

ISSN 0389-4010
UDC 620.178:
621.317.35

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-688

不規則度指数による疲労損傷評価

第1報, 狭帯域および広帯域ランダム波の
不規則度指数

薄 一 平

1981年11月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

不規則度指数による疲労損傷評価*
第1報, 狭帯域および広帯域ランダム波の
不規則度指数

薄 一 平**

Fatigue Damage Estimation Using Irregularity Factor
1st Report, Irregularity factor calculations
for narrow and broad band random time histories

Ippei SUSUKI

ABSTRACT

This paper presents the results of an analysis of the irregularity factors of stationary and Gaussian random processes which are generated by filtering the output of a pure or a band-limited white noise.

The following types of filters are examined in this study:

1. An ideal band pass filter
2. A trapezoidal filter
3. A Butterworth type band pass filter.

It was found that the values of the irregularity factors were approximately equal among these filters if only the end-slopes were the same rates. As the band width of filters increases, irregularity factors increase monotonically and approach the respective constant values depending on the end-slopes. This implies that the noise characteristics relevant to the fatigue damage such as statistical aspects of the height of the rise and fall or the distribution of the peak values is not changed for a broad band random time history.

It was also found that the effect of band limitation of input white noise on irregularity factors is negligibly small.

概 要

不規則な荷重を受ける構造物や部材の疲労寿命を不規則度指数を用いて推定するために本報では、白色雑音の線形フィルタ出力波として得られるようなガウス性定常ランダム過程について不規則度指数の解析を行った。用いたフィルタは矩形、台形、バターワース型の帯域通過フィルタである。その結果、帯域幅の増加とともに指数も単調に増加するがフィルタの減衰特性に応じた一定値に漸近する、フィルタ形状が一致すれば指数もほぼ等しくなる、入力白色雑音に帯域制限が存在しても通常その影響は無視できる等の特性が明らかになった。

* 昭和56年9月1日受付

** 機体第2部

1. 緒 言

航空機をはじめとして一般に構造物は供用中、長期間にわたって複雑な実働荷重を受ける。これらの荷重に起因する構造の損傷、破壊等の問題は安全性、信頼性および経済性の面で重要な課題であり、近年数多くの評価手法が研究されている。^{1),2),3)}

収集した実働荷重履歴から時系列解析、スペクトル解析等種々の統計解析に基づいて必要な情報を抽出する方法が一般的である。実働荷重が定常性を満足し、かつ波の時系列が同一の正規分布に従う、いわゆるガウス性定常ランダム波については多くの統計的性質が明らかにされている。^{4),5)} とりわけ、パワースペクトル密度関数のみによって、レベルクロス頻度やランダム波の極値の確率密度関数が求められるため強度や疲労寿命を評価するための重要な情報を与えるものである。^{6),7)} 非定常過程まで拡張した形で、⁸⁾ 乱気流に対する強度解析法として PSD 法⁹⁾ の提案、突風に対する米国軍用規格¹⁰⁾ に採用される等、パワースペクトル密度関数は統計的に荷重を解析、強度評価を行ううえで最も重要な基礎データのひとつである。またパワースペクトル密度関数を用いて種々の評価試験を行うためにランダム波の時系列を発生させるシミュレーション手法についても活発に研究されている。¹²⁾⁻¹⁶⁾

しかしながら実構造物に荷重されている実際のパワースペクトル密度関数はきわめて複雑な形状¹⁷⁾ を示し、また広範囲の周波数領域についてデータが得られているわけではない。したがってパワースペクトル密度関数を基礎データとして種々の解析あるいは評価試験のためのシミュレーションを行う場合類似の計算可能なモデルを用いることになる。^{6),15),16)}

本報ではガウス性定常ランダム波を対象として、そのピーク値の確率密度関数を決定するパラメータである不規則度指数 β とパワースペクトル形状との関係、またそのモデル化による誤差を定量的に把握するための第一段階として、矩形、台形、バターワース型フィルタ形状の基本的な帯域通過型のパワースペクトル密度関数について β を求め、その帯域依存性、上限界周波数、下限界周波数の影響、減衰特性の効果について報告する。

2. 極大値の分布

時間関数 $I(t)$ を 2 回微分可能で各時間平均が

$$\overline{I(t)} = \overline{I'(t)} = \overline{I''(t)} = 0 \quad (2.1)$$

であり、 $I(t)$ のパワースペクトル密度関数が角周波数 ω を用いて $S(\omega)$ なるガウス性定常ランダム過程とする。 $I(t)$ の分散

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S(\omega) d\omega \quad (2.2)$$

を用いて

$$Y(t) = I(t) / I_0 \quad (2.3)$$

なる基準化された $Y(t)$ について考える。不規則度を表わすパラメータとして種々提案されているが、^{6),15),18)} 本報告に用いる不規則度指数 β は「相継ぐ正（あるいは負）方向零交差間に生起する極大値（あるいは極小値）の生起回数の平均値」なる意味を有するランダムプロセスのパラメータである。 $Y(t)$ が y なる極大値を持つ極大値確率密度関数 $p(y)$ は、

$$p(y) = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2(1-\beta^2)}\right] + \frac{y}{\beta} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \phi\left(\frac{y}{\sqrt{\beta^2-1}}\right) \quad (\beta > 1) \quad (2.4)$$

$$p(y) = \begin{cases} y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) & (y \geq 0) \\ 0 & (y < 0) \end{cases} \quad (\beta = 1) \quad (2.4')$$

と表させる。したがって累積分布関数 $F(y)$ は (2.4), (2.4') 式の両辺を y について ∞ から y まで積分して

$$F(y) = \phi\left(\frac{y}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) - \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \cdot \phi\left(\frac{y}{\sqrt{\beta^2-1}}\right) \quad (\beta > 1) \quad (2.5)$$

$$F(y) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) & (y \geq 0) \\ 0 & (y < 0) \end{cases} \quad (\beta = 1) \quad (2.5')$$

となる。ここに $\phi(z)$ は

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (2.6)$$

である。(2.4), (2.4'), (2.5), (2.5')の各式より極大値の確率密度関数 $p(y)$ および累積分布関数 $F(y)$ はいずれも不規則度指数 β のみをパラメータとして含んでいることがわかる。図1に $F(y)$ を示す。 $\beta=1$ の時は前述のように正方向零交差1回あたり平均1個の極大値を生ずるようなランダムプロセスとなり、(2.4'), (2.5')に示したように極大値はレイリー分布(Rayleigh分布)となる。(2.4), (2.5)各式において $\beta \rightarrow \infty$ とすると、

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad (2.7)$$

$$F(y) = \Phi(y) \quad (2.8)$$

となり、正規分布(Gauss分布)に一致する。一般に、 $\beta \approx 1$ の時狭帯域ランダム波、 $\beta \gg 1$ の時広帯域ランダム波となる。

ところで β はパワースペクトル密度関数 $S(\omega)$ の0, 2, 4次の各モーメント I_0, I_2, I_4 を用いて次式のように表わされる。^{15), 18)}

$$\beta = \sqrt{I_0 \cdot I_4} / I_2 \quad (2.9)$$

ここに

$$I_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^\infty \omega^2 S(\omega) d\omega \quad (2.10)$$

$$I_4 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^5 \int_0^\infty \omega^4 S(\omega) d\omega \quad (2.11)$$

以上を要するに、 β は実働波形から直接実測あるいは(2.9), (2.10), (2.11)の各式により $S(\omega)$ から求めることができる。したがって(2.5)式あるいは(2.5')式より求まる荷重分布より強度推定あるいはシミュレーションによる評価が可能となる。図2は $F(y)$ について、 $\beta=1$ すなわちレイリー分布の時に直線となるような確率紙を用いて整理し直した図で小頻度大荷重の発生確率等強度推定、破壊確率評価上重要なデータを精度良く読みとれる。

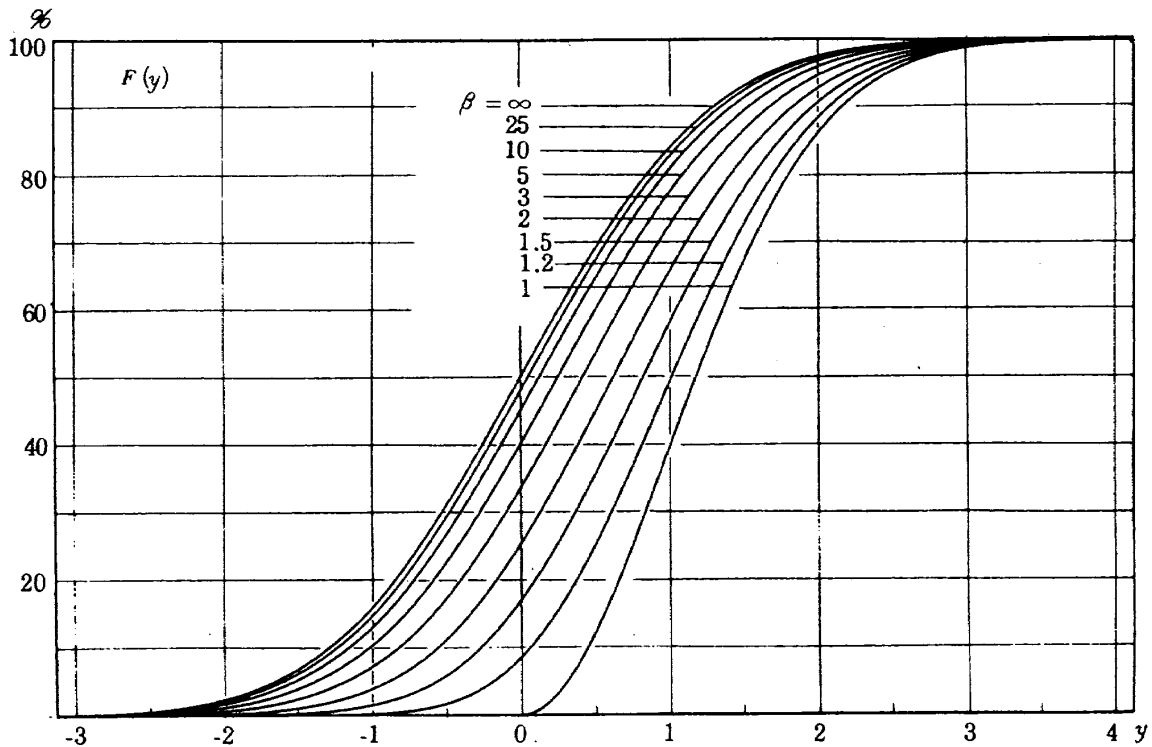


図1 基準化されたランダムプロセスの極大値に対する累積分布

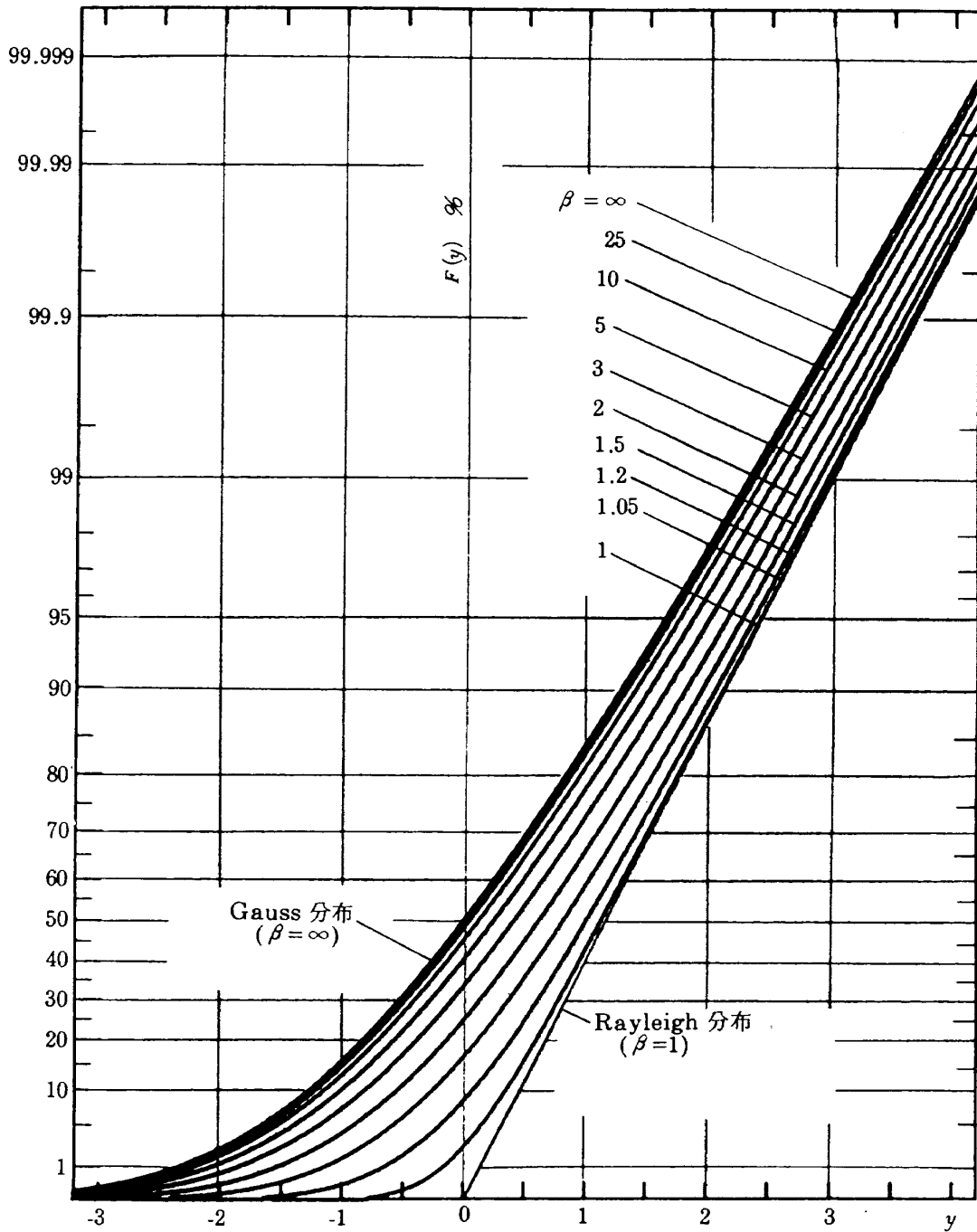


図2 累積分布関数 $F(y)$ の確率紙による整理

3. 不規則度指数 β

本報に言う帯域通過型ランダム波とは、白色雑音の帯域通過型成形フィルタ出力波形として得られるようなランダム波であって、以下に詳細に述べるように、本報では矩形、台形、バターワース (Butterworth) 型フィルタに、帯域制限を有する白色雑音 (Band Limited White Noise) が入力された時の出力波形を対象に β を求めるものである。

3.1 矩形フィルタ

パワースペクトルモデルとして最も単純でよく使われる^{12),13),15)} 矩形フィルタの場合図3に示すように $S(\omega)$ は、

$$S(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega < \omega_1) \\ A & (\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2) \\ 0 & (\omega > \omega_2) \end{cases} \quad (3.1)$$

と書ける。ここに A は ω によらない正の定数である。

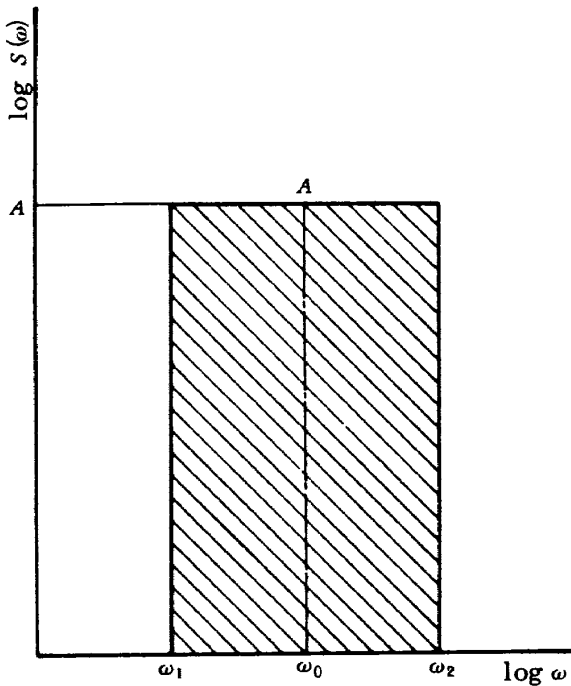


図3 矩形フィルタ出力波のパワースペクトル密度関数

この時の β は文献4)に既に求められているように

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{(p-p^{-1}) \cdot (p^5-p^{-5})}}{p^3-p^{-3}} \quad (p > 1) \quad (3.2)$$

と表わされる。ここに p は

$$p = \sqrt{\omega_2/\omega_1} \quad (3.3)$$

である。 $p \rightarrow 1$ の時、 $\beta = 1$ に近づき、 $\omega_1 = 0$ あるいは $p \rightarrow \infty$ のとき

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad (\approx 1.342) \quad (3.4)$$

となる。

3.2 台形フィルタ

$S(\omega)$ は図4に示すように

$$S(\omega) = \begin{cases} 0 & (0 \leq \omega < \omega_3) \\ A \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^c & (\omega_3 \leq \omega \leq \omega_1) \\ A & (\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2) \\ A \left(\frac{\omega_2}{\omega} \right)^c & (\omega_2 \leq \omega \leq \omega_4) \\ 0 & (\omega_4 < \omega) \end{cases} \quad (3.5)$$

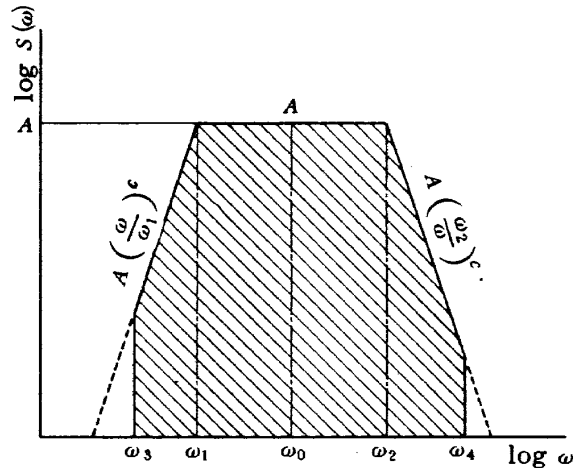


図4 帯域制限白色雑音入力に対する台形フィルタ出力波のパワースペクトル密度関数

と表わされる。ここに c は減衰特性を表わす正の有理数である。

(2.2), (2.9), (2.10)式より、計算の便宜上次式の J_n

$$J_n = \frac{I_n}{\left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n+1}} = \int_0^\infty \omega^n S(\omega) d\omega, \quad n = 0, 2, 4 \quad (3.6)$$

を用いることとする。(3.6)式に(3.5)式を代入して整理すると、

$$\frac{J_n}{A} = \frac{1}{\omega_1^c} \int_{\omega_3}^{\omega_1} \omega^{n+c} d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega^n d\omega + \omega_2^c \int_{\omega_2}^{\omega_4} \omega^{n-c} d\omega \quad (3.7)$$

いま $n \neq c-1$ と仮定すると(3.7)式は

$$\frac{J_n}{A} = \frac{1}{\omega_1^c} \cdot \frac{\omega_1^{n+c+1} - \omega_3^{n+c+1}}{n+c+1} + \frac{\omega_2^{n+1} - \omega_1^{n+1}}{n+1} + \omega_2^c \cdot \frac{\omega_4^{n-c+1} - \omega_2^{n-c+1}}{n-c+1} \quad (3.8)$$

ここで次式で表わされる補助変数 ω_0, p, q, r を用いて

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} \quad (3.9)$$

$$p = \omega_2 / \omega_0 \quad (3.10)$$

$$q = \omega_4 / \omega_2 \quad (3.11)$$

$$r = \omega_3 / \omega_1 \quad (3.12)$$

(3.8)式に代入, 整理すると

$$\frac{J_n}{A\omega_0^{n+1}} = \frac{1-r^{n+c+1}}{(n+c+1)p^{n+1}} + \frac{p^{n+1}-p^{-n-1}}{n+1} + \frac{p^{n+1} \cdot (q^{n-c+1}-1)}{n-c+1} \quad (3.13)$$

したがって J_n は

$$J_n = \frac{cA\omega_0^{n+1}}{n+1} \left\{ p^{n+1} \cdot \frac{1-\frac{n+1}{c}q^{-c+n+1}}{c-n-1} - \frac{1}{p^{n+1}} \cdot \frac{1+\frac{n+1}{c}r^{c+n+1}}{c+n+1} \right\} \quad (3.14)$$

と求められた。ここで K_n

$$K_n = \frac{n+1}{cA\omega_0^{n+1}} J_n = p^{n+1} \cdot \frac{1-\frac{n+1}{c}q^{-c+n+1}}{c-n-1} - \frac{1}{p^{n+1}} \cdot \frac{1+\frac{n+1}{c}r^{c+n+1}}{c+n+1} \quad (3.15)$$

とおくと, 不規則度指数 β は (2.9), (3.6), (3.15) 各式より

$$\beta = \frac{\sqrt{I_0 \cdot I_4}}{I_2} = \frac{\sqrt{J_0 \cdot J_4}}{J_2} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{K_0 \cdot K_4}}{K_2} \quad (3.16)$$

と求まった。次に $n=c-1$ の場合には (3.7) 式の第3項の積分形が異なるのみで, (3.9)~(3.12) 各式の補助変数を用いて同様に展開, 整理することが可能で

$$J_n = \frac{A\omega_0^{n+1}}{n+1} \left[p^{n+1} \{ 1 + (n+1) \log q \} - \frac{1}{p^{n+1}} \cdot \frac{1+r^{2n+2}}{2} \right] \quad (3.17)$$

と表わされる。図5は (3.9)~(3.12) 式を用いて $S(\omega)$ を表示した図である。

帯域制限を設けない, すなわち $\omega_3 \rightarrow 0$ かつ $\omega_4 \rightarrow \infty$ の場合については, (3.6) 式の積分が任意の n に対して収束することが必要であり, $c > 5$ が必要か

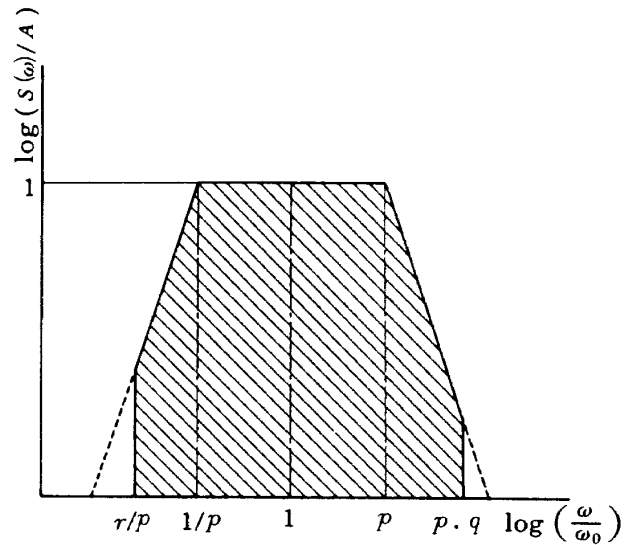


図5 補助変数による無次元化表示

つ十分条件であることが (3.5), (3.6) 式より明らかである。このとき (3.15) 式において $q \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$ とすれば, K_n は

$$K_n = \frac{n+1}{cA\omega_0^{n+1}} J_n = \frac{p^{n+1}}{c-n-1} - \frac{p^{-n-1}}{c+n+1} \quad (3.18)$$

となり, 帯域制限のない場合の不規則度指数を β_0 と書くと

$$\beta_0 = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{p}{c-1} - \frac{p^{-1}}{c+1}\right) \left(\frac{p^5}{c-5} - \frac{p^{-5}}{c+5}\right)}}{\frac{p^3}{c-3} - \frac{p^{-3}}{c+3}} \quad (3.19)$$

3.3 バターワース型フィルタ

白色雑音が帯域通過のバターワース型フィルタを通過した出力雑音のパワースペクトル密度関数 $S_0(\omega)$ は一般に

$$S_0(\omega) = \frac{\omega_2^{4m}}{\omega^{4m} + \omega_2^{4m}} \cdot \frac{\omega^{4m}}{\omega^{4m} + \omega_1^{4m}} \quad (3.20)$$

と表わされる。ここに ω_1 , ω_2 は各々低周波数側および高周波側遮断周波数, m は減衰特性を表すパラメータで, 自然数である。このフィルタに $[\omega_3, \omega_4]$ の周波数範囲を有する (ただし $\omega_3 < \omega_1$, $\omega_4 > \omega_2$ とする) 帯域制限白色雑音が入力されたときの出力雑音の $S(\omega)$ は図6に示す形状となる。すなわち

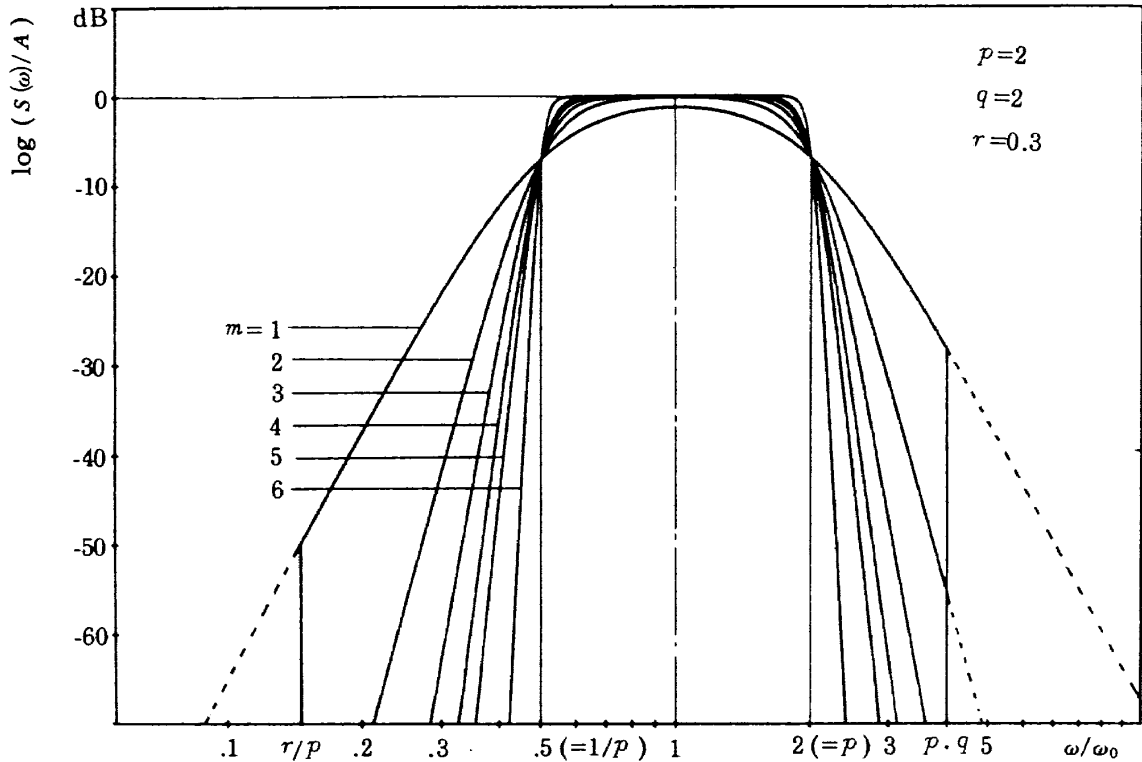


図6 帯域制限白色雑音入力に対するバタワース型フィルタ出力波の
パワースペクトル密度関数

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0(\omega) & (\omega_3 \leq \omega \leq \omega_4) \\ 0 & (\omega < \omega_3, \omega > \omega_4) \end{cases} \quad (3.21)$$

と表わされる。前節と同様に (3.21) 式を (3.6) 式に代入して β を求める。この際 (3.9) ~ (3.12) 式の補助数を用いる。

$$J_n = \frac{\omega_0^{n+1}}{1-p^{-6m}} \left\{ p^{n+1} \int_{r/p}^q \frac{x^n}{x^{4m+1}} dx - p^{-n-1} \int_r^{p \cdot 9/5} \frac{x^n}{x^{4m+1}} dx \right\} \quad (3.24)$$

$$J_n = \int_0^\infty \omega_n S(\omega) d\omega = \int_{\omega_3}^{\omega_4} \frac{\omega_2^{4m} \cdot \omega^{4m+n}}{(\omega^{4m} + \omega_2^{4m})(\omega^{4m} + \omega_1^{4m})} d\omega \quad (3.22)$$

まず $\omega_1 < \omega_2$ の場合には (3.22) 式は次のように展開される。

$$J_n = \frac{\omega_2^{4m}}{\omega_2^{4m} - \omega_1^{4m}} \left\{ \int_{\omega_3}^{\omega_4} \frac{\omega_2^{4m} \omega^n}{\omega^{4m} + \omega_2^{4m}} d\omega - \int_{\omega_3}^{\omega_4} \frac{\omega_1^{4m} \omega^n}{\omega^{4m} + \omega_1^{4m}} d\omega \right\} \quad (3.23)$$

ここで $m \geq 2$ では明らかに $n < 4m$ であり、(3.23) 式に (3.9) ~ (3.12) 式を代入して整理すると

となる。さらに

$$\int \frac{x^n}{x^{4m+1}} dx = -\frac{1}{4m} \sum_{k=1}^{2m} \left\{ \cos \varphi \cdot \ln |x^2 - 2x \cos \theta + 1| + 2 \sin \varphi \cdot \arctan \left(\frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} \right) \right\} \quad (3.26)$$

ここに

$$\theta = \frac{2k-1}{4m} \pi \quad (3.27)$$

$$\varphi = (n+1)\theta \quad (3.28)$$

となることが知られている。²⁰⁾ (3.26) 式の対称性を考慮して整理し、 $F_{n,m}(\omega)$ と書く。すなわち

$$\begin{aligned}
 F_{n,m}(x) &= \int \frac{x^n}{x^{4m}+1} dx \\
 &= -\frac{1}{4m} \sum_{k=1}^m \{ \cos \varphi \cdot L(x) + 2 \sin \\
 &\quad + 2 \sin \varphi \cdot A(x) \} \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

ここに

$$L(x) = \ln \left| \frac{x^2 - 2x \cos \theta + 1}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} \right| \quad (3.30)$$

$$A(x) = \arctan \frac{\cos \theta - x}{\sin \theta} - \arctan \frac{\cos \theta + x}{\sin \theta} \quad (3.31)$$

である。(3.29)式を(3.24)式に代入して

$$\begin{aligned}
 J_n &= \frac{\omega_0^{n+1}}{1-p^{-8m}} \left[p^{n+1} \{ F_{n,m}(q) - F_{n,m}(\tau p^{-2}) \} \right. \\
 &\quad \left. - p^{-n-1} \{ F_{n,m}(p^2 q) - F_{n,m}(\tau) \} \right] \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

よって(3.32)式を(3.16)式に代入すれば β が求まる。

次に $\omega_1 = \omega_2$ の場合には(3.22)式の J_n は

$$J_n = \int_{\omega_3}^{\omega_4} \frac{\omega_0^{4m} \omega^{4m+n}}{(\omega^{4m} + \omega_0^{4m})^2} d\omega \quad (3.33)$$

と書ける。同様に、(3.9)~(3.12)式を用いて変形、整理すると、

$$\begin{aligned}
 J_n &= \frac{\omega_0^{n+1}}{4m} \left[\frac{\tau^{n+1}}{\tau^{4m}+1} - \frac{q^{n+1}}{q^{4m}+1} \right. \\
 &\quad \left. + (n+1) \{ F_{n,m}(q) - F_{n,m}(\tau) \} \right] \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

と表わされる。

今まで $m \geq 2$ の範囲で J_n を求めてきたが、 $m=1$ の場合も $n=0, 2$ については(3.32)式、(3.34)式から J_n を求めて良い。ただし $n=4$ については(3.22)式の被積分関数が真分数にならないため改めて計算する必要がある。まづ $\omega_2 > \omega_1$ の場合(3.22)式は

$$J_4 = \int_{\omega_3}^{\omega_4} \frac{\omega_2^4 \omega^8}{(\omega^4 + \omega_2^4)(\omega^4 + \omega_1^4)} d\omega \quad (3.35)$$

となる。(3.9)~(3.12)式および(3.29)式を用いて整理すると

$$\begin{aligned}
 J_4 &= \frac{\omega_0^5}{1-p^{-8}} \left[(pq - \tau p^{-1})(p^4 - p^{-4}) \right. \\
 &\quad \left. - p^5 \{ F_{0,1}(q) - F_{0,1}(\tau p^{-2}) \} \right. \\
 &\quad \left. + p^{-5} \{ F_{0,1}(p^2 q) - F_{0,1}(\tau) \} \right] \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

また $\omega_2 = \omega_1$ の場合は

$$\begin{aligned}
 J_4 &= \omega_0^5 \left[q - \tau + \frac{q}{4(q^4+1)} - \frac{\tau}{4(\tau^4+1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{4} \{ F_{0,1}(q) - F_{0,1}(\tau) \} \right] \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

となる。

以上を要するに、不規則度指数 β は、 $m \geq 2$ においては、 $p > 1$ の場合(3.32)式、 $p=1$ の場合(3.34)式によって J_n を求め、(3.16)式によって β を決定する。 $m=1$ については J_4 に限って $p > 1$ の場合(3.36)式、 $p=1$ の場合(3.37)式を用いて、 J_0, J_2 については各々(3.32)式あるいは(3.34)式によって計算し、(3.16)式によって β を求める。

ところで白色雑音が理想的であって帯域制限を有しない場合は $m \geq 2$ について不規則度指数 β_0 を求めることが計算上可能である。当然(3.32)式、(3.34)式において $\tau \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$ としても求められるが、 β_0 を直接表わすと

$$\beta_0 = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{E_0 \cdot E_4}}{E_2} & (p=1) \quad (3.38) \\ \frac{\sqrt{(p-p^{-1})(p^5-p^{-5})}}{p^3-p^{-3}} \cdot \frac{\sqrt{E_0 \cdot E_4}}{E_2} & (p>1) \quad (3.39) \end{cases}$$

ここに

$$E_n = \sum_{k=1}^m \sin \frac{(n+1)(2k-1)}{4m} \pi \quad (3.40)$$

となる。本節に用いた減衰特性パラメータ m (m は自然数)と前節に用いた c (正の有理数)との間に

$$c = 4m \quad (3.41)$$

の関係が成立するとき両者のフィルタの減衰傾度は等しくなる。

4. 考察

3章で求めた種々のパワースペクトル密度関数 $S(\omega)$ に対する不規則度指数 β_0 および β について、その形状依存性、帯域幅との関係、入力白色雑音の帯域制限による低周波側および高周波側の各限界周波数の及ぼす影響について以下に考察する。

4.1 不規則度指数 β_0 の帯域幅依存性

まず入力白色雑音については理想的であって、帯域制限がない場合について考える。図7は台形フィルタについて、(3.5)式における減衰特性パラメータ c を $c > 5$ の範囲内でフィルタの帯域幅パラメータ p と不規則度指数 β_0 との関係をもとめたものである。 c の増加に伴ない、すなわち減衰傾度が大きくなるに従って急速に β_0 は低下し、 $c > 16$ の範囲ではほとんど矩形フィルタ ($c = \infty$) の不規則度指数と一致することがわかる。また帯域幅パラメータ p の増加に対して β_0 は飽和する傾向が認められる。すなわち $p > 10$ に対しては各々の c の値に応じた固有の値に不規則度指数 β_0 は収束している。図8はバターワース型フィルタについて、同様に帯域幅

パラメータ p と不規則度指数 β_0 との関係をもとめた例である。台形フィルタの場合(図7)と同様に、減衰特性パラメータ m の増加とともに不規則度指数 β_0 は減少しており、また帯域幅パラメータ p の増

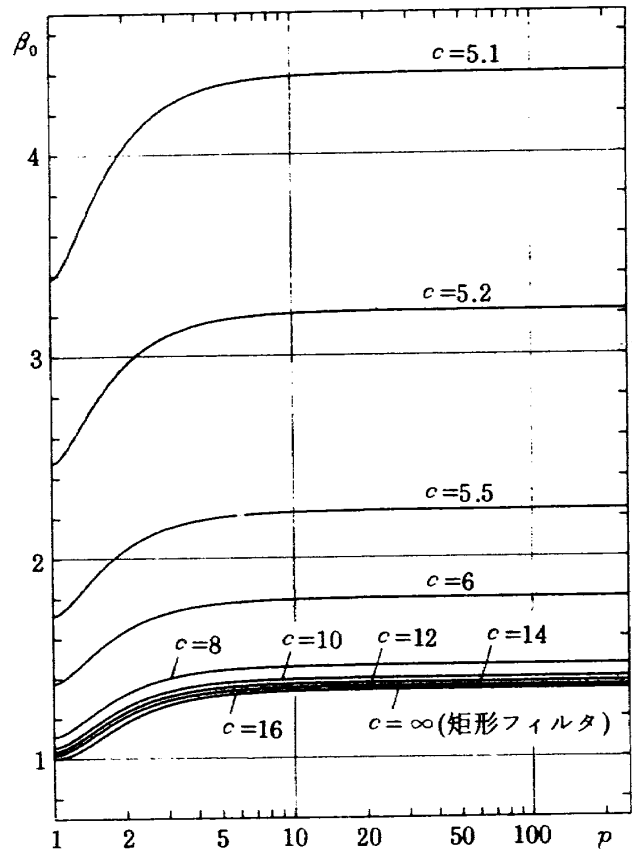


図7 台形フィルタの不規則度指数

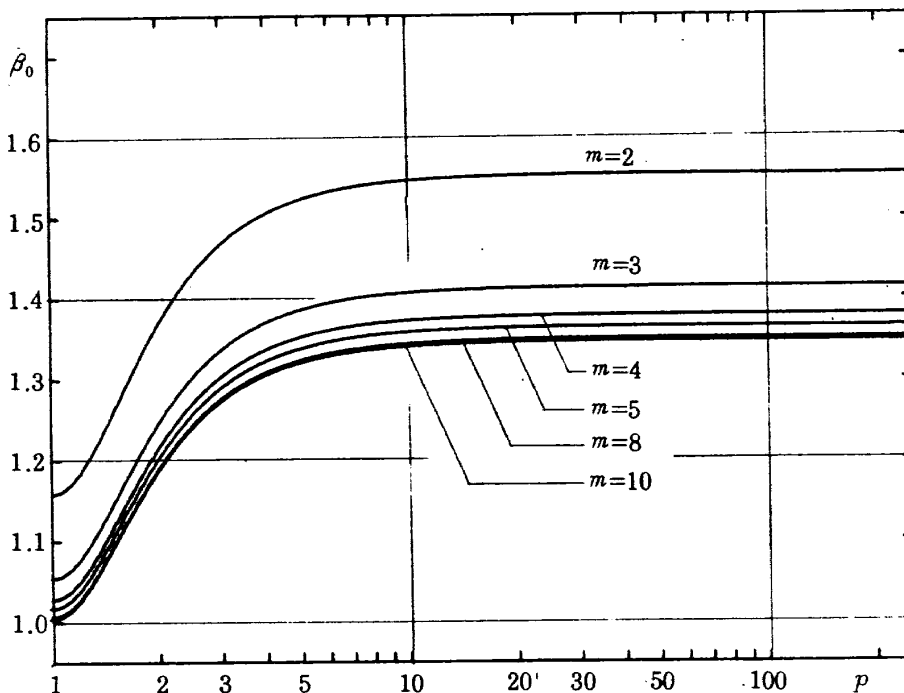


図8 バターワース型フィルタの不規則度指数

加に対して β_0 には飽和点が存在する。台形フィルタの場合と同様に $p > 10$ に対して、不規則度指数 β_0 はほぼ一定値を有する。

したがって不規則度指数 β_0 はフィルタの帯域幅を限度 ($p \approx 10$) 以上増加させても、減衰特性で決まる固有の値で飽和しており、ランダム波の極値に関する性質はほとんど変化しないことが予想される。

4.2 下限界周波数の不規則度指数に及ぼす影響

入力白色雑音に3節で述べたように $[\omega_3, \omega_4]$ の帯域制限がある場合について、その低周波側の影響を各パワースペクトル形状について求める。(3.11)式, (3.12)式より明らかなように、各限界周波数パラメータ q , r は ω_3, ω_4 とフィルタの遮断周波数 ω_1, ω_2 との比として各々定義されている。図9は台形フィルタにおける下限界周波数の影響を横軸 $r (= \omega_3/\omega_1)$, 縦軸 β/β_0 で整理したものである。縦軸は帯域制限がない場合の不規則度指数 β_0 に対する、帯域制限がある場合の不規則度指数 β の変化量を示している。減衰特性パラメータ c が小さい場合には特に上限界周波数の影響が大きく表われ、上

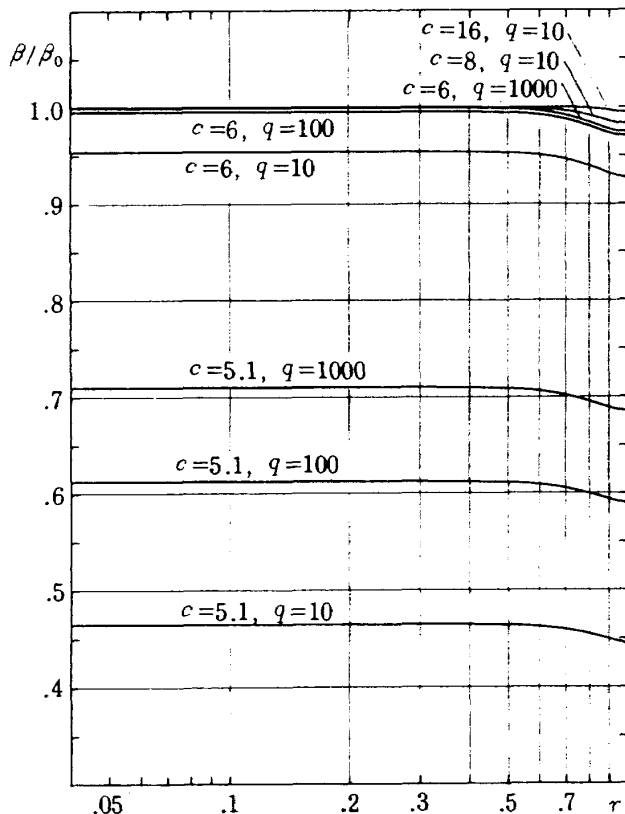


図9 台形フィルタにおける下限界周波数の不規則度指数に及ぼす影響

限界周波数パラメータ q の値によって β は大きく異なっているが、いずれの場合も大略 $r \leq 0.6$ においては β/β_0 はほぼ一定値を有している。図9は最も狭帯域の $p = 1$ の場合であるが、 $p > 1$ で帯域幅が増加しても結果はほとんど変わらない。したがって帯域幅の如何にかかわらず、また減衰特性や上限周波数の大小にかかわらず、下限界周波数の影響は0.6以下ではほとんどない。換言すれば、入力白色雑音に帯域制限があった場合でも

$$\omega_3 \leq 0.6 \cdot \omega_1 \tag{4.1}$$

なる条件が満足されれば、その影響は事実上無視してよいことが明らかになった。バターース型フィルタの場合には m の如何にかかわらず下限界周波数の影響はほとんど認められなかった。

4.3 上限界周波数の不規則度指数に及ぼす影響

4.2節と同様に入力白色雑音に帯域制限がある場合について、その高周波側の影響を各パワースペクトル形状について求める。図10は、帯域幅 $p = 2$ のバターース型フィルタについて、横軸は上限界周波数パラメータ q , 縦軸は帯域制限がない場合の不規則度指数 β_0 との比 β/β_0 で整理した例である。また低周波側については図9の結果を参照して $r = 0$ とした。減衰特性 m の増加に従い、急速にその影響が小さくなっている。 $m \geq 3$ については $q \geq 2$, $m = 2$ についても $q \geq 7$ の範囲では $\beta/\beta_0 \approx 1$, すなわち不規則度指数 β は帯域制限のない場合とほぼ一致することが明らかになった。図11は台形フィルタについて図10と同様に横軸 q , 縦軸 β/β_0 で整理した結果である。低周波側については同様に $r = 0$ とした。帯域幅パラメータ p については $p = 1$ および $p = 10$ の両者について求め、帯域幅の影響についても考察した。図11よりバターース型フィルタの結果(図10)と同様に、減衰特性パラメータ c の影響がきわめて支配的であることが認められる。 c が小さい場合には上限周波数パラメータ q によって β は大きく変化し、たとえば $c = 5.1$ の場合には $q = 1000$, すなわちフィルタの高周波側遮断周波数 ω_2 に対して、上限界周波数 ω_4 が

$$\omega_4 = 1000 \cdot \omega_2 \tag{4.2}$$

であっても帯域制限のない場合の不規則度指数 β_0

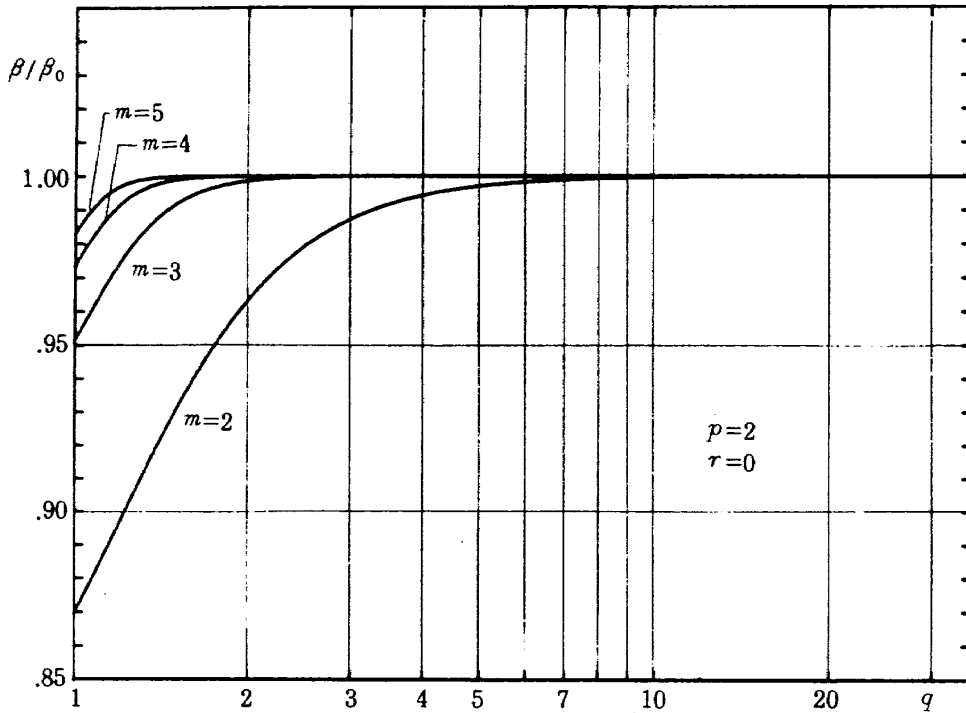


図10 バタワース型フィルタにおける上限界周波数の不規則度指数に及ぼす影響

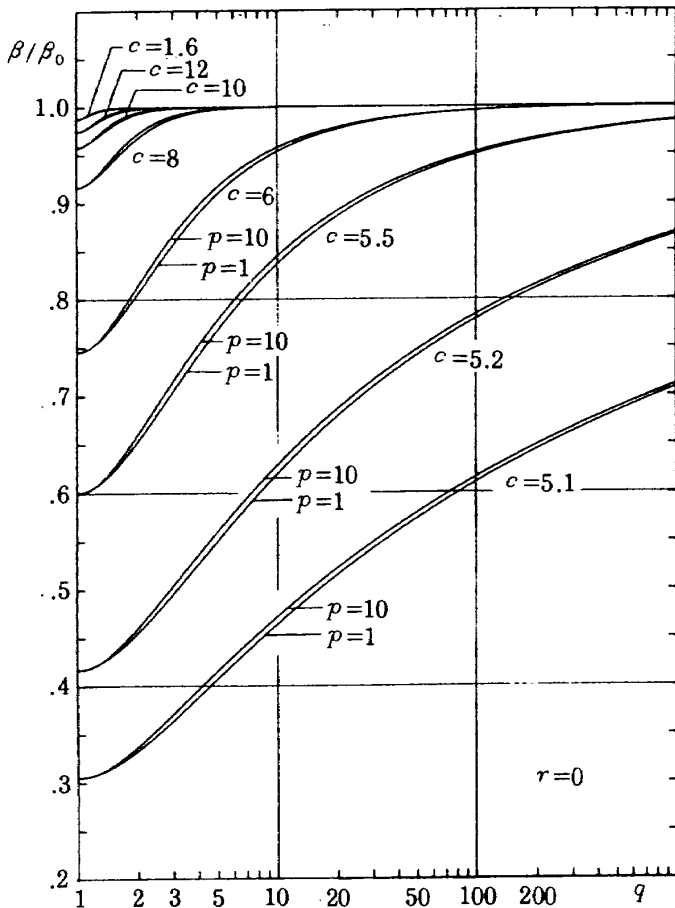


図11 台形フィルタにおける上限界周波数の不規則度指数に及ぼす影響

に比べて,

$$\beta = 0.7 \cdot \beta_0$$

程度の値に低下することがわかる。しかしながら c の増加とともに q の β/β_0 に及ぼす影響は急激に低下し、 $c \geq 8$ に対しては $q \geq 7$ の範囲で $\beta/\beta_0 \approx 1$ が成立する。たとえば乱気流中の主翼付根の曲げモーメントに対して、主翼について2次振動系の構造を仮定し、これに乱気流の代表的なモデル^{7),9)}が作用した場合、 c はおよそ10前後の値となり、実際の構造物では上限周波数の影響はそれほど顕著ではないことが予想される。

台形フィルタの減衰パラメータ c とバタワース型フィルタの減衰パラメータ m には (3.41) 式の関係が成立しているが、同じ減衰傾度であれば、両者の q に対する β/β_0 はほぼ一致していることが図10、図11より認められる。

また図11に示したように帯域幅については $p=1$ と $p=10$ で大体一致しており、帯域幅の如何にかかわらず q の β/β_0 に与える影響はほぼ等しい。バタワース型フィルタの場合も同様であることが別途確かめられている。

以上の考察は β_0 が求められる範囲について行っ

てきたが、図12は台形フィルタについて $c \leq 5$ の場合も含めて横軸を c 、縦軸を β で整理した例である。前節に述べたように $q \rightarrow \infty$ に対して $c > 5$ では β は収束するが $c \leq 5$ の範囲で発散する。図11において c の減少とともに q の β に及ぼす影響は加速的に増加することが認められたが、図12に明らかのように、その影響の大きさは $c = 3$ 付近で最大となっている。さらに $c < 3$ については再び減少し、 $c = 0$ の場合は予想されるとおり $\beta = 3/\sqrt{5}$ (≈ 1.36) に収束していることが明らかになった。

以上を要するに、上限界周波数の影響はパワース型フィルタであれ、台形フィルタであれ、その帯域によらず、ほぼ減衰特性によって支配されており、同じ減衰傾度であれば不規則度指数 β への影響は同等であること、および $c = 3$ に相当する減衰特性をパワースペクトル $S(\omega)$ が有しているときに影響が最大となること等が明らかになった。

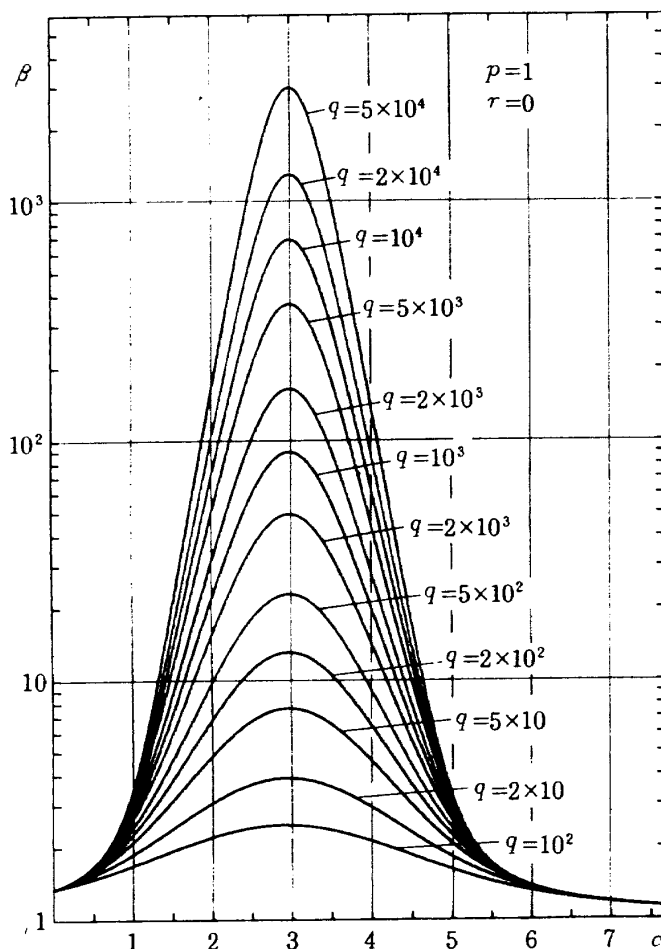


図12 台形フィルタにおける不規則度指数

5. 結 言

構造物の強度や疲労寿命を推定するうえで重要なパラメータである不規則度指数 β_0 および β を種々のパワースペクトル形状について解析し、指数の帯域幅、上下限界周波数等の影響を定量的に求めた結果、以下の結論を得た。

- (1) 不規則度指数は減衰特性が大きいほど小さい値を持つが ω^{-16} 以上では理想フィルタ（矩形フィルタ）を用いたランダム波とはほぼ一致する。したがって高周波側で ω^{-16} 以上の減衰特性を有するパワースペクトル密度関数 $S(\omega)$ に対してたとえばランダム荷重シミュレーションを行う場合には発生手法の容易な矩形スペクトルを用いることが可能である。
- (2) 不規則度指数は一般にパワースペクトルの帯域幅の増大に従って単調に増加するが、およそ $p = 10$ に対応する帯域幅で飽和点に達し、 $p > 10$ に対しては主として減衰特性によって各々決まる一定値に収束する。したがっていわゆる「広帯域ランダム波」が必ずしも不規則性の大きいランダム波を意味するとは限らないことが明らかになった。
- (3) 帯域制限の影響は下限界周波数 ω_3 に対しては

$$\omega_3 < 0.6 \cdot \omega_1$$

上限周波数 ω_4 に対しては、実際の構造で予想される減衰特性に対して

$$\omega_4 > 7 \cdot \omega_2$$

であれば、帯域制限の影響は事実上無視できる。通常、解析は理想的な白色雑音入力を前提として行なわれるのに対し、実験あるいはシミュレーションにおいては帯域制限を有する白色雑音を用いることになる。しかしながら上記の条件が満足される場合には帯域制限による誤差は生じないことが明らかになった。しかも上記の条件を満足することは通常きわめて容易である。

参 考 文 献

- 1) "Structural Fatigue as a Design Factor", Proceedings of the 10th Symposium, Brussels, 1979, International Committee on Aeronautical Fatigue.
- 2) "Fracture Mechanics Design Methodology", AGARD-LS-97, 1979.
- 3) "Service Fatigue Loads Monitoring Simulation, and Analysis", ASTM STP 671, P. R. Abelkins and J. M. Potter, Eds., American Society for Testing and Materials, 1979.
- 4) Rice, S. O. "Mathematical Analysis of Random Noise", Bell System Technical Journal, Vol. 23 (1944), 24 (1945). Also contained in "Selected Papers on Noise and Stochastic Processes", Wax, N. Ed., Dover Publications Inc., New York, 1954.
- 5) Papoulis, A., "The Fourier Integral and Its Applications", McGraw-Hill, New York, 1962.
- 6) 佐藤壽芳；機械構造物の耐震設計に関する研究，東京大学生産技術研究所報告，第15巻，第1号，1965，pp.1-109.
- 7) 小野幸一，山根皓三郎；垂直突風および航空機の突風応答に関する実験的研究，航空宇宙技術研究所報告，TR-89，1965.
- 8) Press, H., Meadows, M. T. and Hadlock, I., "A Reevaluation of Data on Atmospheric Turbulence and Airplane Gust Loads for Application in Spectral Calculations", NACA Report 1272, 1956.
- 9) 竹内和之，山根皓三郎；PSD法の大気乱れに対する航空機強度設計への応用とその問題点，日本航空宇宙学会誌，第18巻，第200号，1970，pp. 355-363.
- 10) "Airplane Strength and Rigidity Reliability Requirements, Repeated Loads and Fatigue", MIL-A-008866B, Department of the Air Force, 1975.
- 11) Buxbaum, O., "Random Load Analysis as a Link Between Operational Stress Measurement and Fatigue Life Assessment", Service Fatigue Loads Monitoring, Simulation, and Analysis, ASTM STP 671, P. R. Abelkis and J. M. Potter, Eds., American Society for Testing and Materials, 1979, pp. 5 ~ 20.
- 12) 菊川 真，城野政弘，溝口孝遠；ランダム荷重による疲れ寿命へのパワースペクトルの影響について，日本機械学会誌，第73巻，第621号，1970，pp.1359-1366.
- 13) Shinozuka, M., "Development of Reliability - Based Aircraft Safety Criteria: An Impact Analysis", Technical Report AFFDL-TR-76-31, Air Force Flight Dynamic Laboratory, 1976.
- 14) 板垣 浩，小川鉄夫，入江泰雄；K-値制御下の疲労き裂伝播（第2報）ランダム疲労について，日本造船学会論文集，第136号，1976，pp. 389-396.
- 15) Broch, J. T., "Effects of Spectrum Non-Linearities upon the Peak Distribution of Random Signals", Brüel and Kjoer Technical Review, No. 3, B & K. Instruments, Inc., 1963, pp. 5 ~ 31.
- 16) Wirsching, P. H., Light, M. C., "Fatigue under Wide Band Random Stress", Journal of the Structural Division, Vol. 106, No. ST7, American Society of Civil Engineers, 1980, pp. 1593 ~ 1607.
- 17) Jeans, L. L. and Tribble, W. L., "Test Simulation of Fighter Aircraft Maneuver Loads Spectra", Service Fatigue Loads Monitoring, Simulation, and Analysis, ASTM STP 671, P. R. Abelkis and J. M. Potter, Eds., American Society for Testing and Materials, 1979, pp. 204 ~ 254.
- 18) Cartright, D. E. and Longuet-Higgins, M. S., "The Statistical Distribution of the Maxima of a Random Function", Proc. of the Royal Soc. of London, No. 237, 1956.
- 19) 山川新二；不規則波の処理と累積ひん度，日本機械学会誌，第73巻，第621号，1970，pp. 1401-1410.

- 20) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信; 数学公式
I - 微分積分・平面曲線 -, 岩波全書 221,
岩波書店, 1956.

航空宇宙技術研究所報告 688号

昭和56年11月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 三興印刷
東京都新宿区信濃町12 三河ビル
