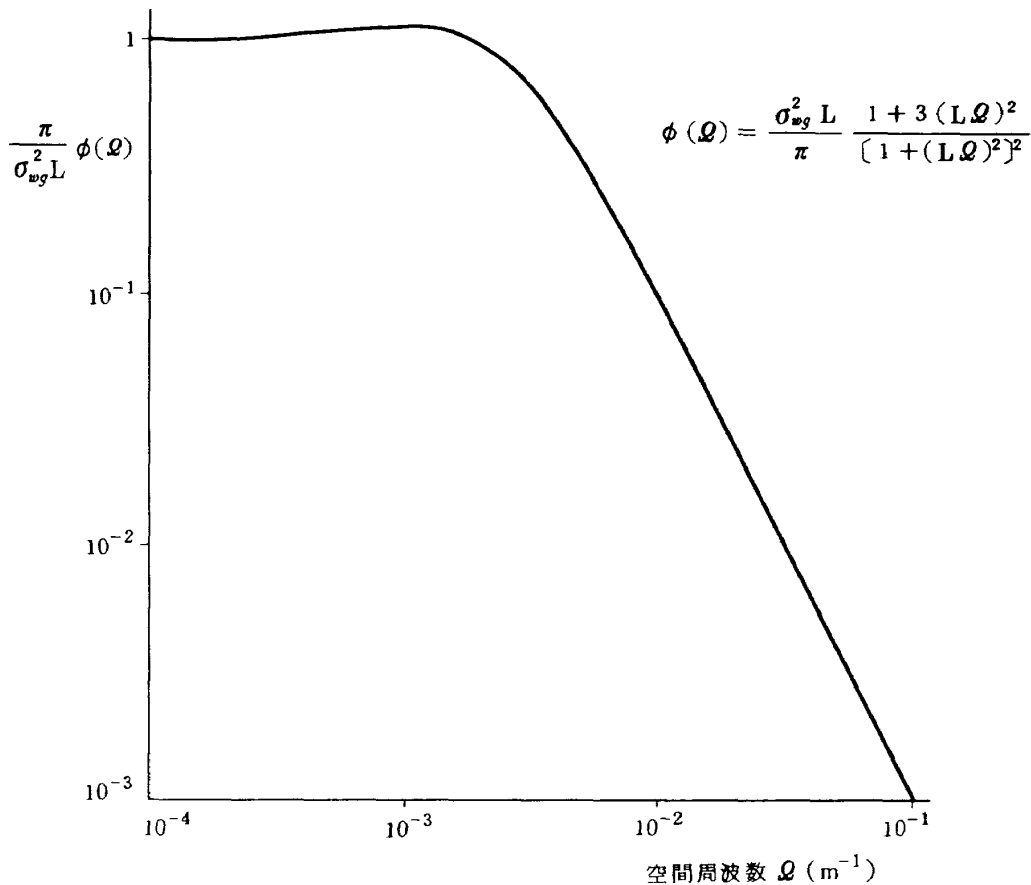
が得られる。すなわち、時間周波数 $\omega$ で表わしたDrydenモデルのパワースペクトルは

$$\Phi(\omega) = \frac{\sigma_{wg}^2 L}{\pi V} \frac{1 + \frac{3L^2}{V^2} \omega^2}{\left[1 + \frac{L^2}{V^2} \omega^2\right]^2} \tag{A5}$$

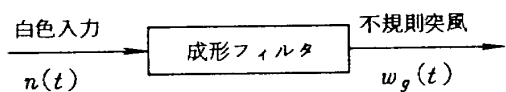
となる。

成形フィルタ

次に(A5)式で表わされるパワースペクトルから、不規則突風の成形フィルタを求める。すなわち、図A-5に示すように白色正規確率過程 $n(t)$ を入力とし、その出力 $w_g(t)$ のパワースペクトルが(A5)式で示されるものと一致するような線形フィルタを求める。(A5)式のパワースペクトルの分母が $\omega$ に関して4次の多項式であるので2次の線形フィルタで実現できる。フィルタの入出力関係は内部状態量を座標変換しても影響を受けないから、成形フィルタは一般性を失うことなく、次の可制御正準形におくことができる。



図A-4 Dryden型パワースペクトル



図A-5 不規則突風の成形フィルタ

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} n(t) \quad (A6)$$

$$w_g(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \quad (A7)$$

ここで  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  は成形フィルタの内部状態量であり,  $n(t)$  は次の性質をもつ定常な白色正規確率過程である。

$$\begin{aligned} E \{ n(t) \} &= 0 \\ E \{ n(t) n(\tau) \} &= N \delta(t - \tau) \end{aligned}$$

また, 上記成形フィルタが漸近安定であるためには  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  でなければならない。(A6)(A7)式により,  $n(t)$  から  $w_g(t)$  への伝達関数  $H(s)$  は

$$H(s) = \frac{w_g(s)}{n(s)} = \frac{c_1 s + c_2}{s^2 + a_2 s + a_1}$$

となる。ここで,  $w_g(t)$  のパワースペクトル  $\Phi(\omega)$  を  $n(t)$  のパワースペクトル  $\Phi_n(\omega) = N$  を用いて表わすと

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= H(j\omega) H^*(j\omega) \Phi_n(\omega) \\ &= \frac{c_1^2 + c_2^2 \omega^2}{a_1^2 + (a_2^2 - 2a_1) \omega^2 + \omega^4} \cdot N \quad (A8) \end{aligned}$$

と書ける。(A8)式の第2辺の分母が(A5)式の分母の形になるためには

$$a_2^2 - 2a_1 = 2a_1$$

でなければならない。従って  $a_2^2 = 4a_1$  となって(A8)式は

$$\Phi(\omega) = \frac{1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} \omega^2}{\left[1 + \frac{1}{a_1} \omega^2\right]^2} \frac{c_1^2}{a_1} N \quad (A9)$$

となる。次に, (A9)式を(A5)式と比較すると

$$a_1 = \frac{V^2}{L^2}$$

でなければならない。従って  $a_2$  は

$$a_2 = \frac{2V}{L}$$

となる。また, 分子の係数を比較すると

$$\frac{c_2}{c_1} = \pm \frac{\sqrt{3}L}{V}$$

の関係を得る。ここで,  $c_1, c_2$  は一意には決まらない。いま仮に,  $c_1 = -a_1$  とおくと

$$c_1 = -\frac{V^2}{L^2}$$

$$c_2 = -\frac{\sqrt{3}V}{L}$$

が一つの組合せとして得られる。以上から, (A5)式のパワースペクトルを有する不規則突風  $w_g(t)$  の成形フィルタは次のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{V^2}{L^2} & -\frac{2V}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} n(t) \quad (A10)$$

$$w_g(t) = \begin{bmatrix} -\frac{V^2}{L^2} & -\frac{\sqrt{3}V}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}$$

ただし  $n(t)$  は次の性質をもつ白色正規確率過程である。

$$\begin{aligned} E \{ n(t) \} &= 0 \\ E \{ n(t) n(\tau) \} &= \frac{\sigma_{w_g}^2 L}{\pi V} \delta(t - \tau) \end{aligned}$$



## 既 刊 報 告

TR-511	シミュレーション用複合計算機 (FSX-II) の データ転送と制御 Data Transmission and Control in Computer Complex (FSX-II) for General Purpose Flight Simulator	1977年 8 月	原 田 公 一
TR-512	最小歪エネルギー条件による構造設計 An Optimura Design by Minimum Strain Energy Criterion	1977年 9 月	小 河 昭 紀
TR-412T	Relation between Scatter of Fatigue Life and S-N Curve of 2024-T4 Aircraft Structural Aluminium Alloy Specimens with a Sharp Notch ( $K_t=8.25$ ) under Constant Temperature and Humidity Con- ditions	Oct. 1977	Toshiyuki SHIMOKAWA and Yasumasa HAMAGUCHI
TR-513	しま再生装置を利用したモアレ法によるひず み解析 Strain Analysis by Moire Method using Fringe Reconstructer	1977年10月	越 出 慎 一
TR-514	オイルミスト, ジェット潤滑玉軸受の高 $dn$ 値における性能 Performance of Ball Bearings with Oil Mist and Jet Lubrication at High $dn$ Values	1977年10月	宮 川 行 雄・関 勝 美・ 野 溝 国 生
TR-515	エンジン特性の実時間シミュレーション (II) シミュレーション・プログラム Real-Time Simulation of Jet Engine with Digital Computer (II)	1977年10月	杉 山 七 契・西 尾 健 二・ 越 沼 威
TR-516	レーザ・ホログラフィによる流れの可視化予 備実験 Proliminary Investigation of Laser Holo- graphic Flow Visualization	1977年11月	原 亘 利
TR-517	セクタ型高圧燃焼器試験装置 A High-Pressure, Sector-Shaped Combustor Test Facility for Advanced Turbofan	1977年11月	鈴 木 邦 男・西 尾 健 二・ 堀 内 正 司・越 沼 威・ 岡 部 裕 二 郎・石 原 久 蔵
TR-305T	Computer Algorithms for Computation of Kinematical Relation for Three Attitude Angle Systems	Nov. 1977	Yoshiaki OHKAMI
TR-464T	A New Plotting Method to Estimate the Population Parameters of the Normal Distribution	Nov. 1977	Toshiyuki SHIMOKAWA
TR-518	風洞模型の精度と試験結果について Effect of Imperfect Wind-Tunnel Model Configuration on Aerodynamic Perform- ance	1977年12月	鈴 木 弘 一・竹 内 理
TR-519	炭化珪素複合材の強度と疲れ強度 Static and Elexural Fatigue Strength of Silicon Carbide Fiber Composite	1977年12月	古 田 敏 康・松 嶋 正 道・ 野 口 義 男

---

## 航 空 宇 宙 技 術 研 究 所 報 告 520 号

昭 和 52 年 12 月 発 行

発 行 所 航 空 宇 宙 技 術 研 究 所  
 東 京 都 調 布 市 深 大 寺 町 1880  
 電 話 武 蔵 野 三 鷹 (0422) 47-5911 (大 代 表) 182  
 印 刷 所 株 式 会 社 東 京 プ レ ス  
 東 京 都 板 橋 区 桜 川 2-27-12

---

