

**航空宇宙技術研究所報告**  
TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-604

波板の圧縮座屈特性の解析

三本木 茂夫

1980年4月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 波板の圧縮座屈特性の解析\*

三本木 茂夫\*\*

## Elastic Buckling Analysis of Corrugated Plates Under Uniform Compression

By

Shigeo SANBONGI

### ABSTRACT

The buckling behavior of corrugated plates under compressive loadings is presented. The corrugated plate is divided into curved strip elements and applied to the finite element method by using trigonometric functions and polynomial functions, corresponding to axial and circumferential directions respectively.

Numerical results are presented for corrugated plates of infinite width and finite width. In the range of short panel, axial length is small compared with the dimensions of corrugation, and the shell-type buckling mode is dominant. Upon increasing the axial length, plate-type buckling takes place at a length greater than critical value.

Design formulae to predict the minimum load of shell-type buckling, plate-type buckling load, and critical length are obtained based on the numerical results.

### 1. まえがき

航空機の機体構造においては、薄板と縦通材を組み合わせた補強板構造が主に採用されてきたが、近年、高温環境下での構造重量の軽減に有望な特性を持つ advanced structure が注目されている。<sup>(1)(2)</sup>この構造は、金属の薄板に種々の断面形状のビードを付けて成形した、いわゆる波板構造に類するものであって、座屈強度が優れている。一方、機体構造重量軽減を図る上で有力な方法として、炭素繊維を使用した複合材 (CFRP) の適用も積極的に進められている。複合材構造では強度ならびに成形法との関連から、板と補強材とを一体加工する傾向にあり、構造要素に波板が採用されている。<sup>(3)</sup>航空機以外の分野でも波板構造は古くから使用されているが、一般に、波板断面寸法と較べて母線方向が長い形状で用いられ、波板と剛性が等価な直交異方性板とみなした扱いが可能な場合が多い。航空機構造においては、このような

扱いが不適當である短かい波板も使用されるので、波板の座屈強度に関する詳細な研究が必要である。本報告は、これらの問題の内、円筒曲面で構成された波板の圧縮座屈特性を有限要素法を用いた数値解析によって調べたものである。

### 2 解析法

図1に示す曲面帯板要素で波板をモデル化する。母線方向の境界 ( $x=0$  および  $x=L$ ) では、 $v=w=\partial^2 w/\partial x^2=0$  および  $\sigma_x=\sigma_x^0$  の単純支持を仮定し、変位関数を次式で表わす。

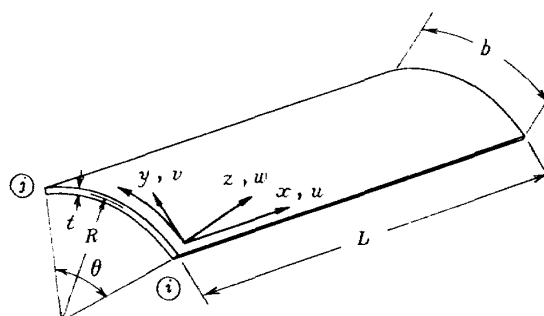


図1 曲面帯板要素

\* 昭和55年2月7日受付

\*\* 機体第二部

$$\begin{aligned} u &= \{Y\}^T \{ \delta u \} \cos(n\pi x/L) \\ v &= \{Y\}^T \{ \delta v \} \sin(n\pi x/L) \\ w &= \{Y\}^T \{ \delta w \} \sin(n\pi x/L) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで,  $n$  は母線方向座屈半波数であり,

$$\{Y\}^T = [ 1-3\eta^2+2\eta^3, (\eta-2\eta^2+\eta^3)b, 3\eta^2-2\eta^3, (-\eta^2+\eta^3)b ] \quad (2)$$

$$\eta = y/b, \quad b = R\theta$$

$$\{ \delta u \} = \{ u_i, (\partial u / \partial y)_i, u_j, (\partial u / \partial y)_j \}$$

$$\{ \delta v \} = \{ v_i, (\partial v / \partial y)_i, v_j, (\partial v / \partial y)_j \}$$

$$\{ \delta w \} = \{ w_i, (\partial w / \partial y)_i, w_j, (\partial w / \partial y)_j \}$$

を表わす。  $u_i, u_j$  などは  $y=0$  および  $y=b$  における値 (いわゆる節点変位) を表わす。

ひずみ-変位関係式に Sanders の式を用いる。(4) すなわち,

線形膜ひずみ:

$$\epsilon_x^L = \partial u / \partial x$$

$$\epsilon_y^L = \partial v / \partial y + w/R \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y$$

曲げひずみ:

$$\epsilon_x^z = -z \cdot \partial^2 w / \partial x^2$$

$$\epsilon_y^z = -z \{ \partial^2 w / \partial y^2 - (1/R)(\partial v / \partial y) \}$$

$$\gamma_{xy}^z = -z \{ 2\partial^2 w / \partial x \partial y - (3/2R)(\partial v / \partial x) + (1/2R)(\partial u / \partial y) \} \quad (4)$$

非線形膜ひずみ:

$$\epsilon_x^N = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) \right]^2 + \frac{1}{2} (\partial w / \partial x)^2$$

$$\epsilon_y^N = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) \right]^2 + \frac{1}{2} (\partial w / \partial y - v/R)^2$$

$$\gamma_{xy}^N = (\partial w / \partial x)(\partial w / \partial y) - (v/R)(\partial w / \partial x) \quad (5)$$

剛性マトリックス

式(1), (2)を式(3)および式(4)に代入して, 線形膜ひずみおよび曲げひずみをそれぞれ  $\{ \epsilon^L \} = \{ B^L \} \{ \delta \}$ ,  $\{ \epsilon^z \} = z \{ B^z \} \{ \delta \}$  の形に表示する。ここで  $\{ \delta \} = \{ \delta_u, \delta_v, \delta_w \}$

$$\{ B^L \} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -[Y] (n\pi/L) \sin(\xi) & & & 0 & & 0 \\ & 0 & & [Y'] \sin(\xi) & & [Y] (1/R) \sin(\xi) \\ [Y'] \cos(\xi) & & & [Y] (n\pi/L) \cos(\xi) & & 0 \end{array} \right] \quad (6)$$

$$\{ B^z \} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & [Y] (n\pi/L)^2 \sin(\xi) \\ & 0 & & [Y'] (1/R) \sin(\xi) & & -[Y''] \sin(\xi) \\ -[Y'] (1/2R) \cos(\xi) & & & [Y] (3\pi n/2RL) \cos(\xi) & & -[Y'] (2\pi n/L) \cos(\xi) \end{array} \right] \quad (7)$$

ここで  $\xi = n\pi x/L$ ,  $[Y'] = [\partial Y / \partial y]$ ,  $[Y''] = [\partial^2 Y / \partial y^2]$  を表わす。

応力-ひずみ関係式  $\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \}$  を用いると有限要素法の一般的計算手順<sup>(5)</sup>により, 剛性マトリックスが次式で求められる。

$$\begin{aligned} [k] &= t \cdot \iint \{ B^L \}^T [D] \{ B^L \} dx dy \\ &+ \frac{t^3}{12} \iint \{ B^z \}^T [D] \{ B^z \} dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

ここで  $t$  は要素の板厚を表わす。

この計算結果を直交異方性材料の場合について表わすと次のようになる。

$$[k] = \begin{bmatrix} \delta_u & \delta_v & \delta_w \\ \hline k_{uu} & k_{uv} & k_{uw} \\ k_{vu} & k_{vv} & k_{vw} \\ \hline k_{wu} & k_{wv} & k_{ww} \end{bmatrix} \quad (9)$$

剛性マトリックスを式(9)の部分マトリックスで表わす。

これと対応する節点変位ベクトルは

$$\begin{aligned} \{ \delta_u \} &= \{ u_i, \partial u_i / \partial y, u_j, \partial u_j / \partial y \} \\ \{ \delta_v \} &= \{ v_i, \partial v_i / \partial y, v_j, \partial v_j / \partial y \} \\ \{ \delta_w \} &= \{ w_i, \partial w_i / \partial y, w_j, \partial w_j / \partial y \} \end{aligned} \quad (10)$$

であり, 添字  $i, j$  は図1の“節点”④, ⑤に対応する。

応力-ひずみマトリックスは

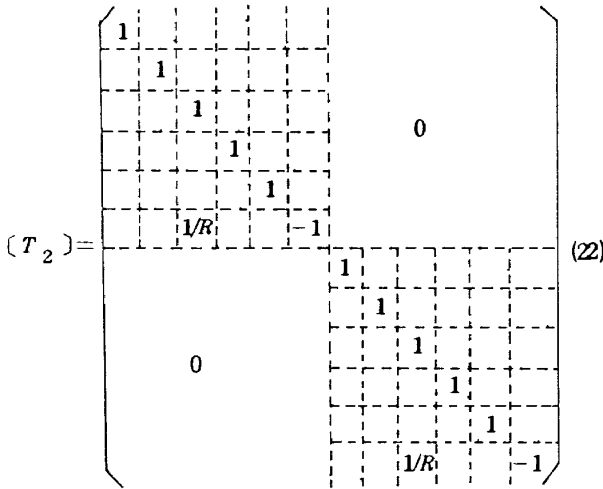
$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

であるとする。



ここで

$$\{\bar{\delta}\} = \{u_i, \partial u_i / \partial y, v_i, \partial v_i / \partial y, w_i, \theta_i, u_j, \partial u_j / \partial y, v_j, \partial v_j / \partial y, w_j, \theta_j\} \quad (21)$$



$$\{\bar{k}\} = [T_2]^T \{k^*\} [T_2] \quad (23)$$

曲率が不連続な節点の処理

図1および2に示すように、z座標の負の側に曲率中心のある場合の曲率を正にとるので、図2の要素ijでは曲率が正であり、要素jkでは曲率が負である。節点jでは曲率が不連続であるからu, v, w, θ以外の節点パラメータは一般に不連続となる。したがって、構造全体のマトリックスの組立ての際に、要素ijのj節点に関する∂u/∂y, ∂v/∂yと要素jkのj節点に関する∂u/∂y, ∂v/∂yをそれぞれ独立な節点パラメータとして扱おう。

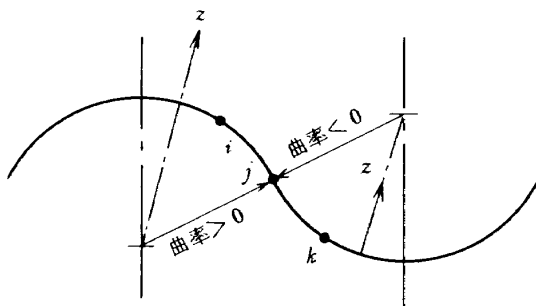


図2 曲率が不連続となる点

座屈応力の計算

式(19), (23)による変換を行なった剛性マトリックスおよび初期応力マトリックスを波板全体について組立たものをそれぞれ[K]および[K<sub>G</sub>]で表わすと、固有値方程式が次のように求められる。

$$([K] + \lambda [K_G]) \{\delta\} = 0 \quad (24)$$

ただし、式(24)の[K<sub>G</sub>]マトリックスはσ<sub>x</sub><sup>0</sup> = -1の基準値を用いて計算してあるものとする。また、式(12), (15)

のマトリックスにはx方向の座屈半波数nが含まれているので、n = 1, 2, 3, ……と与え、これに対応する固有値λを計算して最小値λ<sub>min</sub>を求める(σ<sub>cr</sub> = λ<sub>min</sub> ⋅ σ<sub>0</sub>)

3. 数値解析結果

本方法による解の精度を調べるために、円筒の軸圧縮座屈についてまず計算し、理論解と比較した。半径R = 30, 板厚 t = 1, ヤング率 E = 7000, ポアソン比 ν = 0.3 の円筒シェルの半円周部分を20要素に分割した。理論値には、軸方向座屈波長の短い場合に対して、円筒シェルの古典座屈値

$$\sigma_C = Et / [R\sqrt{3(1-\nu^2)}]$$

を用い、波長の長い場合に対してはEuler座屈値

$$\sigma_E = \pi^2 EI / (l^2 A)$$

を用いた。ここで、l = L/n, I = 円筒の断面二次モーメント, A = 断面積を表わす。これらに対する計算結果を下記に示す。

l = 10の場合	l = 3000の場合
理論値 σ <sub>C</sub> = 141.2	理論値 σ <sub>E</sub> = 3.454
計算値 = 141.4	計算値 = 3.453

3.1 無限巾の波板の座屈特性

y方向に無限に伸びている波板が一様な圧縮応力状態(σ<sub>x</sub>)にある場合の座屈応力を、多くの形状パラメータに対して計算した。構造形状および変形の周期性を考慮して、実際の解析領域に図3に示すような波板断面形状の一周期の部分を取り、両端(p, q)の変位が等しいと云う条件、{δ}<sub>p</sub> = {δ}<sub>q</sub>を採用した。

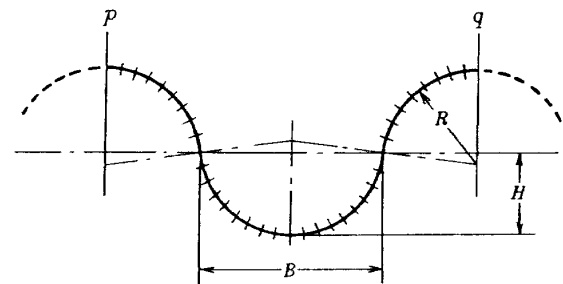


図3 解析領域

要素分割は、円筒の計算例を参考に、p, q間を36要素に分割した。形状パラメータには、波板断面の扁平率H/Bおよび板厚比t/Bをとり、それぞれ0.1 ≤ H/B ≤ 0.5 (半円弧) および 1/150 ≤ t/B ≤ 1/25の範囲を扱った。形状パラメータには、この他にx方向(波板の母線方向)の長さを表わすL/Bがあるが、式(1)の変位関数から導びかれた式(12), (15)のマトリックスはx方向座屈半波長 l = L/n で表わされるので、数値計

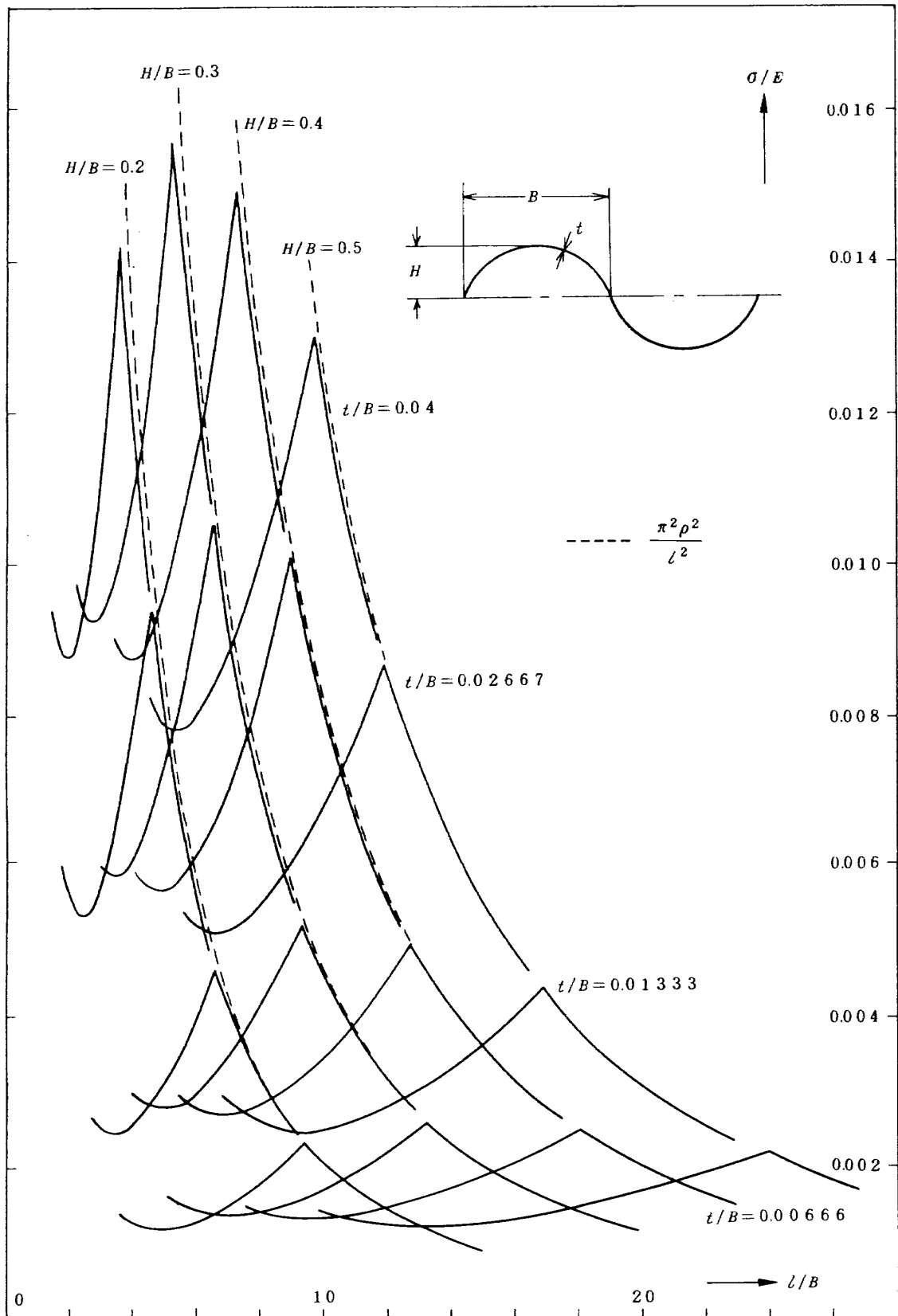


図4 座屈応力の計算結果

算は  $l/B$  をパラメータにとって行なった。

図 4 にこれらの形状パラメータで整理した計算結果を示す。 $H/B=0.1$  は非常に扁平な波板であり、座屈応力も他と較べてかなり低いので同図では省略してある。

ここで扱った形状パラメータの範囲では、いずれの場合も座屈応力  $\sigma_{cr}$  と波板の母線方向座屈半波長  $l$  との関係が図 5 に示す曲線となり、 $l/B$  の大きさによって座屈モードが次の三種類に明瞭に分類される。

i) シェル・モード・I

$l/B$  が小さい領域で生じ、円筒シェルの軸圧縮座屈モードと類似している。

ii) シェル・モード・II

$l/B$  がある程度大きい領域で生じ、波板断面の変形がわずかであって、円筒シェルが柱として Euler 座屈を起したように、断面全体が横方向に移動するモード。

iii) プレート・モード

$l/B$  が大きい領域で生じ、波板断面の形状を保持して全体が異方性板として座屈するモード。柱の Euler 座

屈と同様に  $1/l^2$  に比例して座屈応力が低下する。

上記の三種類の座屈モードの内、シェル・モード・I は  $l/B$  がかなり小さい場合に限られるので実際の構造要素で現られることは少ないと考えられる。シェル・モード・II は  $l/B$  の範囲が比較的広く、プレート・モードへ移行する手前で最小値を持つと共に、波板を異方性板として扱おうことができる限界と関連している。図 6 はこれらの各モードの計算結果をプロッタで立体的に画かせたものである。帯板要素の場合は  $x$  方向に関して一要素の分割であるが、変形状態を見やすくするために、作画に際しては  $x$  方向に関していくつか分割し、式(1)から各点の変位を求めたものを使用してある。

次に、波板を異方性板とみなせる限界を調べるために、シェル・モード・II とプレート・モードの領域に注目して、無限巾波板の圧縮座屈応力を推定する近似式を作成した。なお、シェル・モード・II を単にシェル・モードと今後は呼ぶことにする。

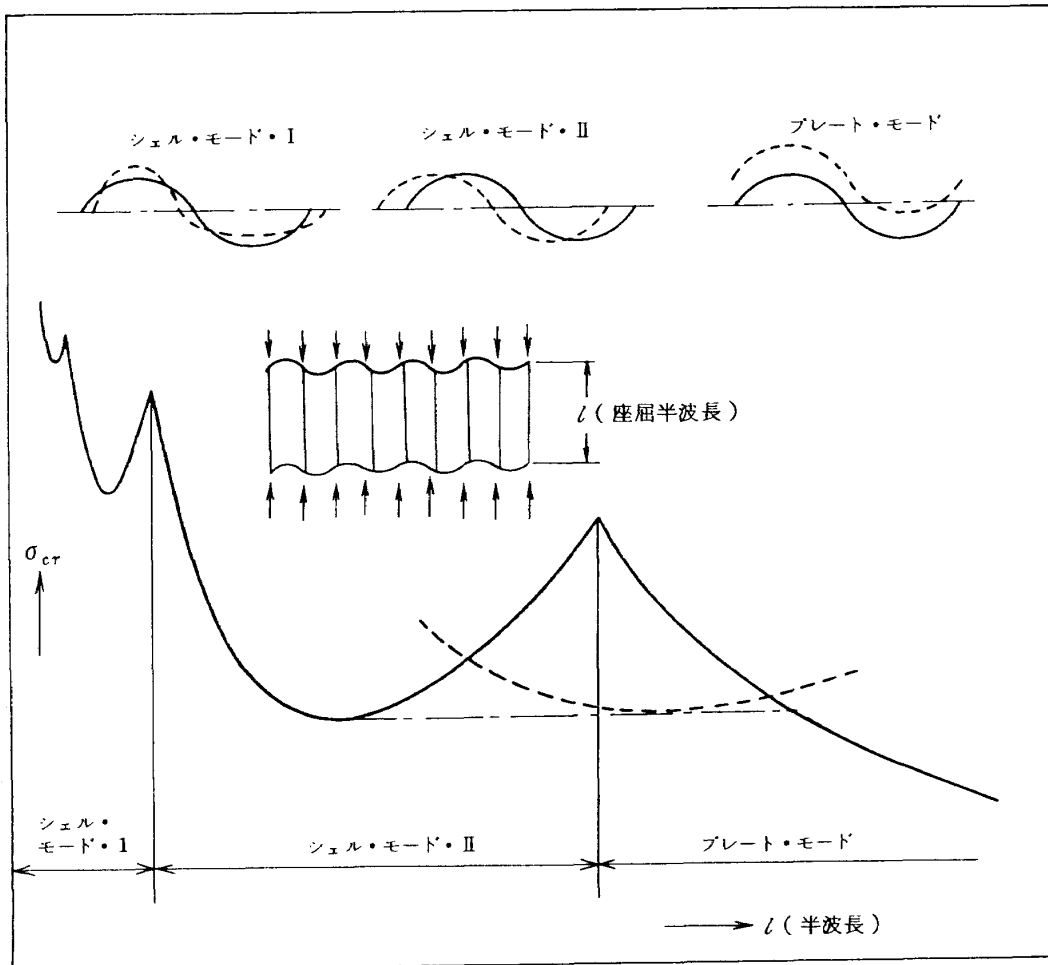


図 5 座屈応力とモード

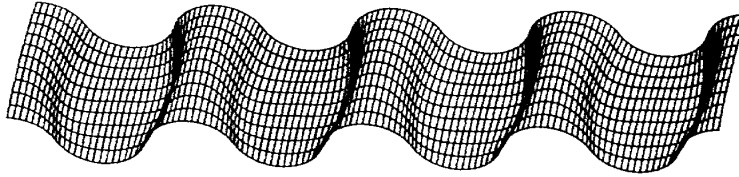


図6 (a) シェル・モード・I

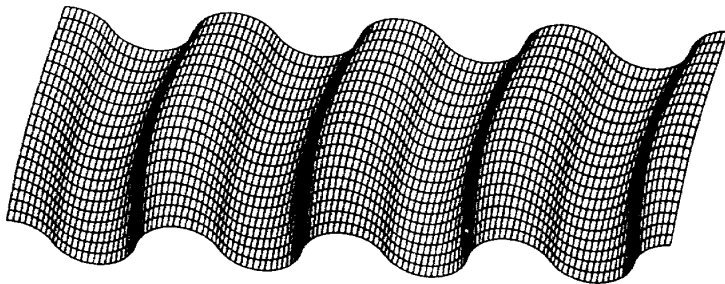


図6 (b) シェル・モード・II (  $n=1$  )

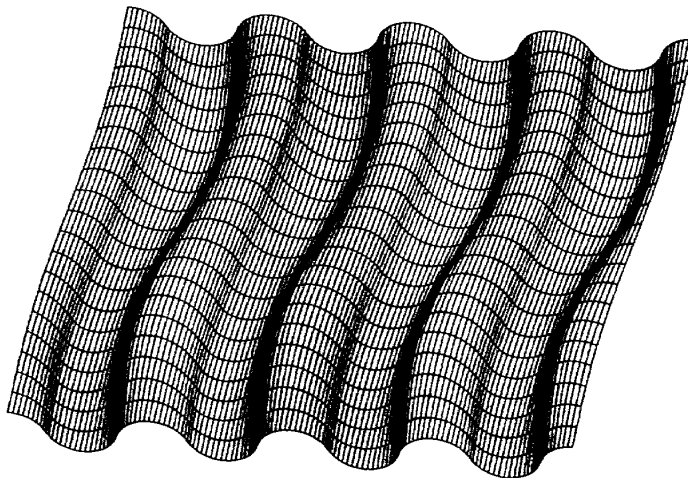


図6 (c) シェル・モード・II (  $n=2$  )

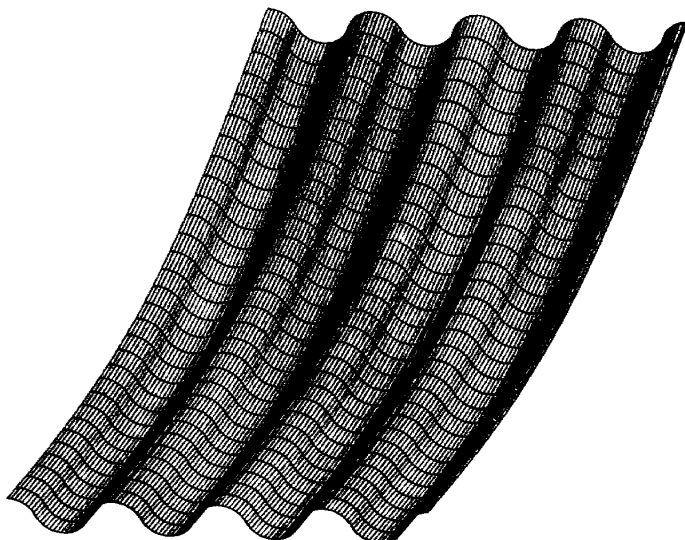


図6 (d) プレート・モード



3.2 座屈応力を推定する近似式 (無限巾)

図4および図5の座屈特性曲線は、横軸としてx方向座屈半波長  $l=L/n$  を無次元化した量を用いて表わしてあるが、これを実長  $L$  を無次元化した  $L/B$  で表わすと図7の実線のようになる。すなわち、 $n=1$  のシェル・モードに続いて  $n=2$  のシェル・モードがあり、その次にプレート・モードが現われる。 $n=1$  の曲線の最小値と  $n=2$  の曲線の最小値は同じ値であるからこれを  $\sigma_{min}$  とし、シェル・モードの範囲の座屈応力を  $\sigma_{cr} = \sigma_{min}$  の直線で代表させれば、この直線とプレート・モードの曲線との交点が、波板を異方性板として扱え得る限界点となる。すなわち、 $l_c$  が限界長であり、 $\sigma_{min}$  がこれに対応する座屈応力である。

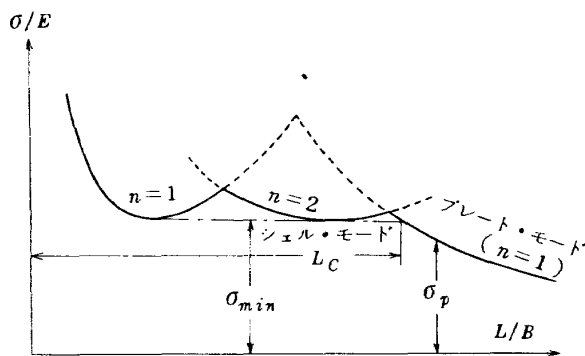


図7 実長  $L$  とモードの関係

$\sigma_{min}$  (シェル・モードの座屈応力)

各形状パラメータに関する一連の数値計算結果(図4)から  $\sigma_{min}$  を求め無次元化したものを扁平率  $H/B$  対

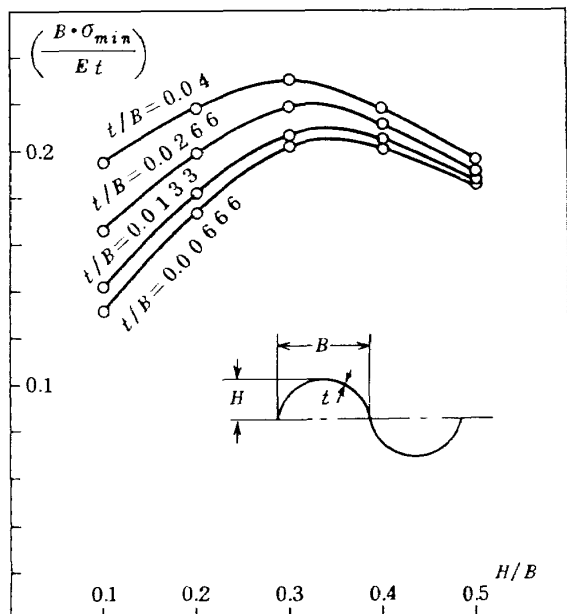


図8  $\sigma_{min}$  と形状パラメータの関係

してプロットすると図8の曲線群が得られる。実用上の  $H/B$  の範囲として  $0.2 \sim 0.5$  をとると、 $t/B =$  一定の各曲線は  $H/B$  の三次式で良好な近似ができる。また、 $H/B =$  一定の場合も  $t/B$  に関する多項式などで近似が可能であるが、ほぼ直線関係にあること、およびなるべく全体の項数を少なくするために  $t/H$  に比例する項で代表させて次のような近似式を作成した。

$$\sigma_{min} = E(t/B) \{ 1.34(H/B) - 2.66(H/B)^2 + 1.42(H/B)^3 + 0.2(t/H) \} \quad \dots (25)$$

適用範囲は  $0.2 \leq H/B \leq 0.5, 1/150 \leq t/B \leq 1/25$  である。

$\sigma_p$  (プレート・モードの座屈応力)

梁の Euler 座屈応力と同様に、次式が良好な近似を与える。

$$\sigma_p = \pi^2 E (\rho/L)^2 \quad (26)$$

ここで、 $\rho$  は波板断面の回転半径であって、薄肉の場合に次式で与えられる。

$$\rho = R \cdot \sqrt{0.5 + \cos^2(\phi/2) - (3 \cdot \sin(\phi)) / (2\phi)}$$

$$R = H \{ 0.5 + 0.125 / (H/B)^2 \} \quad (27)$$

$$\phi = 2 \cdot \tan^{-1} (0.5B / (R - H))$$

図4における点線は上式による計算値をプロットしたものであり、全体にわたって良好な近似を示している。特に、 $H/B$  が  $0.5$  に近く、 $t/B$  が小さいほど有限要素解との一致が良好である。

$L_c$  (異方性板としての限界長)

式(26)と(25)を等置することにより次式で与えられる。

$$L_c = \pi \cdot \rho \sqrt{E / \sigma_{min}} \quad (28)$$

近似式の適用例

式(25)~(28)の近似式を用いて、表1に示す寸法形状の波板の座屈特性を求めると共に、有限要素解も求めて両者の比較を行ない、近似式の有効性を検証した。

表1 板の断面積が一定の波板

B=60.73 E=7210 S·t=一定		
Case	H/B	t/B
1	0.50	0.01269
2	0.458	0.01338
3	0.40	0.01441
4	0.35	0.01533
5	0.30	0.01627
6	0.25	0.01720
7	0.20	0.01806

この波板は、Case-1~Case-7 まで  $H/B$  および

$t/B$  が変化しているが、波板断面の弧長と板厚との積  $S \cdot t$  は一定である。図9に  $\sigma_{min}$  と  $L_c$  に対する計算結果を示す。図中の実線は近似式による計算値であり、丸印および三角印は有限要素解であって、両者はほぼ一致している。

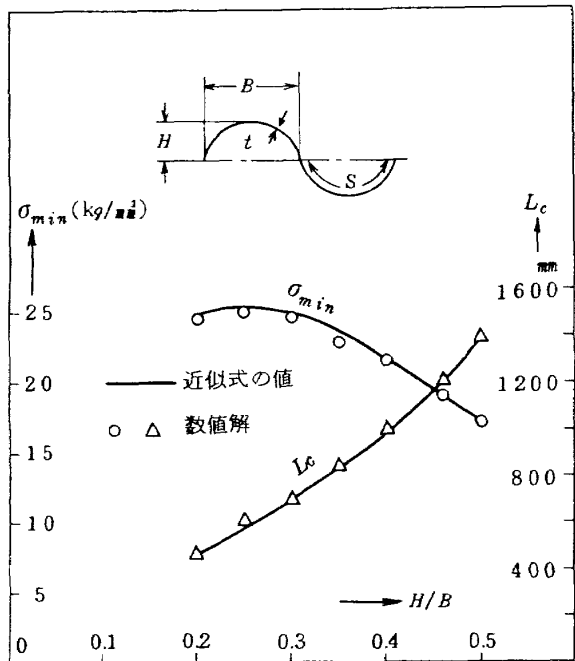


図9 近似式と数値解との比較

図10は近似式を用いて各Caseごとの座屈曲線を表わしたもので、シェル・モードの座屈応力を  $\sigma_{min}$  一定の直線で表わしてある。予想されるように、 $L$ の長いプレート・モードの領域では  $H/B$  の大きい (Case 番号の若い) ほど座屈応力が高いが、限界長以下の短い領域では逆に、 $H/B$  が小さくなると座屈応力が高くなり、今の例では  $H/B=0.25$  程度の形状の場合に  $\sigma_{min}$  が最大となる。

3.3 有限巾の影響

有限巾の影響を調べるために、表1のCase-2 ( $B=60.73$ ,  $H/B=0.458$ ,  $t/B=0.01338$ ) について巾  $W=5$  波長および  $W=10$  波長の場合の座屈応力を各  $L/B$  に対して有限要素法で計算した。両側端の境界条件は単純支持とし、 $w=0$  だけの場合と  $w=v=0$  の場合の両者を扱った。

図11に計算結果を示す。シェル・モードの領域では、巾が5波長および10波長の場合共に、 $w=v=0$  の境界条件の結果が無限巾の場合とほとんど同じ傾向を示している (図中の丸および×印)。一方、 $w=0$  の境界条件に対する結果は、5波長および10波長の場合共に同じ座屈応力で且つ無限巾の場合よりも低い値を示している (図中の四角および三角印)。すなわち、シェル・モードの領域では面内変位  $v$  の影響が大きい。

プレート・モードの領域では、巾が5波長で  $w=v=0$  の境界条件の場合だけが無限巾の場合よりも座屈応力が若干高いが、 $w=0$  だけの境界条件の場合および、巾が10波長の場合はいずれも無限巾の座屈応力に近い値を示している。

等価異方性板との比較

波板の座屈応力の算定を一般には等価な直交異方性板に置き換えて行なうことが多いので、それとの比較検討について以下に述べる。

直交異方性板の曲げモーメントと曲率変化との関係を

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (29)$$

のように表わすと、波板を等価な異方性板とみなした場合の曲げ剛性  $D_{ij}$  は次式で与えられる。<sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} D_{11} &= EI / (2B(1-\nu^2)) \\ D_{12} &= \nu_{yx} \cdot D_{11} \\ D_{22} &= Et^3 B / (12(1-\nu^2) B_w) \\ D_{33} &= Gt^3 B_w / (3B) \end{aligned} \quad (30)$$

ここで

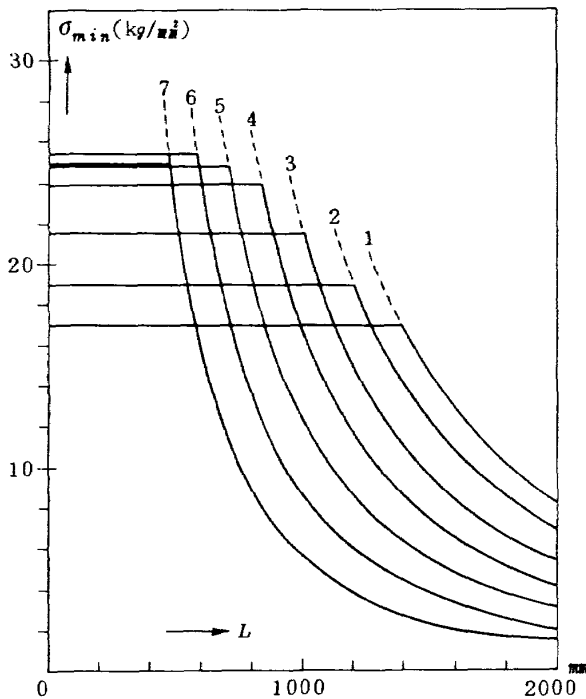


図10  $\sigma-L$  曲線 (表1の場合)

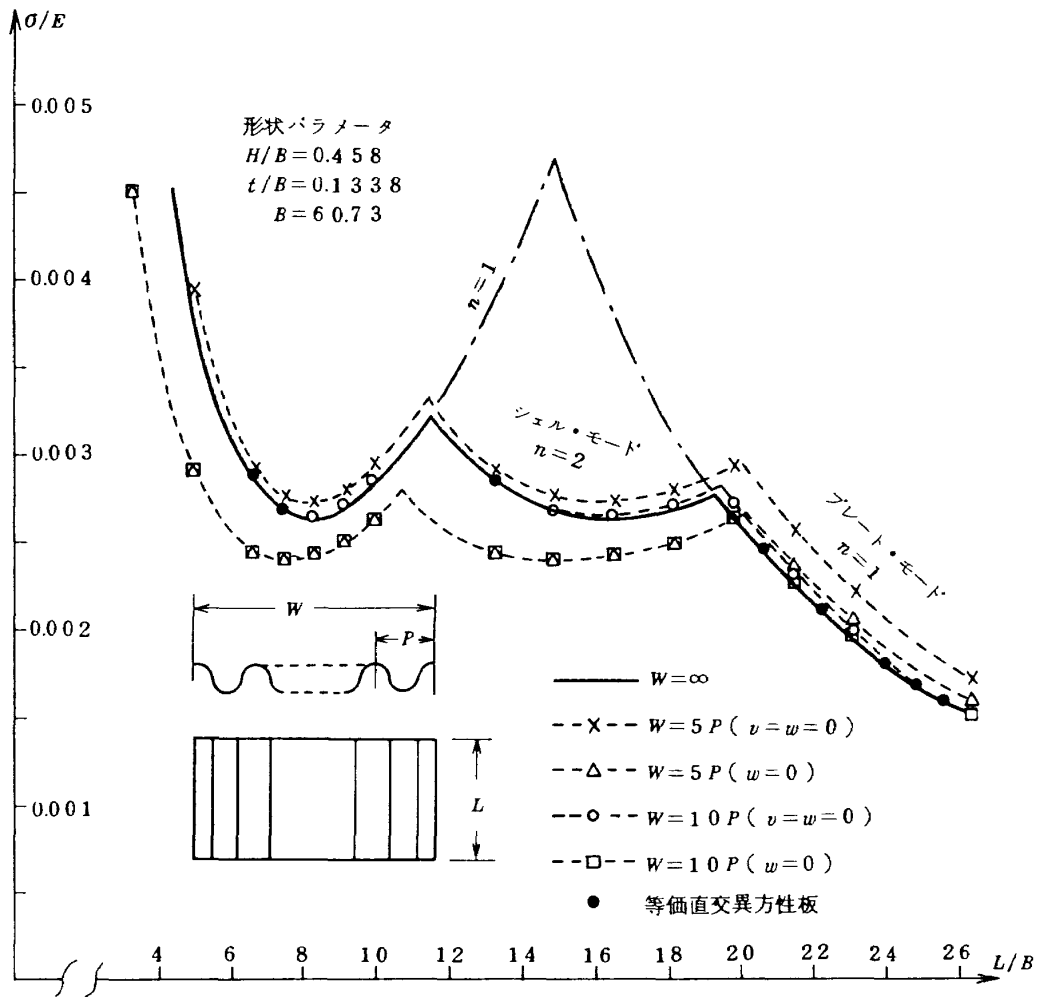


図1.1 有限巾と無限巾との比較

$$\nu_{yx} = B^2 t^3 / (6B_w I)$$

$$G = E / (2(1+\nu))$$

$B_w$  は弧長を表わし、図9のSと同じである。

$I$  は波板一波長部分の断面二次モーメントであって、式(7)から次のように求められる。

$$I = 2\phi R t \rho^2$$

前の計算例で扱った長さ  $L$ 、巾  $W$  の波板を板厚  $t = t B_w / B$  の等価な直交異方性板に置き換え（図12）、式(30)の曲げ剛性を用いて周辺単純支持の条件で座屈応力を計算した結果を、図1.1に前の計算結果と共に示す。  
 $W=5$  波長と  $W=10$  波長の値は接近しているので、 $W=10$  波長の結果を黒丸印で示す。両者共に波板として扱った無限巾の計算値に極めて近い値を示している。

図1.3には、波板の巾方向に沿った座屈モードを示す。波板として解析したもの（図中の  $w=0$  および  $w=v=0$  の曲線）は波の山と谷に対応する点をプロットしたものであって、全体としては正弦波に近いモードを示しているが両端部付近では局部的な変形の影響が現われてい

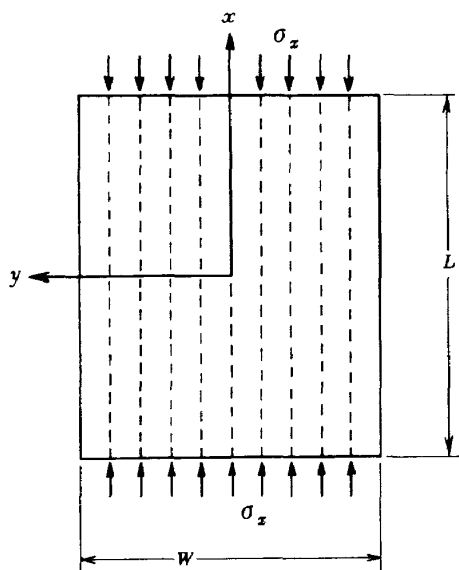


図1.2 等価直交異方性板（周辺単純支持）

る。特に、 $w = 0$  だけの境界条件の場合に正弦波とのずれが大きい。一方、波板をこれと等価な直交異方性板に置き換えて計算した結果をみると、巾  $W = 5$  波長に相当する場合は正弦波の半波にほぼ近いモードを示しているが、 $W = 10$  波長に相当する場合は二半波のモードとなり、波板として計算した場合と異なっている。座屈荷重は図 11 に示したように両者の値がほとんど一致している。

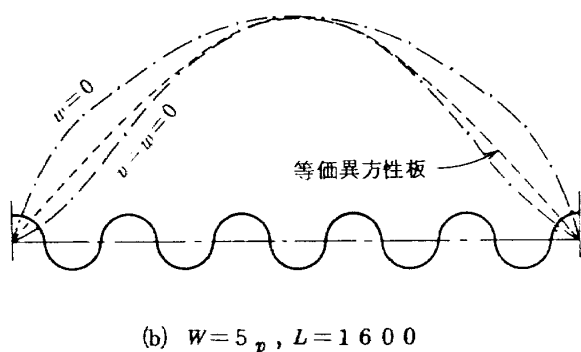
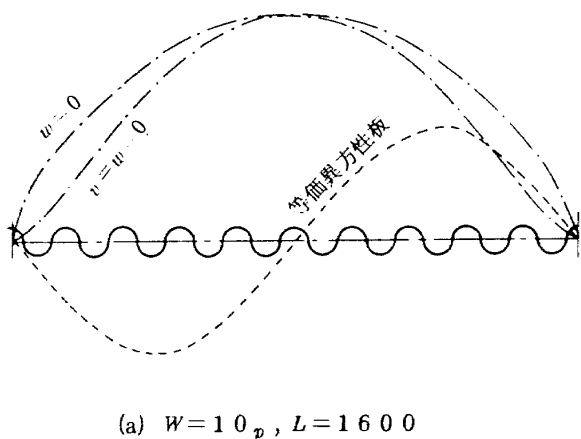


図 13 有限巾の波板の座屈モード

### 3.4 複合材製波板の座屈特性

複合材では、これを構成する各積層材の繊維の方向および積層順序などの組み合わせの自由度が多いが、ここでは代表例として図 14 に示すような二種類について座屈特性を調べた。両者共、縦と横方向の剛性が等しい織物材を積層材として用いて、(a)は波板の  $x$  軸と織物材の繊維方向とが一致している場合、(b)は  $x$  軸と繊維が  $45^\circ$  の角度をなしている場合をそれぞれ想定した。織物材自身は層方向に均質であるとみなすと、積層されたものも (a)、(b) の場合は板厚方向に均質となり、複合材を均質な直交異方性材として扱おうことができる。

織物材として炭素繊維系を想定し、下記の弾性係数を用いる。

$$E_L = E_T = 6100 \text{ kg/mm}^2$$

$$G_{LT} = 730 \text{ kg/mm}^2 \quad (31)$$

$$\nu_{LT} = \nu_{TL} = 0.077$$

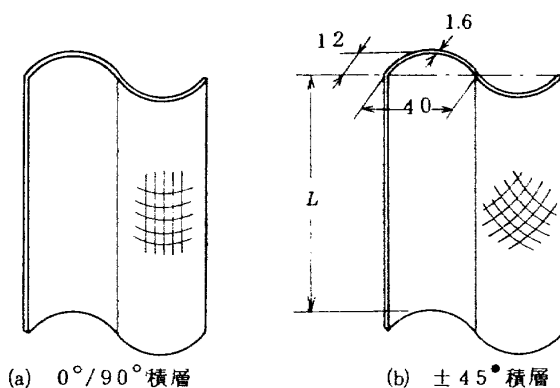


図 14 複合材製波板

このデータを用いて、(a) の場合 (以後  $0^\circ/90^\circ$  と表わす) および (b) の場合 (以後  $\pm 45^\circ$  と表わす) に対する直交異方性弾性体の応力-ひずみマトリックスを式 (1) の形で求めると次のようになる。(7)

$$[D]_{0^\circ/90^\circ} = \begin{bmatrix} 6136 & 472 & 0 \\ 472 & 6136 & 0 \\ 0 & 0 & 730 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$[D]_{\pm 45^\circ} = \begin{bmatrix} 4034 & 2575 & 0 \\ 2575 & 4034 & 0 \\ 0 & 0 & 2832 \end{bmatrix} \quad (33)$$

また、等方性材料の波板の座屈特性と比較するために  $x$  方向のヤング率  $E_x$  を求めると次のようになる。

$$E_x = D_{11}(1 - \nu_{xy}\nu_{yz}), \nu_{xy} = \nu_{yz} = D_{12}/D_{11}$$

したがって

$$E_x(0^\circ/90^\circ) = 6100 \text{ kg/mm}^2 \quad (34)$$

$$E_x(\pm 45^\circ) = 2390 \text{ kg/mm}^2$$

となる。

これらの弾性係数を用いて図 14 の波板について座屈応力を有限要素法で計算した結果を図 15 に示す。

図中の実線は式 (33) の弾性係数を用いた場合であり、点線は式 (34) のヤング率の等方性材料 (ポアソン比 = 0.3) の場合である。

これらの計算結果により、複合材 (直交異方性) から成る波板の圧縮座屈特性は、次のような傾向を示すことがわかる。

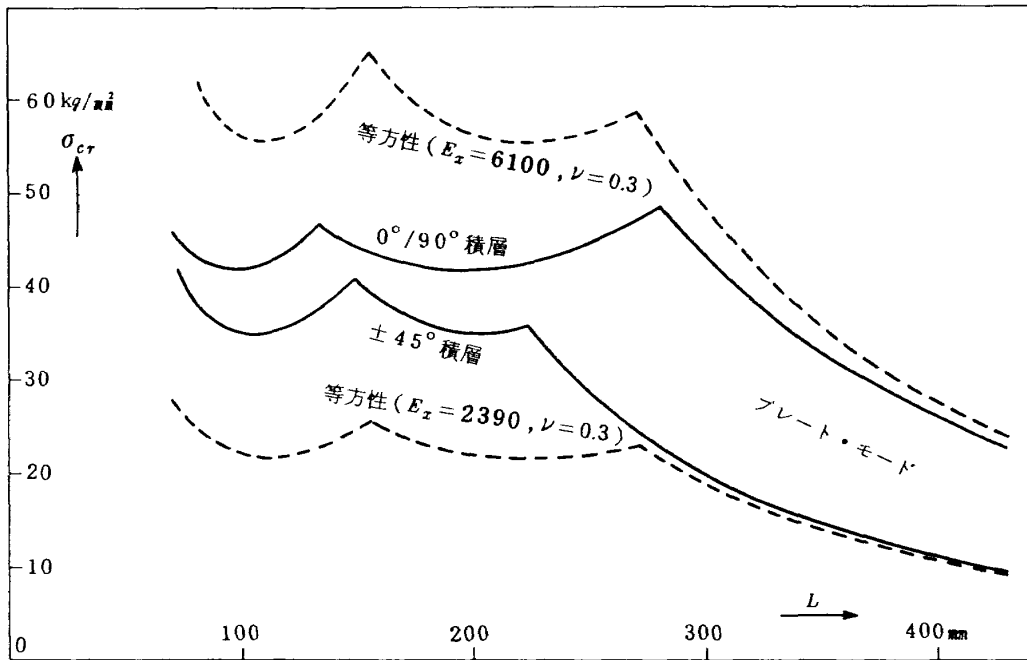


図 1 5 複合材製波板の圧縮座屈特性

i)  $L$ の長い領域(プレート・モード)では $0^\circ/90^\circ$ の層構成の場合と $\pm 45^\circ$ の層構成の場合とで座屈応力に大きな差があり、各々ヤング率 $E_x(0^\circ/90^\circ)$ 、 $E_x(\pm 45^\circ)$ の等方性材料(ポアソン比 $= 0.3$ )として計算した結果に近い値を示している。

ii)  $L$ の短い領域(シェル・モード)では $0^\circ/90^\circ$ 積層と $\pm 45^\circ$ 積層との差が小さく、等方性材料に対する計算結果との差が大きい。式(32)、(33)に示したように、等方性材料に較べて、 $0^\circ/90^\circ$ 積層では $D_{12}$ と $D_{33}$ の値が $D_{11}$ に対して小さく、 $\pm 45^\circ$ 積層では逆に $D_{12}$ と $D_{33}$ の値が $D_{11}$ に対して大きくなっており、これは座屈応力の傾向と同様である。3.3節で扱った直交異方性板の座屈応力の理論解<sup>(6)</sup>では座屈応力 $\sigma_{cr}$ が

$$\sigma_{cr} \propto (\sqrt{D_{11} \cdot D_{22}} + D_{12} + 2D_{33})$$

の関係にあるが、今のシェル・モードの場合に適用すると等方性材の座屈応力との差が図15に示したものよりも大きくなる。

#### 4. まとめ

高精度の曲面帯板要素を導き、これを用いた有限要素解析によって波板の圧縮座屈特性を調べ、下記に示すような結果を得た。

(1) 波板の断面寸法と軸方向(波板の母線方向)長さとの関係により、座屈モードが三種類に分類される。すなわち、軸方向長さの短い順に、i) シェル・モー

ド・I(円筒シェルの座屈と同様なモード)、ii) シェル・モード・II(断面形状の変形がわずかであって全体が横方向に変形する特徴あるモード)、iii) プレート・モード(波板全体が直交異方性板のように変形するモード)。

(2) シェル・モード・Iは軸方向長さが極めて短い場合に限られるので、実用上重要なシェル・モード・IIとプレート・モードの領域に着目して、これらのモードに対応する座屈応力およびプレート・モードの適用限界を算定する近似公式を、数値解析結果に基づいて作成した。

(3) 上記の結果は無限巾の波板に対するものであるが、有限巾の影響を調べるために代表的な形状パラメータに対して数値解析を行なった結果、巾方向の両端の境界条件が単純支持( $w=v=0$ )の場合には、座屈応力が無限巾の場合とほとんど同じであり、 $w=0$ だけの境界条件ではシェル・モード・II領域の座屈応力が無限巾の場合よりも低下することがわかった。

(4) 波板を、これと剛性が等価な直交異方性板に置き換えて解析することが一般に行なわれているが、プレート・モード領域の長さを持つ波板では、そのような置き換えによる座屈応力の計算結果と、波板としての計算結果はほとんど一致する。しかしながら、プレート・モードの限界長(プレート・モードからシェル・モードに移り変わる点)よりも短い波板に対して適用す

るのは危険である。

(5) 複合材製波板のように、波板の材料自身が直交異方性である場合でも、プレート・モードに対しては波板の軸方向の剛性の影響が極めて大きいので、軸方向のヤング率と等しいヤング率を持つ等方性材料の波板の座屈応力とほぼ等しい値が得られる。しかしながら、シェル・モードの領域については、このような関係は成り立たず、異方性弾性係数間の比率に関連して、等方性材料の結果と大きく異なる。

おわりに、本研究に関して有益な御助言を戴いた当所の古賀達蔵室長および戸田勸主任研究官に感謝の意を表します。

#### 参考文献

- 1) Viswanathan, A.V. and Tamekuni, M., Elastic Buckling Analysis for Composite Stiffened Panels and other Structures Subjected to Biaxial Inplane Loads, NASA CR-2216, Sept. 1973
- 2) Shideler, J.L., Bohon, H.L., and Greene, B.E., Evaluation of Bead-Stiffened Metal Panels, Journal of Spacecraft, Vol. 13, No. 3, March 1976, pp. 144-149
- 3) Weinberger, R.A. et al., U.S. Navy Certification of Composite Wings for the F-18 and Advanced Harrier Aircraft, AIAA/ASME 18th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, San Diego, Calif., March 1977, pp. 396-407
- 4) Sanders, J.L., Nonlinear Theories for Thin Shells, Quarterly of Applied Mechanics, Vol. 21, No. 1, 1963, pp. 21-36
- 5) Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw-Hill, 1971
- 6) 強度設計データブック, 裳華房, 1962, pp. 937-940
- 7) 林毅, 複合材料工学, 日科技連出版社, 1971, pp. 521-530

---

## 航空宇宙技術研究所報告604号

昭和55年4月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社実業公報社  
東京都千代田区九段南4-2-12

---