

ISSN 0389-4010

UDC 521.1:

629.78:

629.783

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-695

地球の人工衛星の赤道系要素に対する  
赤道面の運動の影響に関する研究

武内澄夫

1982年1月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 地球の人工衛星の赤道系要素に対する 赤道面の運動の影響に関する研究\*

武内 澄夫\*\*

## Effects of Motion of the Equatorial Plane on Equatorial Elements of an Earth Satellite

by

Sumio Takeuchi

### ABSTRACT

As the reference system an intermediate, quasi-inertial reference frame is adopted. This system has been shown by Kozai and Kinoshita<sup>2)</sup>. In this system the inclination and the argument of perigee are referred to the instantaneous equator of date, and the longitude of the node is measured from the mean equinox of 1950.0 along the mean equator of 1950.0 and then along the instantaneous equator of date. The earth is rotating uniformly in this system, thus giving a particularly simple expression for the sidereal angle.

The Lagrange's planetary equations in their usual form which hold for the orbital elements referred to the non-rotating axial system defined at 1950.0 are used. Then the equations are modified to include the effects of motion of the reference system and transformed into Gaussian form. Because of this motion partial derivatives of orbital elements with respect to time are introduced in the equations.

The partial derivatives are derived from the expressions including the terms up to the third order of precession.

The equations are solved by the method of linear perturbations and the perturbations to satellite equatorial orbital elements by the motion of the equatorial plane are obtained.

### 1. 緒 言

地球の人工衛星の運動を決定する理論をたてる場合には基準とする座標系および時刻系としてどのようなものをとるかがまず問題となる。この場合に一

般摂動の理論を用いるときには、瞬時の真の赤道に基づく地心赤道座標系を基準とし、これに関する諸量によって運動を記述することにすれば、地球の重力による摂動関数の取り扱いが比較的には簡単となり理論を進めやすい。しかしこのような座標系をとればこの座標系の運動の影響が運動方程式に表われてくる。そこで運動方程式におけるこの影響を考究すると共にそれに基づく、赤道座標系における軌道

---

\* 昭和56年5月29日 受付

\*\* 宇宙研究グループ

要素に対する摂動を求めることにした。

この場合の人工衛星の運動方程式は次のようにして導き出される。まず運動方程式を地心を原点とし慣性系に対して並進運動のみをする座標系を基準とする諸量によって記述する。ここで実際には慣性系として銀河系を用いている。次にこの運動方程式における諸量をさらに瞬時の真の赤道に基づく地心赤道座標系を基準とする諸量によって記述するのである。ただし先の並進運動座標系に対するこの赤道座標系の相対運動を表わす一般歳差、黄経の章動、黄道傾角の変化などの大きさは微小である。したがってこれらを無視してこの赤道座標系を並進運動座標系とみなし、この系を基準として人工衛星の運動を決定することが一般には行なわれている。

古在は並進運動座標系としてある一定の時刻における春分点と赤道に基づくものを用いた。また赤道座標系を基準とする量をとるに際してその一つである人工衛星の軌道の昇交点経度としてこの一定の時刻における春分点から測ったものを用いた。そして地球の重力による摂動関数の長年項のみをとった場合の運動方程式を用いて赤道面の運動による軌道要素に対する摂動を求めた。<sup>1)</sup> 次いで古在と木下はこの理論を拡張した。そして並進運動座標系として1950.0における平均春分点と平均赤道に基づくものを用いた。また摂動力として摂動関数から導かれる力が作用するときの運動方程式を、摂動関数に基づく項に赤道面の運動に基づく項を加えた形を用いて正確に表わした。そしてこの附加された項を、日月歳差の二乗と同位の微小数まで考慮して、赤道面の位置と軌道要素との関係式から求めた。そしてこの付加された項を積分して赤道面の運動による軌道要素に対する摂動を求めた。<sup>2)</sup>

一般に人工衛星の運動の決定は摂動力として摂動関数から導かれる力と摂動加速度によって表現される力の二種のものが作用する場合において行われる。そこでこのような場合に応ずるために摂動力として摂動加速度によって表現された力が作用するときの運動方程式を示すことにした。このために並進運動座標系を基準とする諸量によって記述された運動方程式<sup>3)</sup> から、古在と木下の理論<sup>2)</sup> を用いて、摂動加速度に基づく項に赤道面の運動に基づく付加項をつ

けた形の運動方程式を導いた。ここで軌道面が赤道面に近づくにつれて、赤道面の位置と軌道要素との関係を表す式においては、日月歳差よりなるべく高位の微小数までを考慮する必要が生じてくる。そこで日月歳差の三乗と同位の微小数までを考慮することにしてこの付加項を表現した。次にこの付加項から赤道面の運動による軌道要素に対する一次の摂動を求めた。また二次の摂動として、この一次の摂動に基づいて生起する、二次の zonal harmonic による長年摂動におけるものを求めた。なお特に赤道面の位置と軌道要素との関係を表す式において日月歳差の二乗と同位の微小数までを考慮した部分までをとる場合の摂動を一般項による表示を用いて具体的に示し、計算に即応できるようにした。そして例にとった人工衛星に関して摂動の数値計算を行った。

## 2. 力学系

時刻系として、原子時  $t$  をとる。そしてこれを用いて運動方程式から運動を決定することにする。

次に地心  $O$  を原点とし、1950.0の平均春分点に向けて  $x_s$  軸をとる。また1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく赤経が  $90^\circ$  の点をこの平均赤道上にとり、この点に向けて  $y_s$  軸をとる。このとき右手系直交座標系  $O x_s y_s z_s$  は1950.0の平均春分点と平均赤道に基づく、地心を原点とし慣性系に対して並進運動のみをする系とみなされる。また座標系  $O x_s y_s z_s$  と同様に瞬時の真の春分点と赤道に基づいて考えられる右手系直交座標系を  $O x_T y_T z_T$  とする。これは瞬時の真の赤道に基づく地心赤道座標系である。以下においては座標系  $O x_T y_T z_T$  を基準とする諸量を用い、座標系  $O x_s y_s z_s$  を基準として運動を決定することにする。

それから人工衛星に作用する外力としては potential から導かれる力とそれ以外の力が考えられる。ここでこの potential を人工衛星の単位質量に対して次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\mu}{r} + R \\ \mu &= GM_e \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここで

$\mu$  : 地心重力定数

$G$  : 万有引力の定数

$M_e$  : 地球の質量

$r$  : 人工衛星の地心距離

$R$  : 摂動関数

である。なお、地球に対する人工衛星の質量を無視してある。またこの potential から導かれる力による摂動加速度を  $P$  とする。

### 3. 運動方程式

#### 3.1 並進運動座標系を基準とする量を用いる場合

並進運動座標系  $Ox, y, z$ , を基準として考えた人工衛星の接触軌道要素として次のものをとる。

$a$  : 軌道の半長軸

$e$  : 軌道の離心率

$J$  : 1950.0 の平均赤道面に対する軌道面の傾斜角

$N$  : 昇交点経度

1950.0 の平均春分点と平均赤道に基づいた昇交点の赤経

$\phi$  : 1950.0 の平均赤道から測った近地点引数

$\chi$  : 時刻  $t(j)$  における平均近点離角

また

$n$  : 平均運動

$M$  : 平均近点離角

とする。ここで  $\chi$  の代わりに次のものを取りうる。

$\chi^*$  : 時刻  $t(j)$  における平均近点離角

このとき次式が成立する。

$$M = \chi + n(t - t(j)) = \chi^* + \int_{t(j)}^t n dt \quad (3.1.1)$$

なお、 $R$  は次のように表わされる。

$$R = R(a, e, J, N, \phi, M, t)$$

まず摂動力が摂動関数から導かれる場合を考えることにする。この場合に座標系  $Ox, y, z$ , を基準とする諸量で表わされる運動方程式として次の Lagrange's planetary equations が成立する。<sup>3)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \chi^*} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{na^2 e} \left\{ (1-e^2) \frac{\partial R}{\partial \chi^*} - \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right\} \\ \frac{dJ}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \cot J \frac{\partial R}{\partial \phi} - \operatorname{cosec} J \frac{\partial R}{\partial N} \right) \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin J} \frac{\partial R}{\partial J} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot J}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial J} \\ \frac{\partial \chi^*}{\partial t} &= -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.2)$$

ここで  $(\partial R / \partial a)$  は  $(\partial R / \partial a)_{n=\text{const}}$  を示す。

なお次式が成立する。

$$\frac{\partial R}{\partial M} = \frac{\partial R}{\partial \chi} = \frac{\partial R}{\partial \chi^*} \quad (3.1.3)$$

#### 3.2 瞬時の真の赤道座標系を基準とする量を用いる場合

次のようにする。

$\alpha$  : 1950.0 の平均春分点と平均赤道に基づく瞬時の真の赤道の昇交点の赤経

次に赤道座標系  $Ox_T y_T z_T$  を基準として考えた人工衛星の接触軌道要素として  $a, e, \chi$  および  $\chi^*$  の他に次のものをとる。

$i$  : 瞬時の真の赤道面に対する軌道面の傾斜角

$Q_q$  : 昇交点経度

$\alpha$  に 1950.0 の平均赤道に対する瞬時の真の赤道の昇交点から瞬時の真の赤道に沿って軌道の昇交点までを測った角を加えた角

$\omega$  : 瞬時の真の赤道面から測った近地点引数

また次のようにする。

$\sigma$  : 軌道に沿って測った 1950.0 の平均赤道と瞬時の真の赤道の角距離

##### 3.2.1 摂動関数による場合

摂動関数を用いて表わされる運動方程式はすでに導き出されている。<sup>2)</sup> まずこれを示すことにする。 $R$  は第 3.1 節において示されているが、これはまた次のようにも表わされる。

$$R = R(a, e, i, Q_q, \omega, M, t)$$

このとき  $i, Q_q, \omega$  などは  $J, N, \phi, t$  などの関数

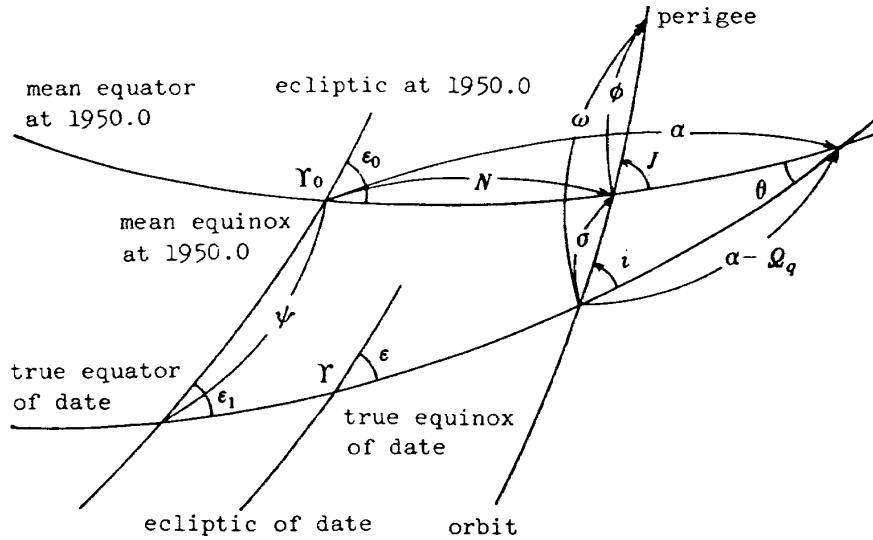


図1 並進運動の system と古在, 木下の system

となり, 次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{\partial i}{\partial J} \frac{dJ}{dt} + \frac{\partial i}{\partial N} \frac{dN}{dt} + \frac{\partial i}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{dQ_q}{dt} &= \frac{\partial Q_q}{\partial J} \frac{dJ}{dt} + \frac{\partial Q_q}{\partial N} \frac{dN}{dt} + \frac{\partial Q_q}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial Q_q}{\partial t} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial \omega}{\partial J} \frac{dJ}{dt} + \frac{\partial \omega}{\partial N} \frac{dN}{dt} + \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial J} &= \frac{\partial R}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial J} + \frac{\partial R}{\partial Q_q} \frac{\partial Q_q}{\partial J} + \frac{\partial R}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial J} \\ \frac{\partial R}{\partial N} &= \frac{\partial R}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial N} + \frac{\partial R}{\partial Q_q} \frac{\partial Q_q}{\partial N} + \frac{\partial R}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial N} \\ \frac{\partial R}{\partial \phi} &= \frac{\partial R}{\partial \omega} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial J} &= \cos \sigma \\ \frac{\partial i}{\partial N} &= -\sin J \sin \sigma \\ \frac{\partial i}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial Q_q}{\partial J} &= \frac{\sin \sigma}{\sin i} \\ \frac{\partial Q_q}{\partial N} &= \frac{\sin J \cos \sigma}{\sin i} \\ \frac{\partial Q_q}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial J} &= -\cot i \sin \sigma \\ \frac{\partial \omega}{\partial N} &= \cos J - \sin J \cot i \cos \sigma \\ \frac{\partial \omega}{\partial \phi} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1.3)$$

ここで (3.1.2) の第一, 二および六の三方程式をとる。また (3.2.1.1) に (3.1.2) の第三, 四, および五の方程式を用いた三方程式をつくる。そしてこれらの六方程式に (3.2.1.2) と (3.2.1.3) を適用すれば摂動力が摂動関数から導かれる場合の, 座標系  $Ox_T y_T z_T$  を基準とする諸量で表わされた運動方程式がえられる。これは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \chi^*} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{na^2 e} \left\{ (1-e^2) \frac{\partial R}{\partial \chi^*} - \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right\} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \cot i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \operatorname{cosec} i \frac{\partial R}{\partial Q_q} \right) + \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{dQ_q}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\partial Q_q}{\partial t} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{d\chi^*}{dt} = -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) \quad (3.2.1.4)$$

ここでも次のようになる。

$$\frac{\partial R}{\partial M} = \frac{\partial R}{\partial \chi} = \frac{\partial R}{\partial \chi^*} \quad (3.2.1.5)$$

さらに人工衛星の接触軌道要素として次のものをとる。

$Q$  : 昇交点経度

瞬時の真の春分点と赤道に基づいた昇交点の赤経

そうすれば  $R$  を次のように表わすことができる。

$$R = R(a, e, i, Q, \omega, M, t)$$

また  $Q_q$  と  $Q$  の定義によれば次のように表わしうる。

$$Q = Q_q + D \quad (3.2.1.6)$$

この  $D$  およびこれに関する諸量を第 8 章において求めることにする。以上から次のようになる。

$$\frac{\partial R}{\partial Q_q} = \frac{\partial R}{\partial Q} \quad (3.2.1.7)$$

座標系  $Ox_s y_s z_s$  に対する座標系  $Ox_T y_T z_T$  の相対運動を表わす一般歳差，黄経の章動，黄道傾角の変化などの大きさは微小である。そこでこれらを見捨て座標系  $Ox_T y_T z_T$  を進運動座標系とみなす場合がある。この場合には赤道面の運動による軌道要素の変化率は無視され，また  $D$  は一定値をとるとみなされる。したがって (3.2.1.4) において次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial Q_q}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \\ \frac{dQ_q}{dt} = \frac{dQ}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1.8)$$

### 3.2.2 摂動加速度によるとき

次に摂動加速度を用いて表わされる運動方程式を導くことにする。まず右手系直交座標系  $OXYZ$  をとる。そしてこの  $X$  軸の方向，向きを  $O$  に関する人工衛星の位置ベクトルの方向，向きに一致させる。また  $Z$  軸の方向，向きを  $O$  に関する人工衛星の角運動量の方向，向きに一致させることにする。そして  $P$  の  $X, Y, Z$  成分を  $S, T, W$  とする。なお次のようにする。

$f$  : 真近点離角

$E$  : 離心近点離角

このとき座標系  $Ox_s y_s z_s$  を基準とする諸量を用いて次式が成立する<sup>3)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) &= \frac{r}{a} S \\ \frac{\partial R}{\partial e} &= -aS \cos f + r \sin f \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) T \\ \frac{\partial R}{\partial J} &= Wr \sin(\phi + f) \\ \frac{\partial R}{\partial N} &= Tr \cos J - Wr \sin J \cos(\phi + f) \\ \frac{\partial R}{\partial \phi} &= Tr \\ \frac{\partial R}{\partial \chi^*} &= \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} S \sin f + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r} T \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2.1)$$

ここで (3.1.2) の第一，二および六の三方程式をとる。また，(3.2.1.1) に (3.1.2) の第三，四および五の方程式を用いた三方程式をつくる。そしてこれらの六方程式に (3.2.2.1) と (3.2.1.3) を適用すれば摂動力が摂動関数から導かれる力である場合の，座標系  $Ox_T y_T z_T$  を基準とする諸量で表わされた運動方程式がえられる。これは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ Se \sin f + T \frac{a(1-e^2)}{r} \right\} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ S \sin f + T (\cos E + \cos f) \right\} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} Wr \cos u + \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{dQ_q}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} Wr \sin u + \frac{\partial Q_q}{\partial t} \\ \frac{d\omega}{dt} &= - \left( \frac{dQ_q}{dt} - \frac{\partial Q_q}{\partial t} \right) \cos i \\ &\quad + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ -S \cos f + T \left\{ \frac{r}{a(1-e^2)} + 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \sin f \right] + \frac{\partial \omega}{\partial t} \\ \frac{d\chi^*}{dt} &= - \frac{2}{na} \frac{r}{a} S \\ &\quad - \sqrt{1-e^2} \left\{ \frac{d\omega}{dt} - \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left( \frac{dQ_q}{dt} \right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$u = \omega + f \left. \begin{array}{l} -\frac{\partial Q_q}{\partial t} \cos i \end{array} \right\} \quad (3.2.2.2)$$

摂動力が摂動関数から導かれる力であるとして求めた (3.2.2.2) は摂動加速度を陽に含む運動方程式となっている。それ故に摂動力が、摂動関数から導かれる力であることに限定されることなく、どのような力であっても (3.2.2.2) は成立することになる。つまり  $P$  が、摂動力として摂動関数から導かれる力とそれ以外の力が存在する場合の摂動加速度であるときにも (3.2.2.2) は運動方程式を表すことになる。

座標系  $Ox_T y_T z_T$  を並進運動座標系とみなす場合には第 3.2.1 節におけると同様に (3.2.2.2) において (3.2.1.8) が成立する。

以上においては並進運動座標系  $Ox, y, z$  を基準とする諸量によって記述された運動方程式 (3.1.2) から (3.2.2.2) を導いた。他方において瞬時の真の赤道座標系  $Ox_T y_T z_T$  を基準とする諸量においても (3.2.2.1) に相等する式が成立する。したがってこの式と (3.2.1.7) を運動方程式 (3.2.1.4) に用いることによって (3.2.2.2) を出すことができる。

#### 4. 赤道面の位置と軌道要素との関係を表わす式

運動方程式 (3.2.1.4) あるいは (3.2.2.2) によれば赤道面の運動によって変化する軌道要素は  $i, Q_q$  および  $\omega$  である。そこでこれらの三軌道要素が赤道面の位置にどのように依存するかを表わす式を求める。

次の量をとる。

$\theta$  : 1950.0 の平均赤道と瞬時の真の赤道のなす角

$\theta$  の数値は微小であり、現在の値は概略において  $10^{-3}$  の程度である。ここで瞬時の真の赤道面の位置を  $\alpha$  および  $\theta$  によって表すことができる。したがってこれらと  $i, Q_q$  および  $\omega$  との関係式を求めれば、これがこの三軌道要素が赤道面の位置にどのように依存するかを表す式となる。

$\alpha, \theta, J, N, \sigma, i$  および  $Q_q$  の間には次の関係式が成立する。

$$\frac{\sin(\alpha - Q_q)}{\sin J} = \frac{\sin(\alpha - N)}{\sin i} = \frac{\sin \sigma}{\sin \theta} \quad (4.1)$$

$$\sin \theta \cos(\alpha - N) = \sin(J - i) + 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2} \times \cos J \sin i \quad (4.2)$$

$$-\sin \sigma \cos J = \sin(Q_q - N) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \times \sin(\alpha - Q_q) \cos(\alpha - N_q) \quad (4.3)$$

これらの三式から  $\alpha$  および  $\theta$  と  $i, Q_q$  および  $\omega$  との関係を表す式が求められる。これは  $\theta$  の三乗と同位の微小数までを考慮すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} i &= J - \sin \theta \cos(\alpha - N) \\ &+ \frac{1}{2} \cot J \sin^2 \theta \sin^2(\alpha - N) \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \cot^2 J \sin^2(\alpha - N) \cos(\alpha - N) \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} \cos^3(\alpha - N) \right\} \sin^3 \theta \\ Q_q &= N - \cot J \sin \theta \sin(\alpha - N) - \left( \frac{1}{2} + \cot^2 J \right) \\ &\times \sin^2 \theta \sin(\alpha - N) \cos(\alpha - N) \\ &+ \frac{1}{\sin^3 J} \left\{ \frac{1}{3} \cos^3 J \sin^3(\alpha - N) \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} (\cos J + \cos^3 J) \sin(\alpha - N) \right. \\ &\left. \times \cos^2(\alpha - N) \right\} \sin^3 \theta \\ \omega &= \phi + \frac{1}{\sin J} \sin \theta \sin(\alpha - N) \\ &+ \frac{\cos J}{\sin^2 J} \sin^2 \theta \sin(\alpha - N) \cos(\alpha - N) \\ &- \frac{1}{\sin^3 J} \left\{ \left( \frac{1}{2} \cos^2 J - \frac{1}{6} \right) \sin^3(\alpha - N) \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} (1 + \cos^2 J) \sin(\alpha - N) \right. \\ &\left. \times \cos^2(\alpha - N) \right\} \sin^3 \theta \end{aligned} \quad (4.4)$$

この式の右辺において一般には第二, 三, 四項はそれぞれ  $\theta$ , その二乗, 三乗と同位の微小数である。

## 5. 赤道面の運動による 軌道要素の変化率

### 5.1 赤道面の位置を赤道の昇交点の赤経と両赤道間の角によって表した場合

赤道面の位置は  $t$  の関数である  $\alpha$  と  $\theta$  によって表される。したがって赤道面の運動による軌道要素  $i$ ,  $\Omega_q$  および  $\omega$  の変化率は (4.4) の  $t$  に関する偏導関数で与えられる。このようにして得られた式において  $J$  と  $N$  を  $i$  と  $\Omega_q$  で置き換える。ここで  $\sin \theta$  と  $d\theta/dt$  に関しての一次, 二次および三次の式を因数とする項をそれぞれ添字の I, II および III によって示すことにすれば次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial t} &= D_{iI} + D_{iII} + D_{iIII} \\ \frac{\partial \Omega_q}{\partial t} &= D_{\Omega_q I} + D_{\Omega_q II} + D_{\Omega_q III} \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= D_{\omega I} + D_{\omega II} + D_{\omega III} \\ D_{iI} &= -T_3 \sin \Omega_q - T_4 \cos \Omega_q \\ D_{iII} &= 0 \\ D_{iIII} &= -\frac{1}{2} (T_1^2 + T_2^2) (T_7 \sin \Omega_q + T_8 \cos \Omega_q) \\ D_{\Omega_q I} &= -\cot i (T_3 \cos \Omega_q - T_4 \sin \Omega_q) \\ D_{\Omega_q II} &= \frac{1}{2} (T_2 T_3 - T_1 T_4) \\ D_{\Omega_q III} &= -\frac{1}{2} \cot i (T_7 \cos \Omega_q - T_8 \sin \Omega_q) \\ &\quad \{T_1^2 + T_2^2 - 3(T_1 \sin \Omega_q + T_2 \cos \Omega_q)^2\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cot i (T_5 \sin \Omega_q + T_6 \cos \Omega_q) \\ &\quad \{T_1^2 + T_2^2 - 3(T_1 \cos \Omega_q - T_2 \sin \Omega_q)^2\} \\ D_{\omega I} &= \frac{1}{\sin i} (T_3 \cos \Omega_q - T_4 \sin \Omega_q) \\ D_{\omega II} &= 0 \\ D_{\omega III} &= \frac{1}{2 \sin i} (T_1^2 + T_2^2) (T_7 \cos \Omega_q - T_8 \sin \Omega_q) \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \sin \theta \sin \alpha \\ T_2 &= \sin \theta \cos \alpha \\ T_3 &= \frac{d}{dt} (\sin \theta \sin \alpha) \\ T_4 &= \frac{d}{dt} (\sin \theta \cos \alpha) \\ T_5 &= \frac{T_1 (T_2 T_3 - T_1 T_4)}{T_1^2 + T_2^2} \\ T_6 &= \frac{T_2 (T_2 T_3 - T_1 T_4)}{T_1^2 + T_2^2} \\ T_7 &= T_3 - T_6 \\ T_8 &= T_4 + T_5 \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

$\sin \theta$ ,  $d\theta/dt$  および  $d\alpha/dt$  の数値はいずれも微小である。  $t$  の単位として一日をとればそれぞれの概略の値は現在において  $10^{-3}$ ,  $10^{-7}$  および  $10^{-5}$  と同位の微小な数である。したがって添字の I, II および III によって示される諸量の大きさは一般にはそれぞれ  $10^{-7}$ ,  $10^{-11}$  および  $10^{-13}$  をこえぬ程度となる。

### 5.2 赤道面の位置を日月歳差, 黄経の章動, 平均黄道傾角および黄道傾角の章動によって表した場合

次の諸量をとる。

- $\psi$  : 1950.0 における黄道に沿って測った, 1950.0 の平均赤道と瞬時の真の赤道との角距離
- $\epsilon_0$  : 1950.0 における平均赤道に基づく平均黄道傾角
- $\epsilon_1$  : 瞬時の真の赤道に対する 1950.0 における黄道の傾角

これらに関して次式が成立する。

$$\begin{aligned} \sin \theta \sin \alpha &= \sin \epsilon_1 \sin \psi \\ \sin \theta \cos \alpha &= \sin \epsilon_0 \cos \epsilon_1 - \cos \epsilon_0 \sin \epsilon_1 \cos \psi \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

この二式を用いて (5.1.1) と (5.1.2) における  $\alpha$ ,  $d\alpha/dt$ ,  $\theta$  および  $d\theta/dt$  を  $\psi$ ,  $d\psi/dt$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1$  および  $d\epsilon_1/dt$  によって置き換える。そうすれば次式をうる。

$$\begin{aligned} T_1 &= \{ \sin \epsilon_0 + \cos \epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_0) \} \sin \psi \\ T_2 &= -(\epsilon_1 - \epsilon_0) + \sin \epsilon_0 \cos \epsilon_0 (1 - \cos \psi) \\ T_3 &= \{ \cos \epsilon_0 - \sin \epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_0) \} \frac{d\epsilon_1}{dt} \sin \psi \\ &\quad + \{ \sin \epsilon_0 + \cos \epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_0) \} \frac{d\psi}{dt} \cos \psi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 T_4 &= -\left\{ \sin^2 \varepsilon_0 + \cos^2 \varepsilon_0 \cos \psi \right. \\
 &\quad \left. + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(1 - \cos \psi) \right\} \frac{d\varepsilon_1}{dt} \\
 &\quad + \cos \varepsilon_0 \left\{ \sin \varepsilon_0 + \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \right\} \frac{d\psi}{dt} \sin \psi \\
 T_5 &= -\frac{1}{\sin \varepsilon_0} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\psi}{dt} \\
 &\quad \times \sum_{j=0}^{jm} \frac{(2j-1)!!}{j! 2^j} \cos^{2j+1} \psi \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cos \varepsilon_0 \frac{d\psi}{dt} \sin \psi \cos \psi + \sin \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \\
 &\quad - \frac{\cos^2 \varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \psi \\
 &\quad - \cos \varepsilon_0 \frac{d\psi}{dt} \sin \psi \\
 T_6 &= \frac{1}{\sin \varepsilon_0} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 \frac{d\psi}{dt} \sum_{j=0}^{jm} \cos^{2j+1} \psi \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\psi}{dt} \cos \psi \\
 &\quad - \sin \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sum_{j=0}^{jm} \frac{(2j-1)!! \cos^{2j} \psi}{j! 2^j} \\
 &\quad + \frac{\cos^2 \varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sum_{j=0}^{jm} \frac{(2j-1)!! \cos^{2j+1} \psi}{j! 2^j} \\
 &\quad + \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\psi}{dt} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 \frac{d\psi}{dt} \sin^2 \psi \cos \psi \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \psi \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cos^3 \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \psi \cos \psi \\
 &\quad - \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 \frac{d\psi}{dt} (1 - \cos \psi) \\
 T_7 &= T_3 - T_6 \\
 T_8 &= T_4 + T_5
 \end{aligned}$$

(5.2.2)

ここで  $\cos^{2j+1} \psi$  あるいは  $\cos^{2j} \psi$  を因数とする項

において  $jm$  は無限大である。しかしこれらの項は比較的小さいので  $jm$  をあまり大きくする必要はない。また  $\psi$ ,  $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ ,  $d\psi/dt$  および  $d\varepsilon_1/dt$  の数値はいずれも微小である。なおこれらは  $t$  の単位として一日をとることにすれば、概略においてそれぞれの現在の値は  $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-6}$  および  $10^{-7}$  と同位の微小な数となっている。したがって  $\theta$  と  $\psi$  はほぼ同位の微小な数である。

$El_p$  は  $i$ ,  $Q_q$  および  $\omega$  を表すことにする。このとき赤道面の運動による  $El_p$  の変化率は (5.1.1) と (5.2.2) によって与えられ、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial El_p}{\partial t} &= \sum f_i (\sin i, \cos i) f_{\varepsilon_0} (\sin \varepsilon_0, \cos \varepsilon_0) \\
 &\quad \times (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^{r_1} \left( \frac{d\varepsilon_1}{dt} \right)^{r_2} \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^{r_3} \sin^{r_4} \psi \\
 &\quad \times \cos^{r_5} \psi \sin^{r_6} Q_q \cos^{r_7} Q_q \quad (5.2.3)
 \end{aligned}$$

ここで  $\sum$  は上式の右辺の形にしてすべての項にわたって加えることを示し、 $f_i$  と  $f_{\varepsilon_0}$  はそれぞれ  $\sin i$ ,  $\cos i$  と  $\sin \varepsilon_0$ ,  $\cos \varepsilon_0$  の有理関数を表す。また  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $r_4$ ,  $r_5$ ,  $r_6$  および  $r_7$  は次に示す数値のいずれかをとる。

$$\begin{aligned}
 r_1, r_4 &: 0, 1, 2, 3, 4 \\
 r_2, r_3, r_6, r_7 &: 0, 1, \\
 r_5 &: 0, 1, 2, \dots, jm
 \end{aligned}$$

特に (5.1.1) の最初の三式において右辺の第二項までをとることにすれば (5.2.3) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial i}{\partial t} &= D_i \mathbf{I} + D_i \mathbf{II} \\
 \frac{\partial Q_q}{\partial t} &= D_{Q_q} \mathbf{I} + D_{Q_q} \mathbf{II} \\
 \frac{\partial \omega}{\partial t} &= D_\omega \mathbf{I} + D_\omega \mathbf{II} \\
 D_i \mathbf{I} &= -\left\{ \cos \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \psi \sin Q_q \right. \\
 &\quad \left. - \sin \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \psi \sin Q_q \right. \\
 &\quad \left. + \sin \varepsilon_0 \frac{d\psi}{dt} \cos \psi \sin Q_q \right. \\
 &\quad \left. + \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\psi}{dt} \cos \psi \sin Q_q \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin^2 \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \varrho_q \\
& -\cos^2 \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \psi \cos \varrho_q \\
& -\sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \varrho_q \\
& +\sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \psi \cos \varrho_q \\
& +\sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\psi}{dt} \sin \psi \cos \varrho_q \\
& +\cos^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\psi}{dt} \sin \psi \cos \varrho_q \\
D_{i\text{II}} &= 0 \\
D_{\varrho q\text{I}} &= -\cot i \left\{ \cos \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \psi \cos \varrho_q \right. \\
& -\sin \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \psi \cos \varrho_q \\
& +\sin \varepsilon_0 \frac{d\psi}{dt} \cos \psi \cos \varrho_q \\
& +\cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\psi}{dt} \cos \psi \cos \varrho_q \\
& +\sin^2 \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \varrho_q \\
& +\cos^2 \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \psi \sin \varrho_q \\
& +\sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \varrho_q \\
& -\sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \cos \psi \sin \varrho_q \\
& -\sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\psi}{dt} \sin \psi \sin \varrho_q \\
& \left. -\cos^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\psi}{dt} \sin \psi \sin \varrho_q \right\} \\
D_{\varrho q\text{II}} &= \frac{1}{2} \left\{ (-\cos \varepsilon_0 + \sin^2 \varepsilon_0) (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \psi \right. \\
& -\sin^3 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\psi}{dt} \cos \psi \\
& +\sin \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \psi \\
& \left. +\sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\psi}{dt} \cos \psi \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\cos^3 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\varepsilon_1}{dt} \sin \psi \cos \psi \\
& -\sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\psi}{dt} \cos^2 \psi \\
& -\sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\psi}{dt} \cos^2 \psi \\
& -\sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \frac{d\psi}{dt} \sin^2 \psi \\
& -2 \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{d\psi}{dt} \sin^2 \psi \\
D_{\omega\text{I}} &= -\frac{1}{\cot i \sin i} D_{\varrho q\text{I}} \\
D_{\omega\text{II}} &= 0
\end{aligned}$$

(5.2.3')

ただし上式において  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2$  を因数にもつ項は特に微小なので省略してある。

次の諸量をとる。

$\psi_m$  : 1950.0 からの日月歳差

$\Delta\psi$  : 黄経の章動の長周期部分

$d\psi$  : 黄経の章動の短周期部分

$\varepsilon$  : 瞬時の真の黄道傾角

$\varepsilon_m$  : 瞬時の平均赤道に基づく平均黄道傾角

$\Delta\varepsilon$  : 黄道傾角の章動の長周期部分

$d\varepsilon$  : 黄道傾角の章動の短周期部分

これらに関して次の式が成立する。

$$\psi = \psi_m + \Delta\psi + d\psi$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \Delta\varepsilon + d\varepsilon$$

また次のようにみなす。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon$$

このとき次のように表すことができる。

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = (\varepsilon_m - \varepsilon_0) + \sum_{k=2}^{km} p_k S_R \cos R_k$$

$$\psi = \psi_m + \sum_{l=2}^{lm} q_l S_l \sin S_l$$

(5.2.4)

ここで  $\varepsilon_m, \varepsilon_0, p_k, R_k, \psi_m, q_l$  および  $S_l$  は天体暦<sup>4)</sup>に表示されている。この  $p_k$  および  $q_l$  は角の秒を単位として与えられ、 $R_k$  および  $S_l$  は太陽と月の位置に関する量である。また次のようになる。

$$S_R = \frac{\pi}{3600 \times 180} \frac{\text{rad}}{\text{arc sec}}$$

(5.2.4) の  $\epsilon_1 - \epsilon_0$  および (5.2.4) から求められる  $\epsilon_1$  と  $\psi$  の変化率を次のように表すことにする。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 - \epsilon_0 &= \sum_{k'=1}^{km} P_{k'} \cos R_{k'} \\ P_1' &= \epsilon_m - \epsilon_0, \quad R_1' = 0 \\ P_{k'}' &= p_{k'} S_R, \quad R_{k'}' = R_{k'}, \quad k' = 2, 3, \dots, km \\ \frac{d\epsilon_1}{dt} &= \sum_{k=1}^{km} P_k \sin R_k \\ P_1 &= \frac{d\epsilon_m}{dt}, \quad R_1 = \frac{\pi}{2} \\ P_k &= -p_k S_R \dot{R}_k, \quad k = 2, 3, \dots, km \\ \frac{d\psi}{dt} &= \sum_{l=1}^{lm} Q_l \cos S_l \\ Q_1 &= \frac{d\psi_m}{dt}, \quad S_1 = 0 \\ Q_l &= q_l S_R \dot{S}_l, \quad l = 2, 3, \dots, lm \end{aligned} \right\} \quad (5.2.5)$$

ここで  $\dot{R}_k$  および  $\dot{S}_l$  はそれぞれ  $R_k$  および  $S_l$  の変化率である。なお  $R_{k'}'$  の変化率を  $\dot{R}_{k'}'$  とし、 $p_k$  と  $q_l$  の変化率は微小なる故にこれらを見捨ててある。

(5.2.3) あるいは (5.2.3') に (5.2.5) を代入すれば赤道面の運動による軌道要素の変化率が日月歳差、黄経の章動、平均黄道傾角および黄道傾角の章動によって表されることになる。

## 6. 赤道面の運動による軌道要素の変化

### 6.1 一次の摂動

運動方程式の右辺に (5.2.3) のみを取り、さらに (5.2.5) を代入し、これを解けば赤道面の運動による軌道要素  $i$ 、 $\Omega_q$  および  $\omega$  に対する摂動が  $t$  の関数として求められることになる。しかし、これを解くことはできないので近似解を求めることにする。

以下において諸量を示す記号における添字 ( $j$ ) によってこの諸量の  $t(j)$  における値を示すことにする。次に時間

$$\delta t = (t + \delta t) - t$$

をとるときに

$$(\delta t)_{(j)} = \{ t_{(j)} + (\delta t)_{(j)} \} - t_{(j)} = t_{(j+1)} - t_{(j)} \quad (6.1.1)$$

の間において次のようになるとみなす。

$$\left. \begin{aligned} i &= i_{(j)} \\ \epsilon_1 - \epsilon_0 &= \sum_{k'=1}^{km} P_{k'(j)} \cos R_{k'}' \\ \frac{d\epsilon_1}{dt} &= \sum_{k=1}^{km} P_{k(j)} \sin R_k \\ \frac{d\psi}{dt} &= \sum_{l=1}^{lm} Q_{l(j)} \cos S_l \\ \dot{R}_{k'}' &= \dot{R}_{k'(j)}' \\ \dot{R}_k &= \dot{R}_{k(j)} \\ \dot{S}_l &= \dot{S}_{l(j)} \\ \dot{\psi} &= \dot{\psi}_{(j)} \\ \dot{\Omega}_q &= \dot{\Omega}_{q(j)} \end{aligned} \right\} \quad (6.1.2)$$

ここで  $\dot{\psi}$  と  $\dot{\Omega}_q$  はそれぞれ  $\psi$  と  $\Omega_q$  の変化率を表わす。

運動方程式の右辺に (5.2.3) のみを取り、さらに (5.2.5) を代入して、以上のようにしたものは一次の摂動に基づく軌道要素の変化率

$$\left( \frac{\partial E l_p}{\partial t} \right)_1$$

を表わす式となる。そしてこれは  $t$  に関して積分が可能である。

この式から求められる一次の摂動に基づく軌道要素の変化を

$$\delta_1 E l_p$$

とする。ここでこの式を  $t(j)$  から  $t(j+1)$  まで積分して求められるこの変化を

$$(\delta_1 E l_p)_{(j)}$$

とする。また  $t(j+1)$  を  $t$  としたときのこの変化を

$$\delta_1 E l_p(j)$$

とする。

$(\delta_1 E l_p)_{(j)}$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\delta_1 E l_p)_{(j)} &= \left\{ \sum f_i (\sin i, \cos i) f_{\epsilon_0} (\sin \epsilon_0, \right. \\ &\quad \left. \cos \epsilon_0) A_1 A_2 \dots A_s \right. \\ &\quad \left. I_{v,w} (B_1, B_2, \dots, B_{v-w}, \right. \end{aligned}$$

$$B_{v-w+1}, \dots, B_v \} (j) \quad (6.1.3)$$

ここで  $A_1, A_2, \dots, A_s$  は  $P'_1, P'_2, \dots, P'_{km}$  の内の  $r_1$  個,  $P_1, P_2, \dots, P_{km}$  の内の  $r_2$  個および  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{lm}$  の内の  $r_3$  個を示し, 次のようになる。

$$s = r_1 + r_2 + r_3$$

また  $B_1, B_2, \dots, B_{v-w}$  は  $R_1, R_2, \dots, R_{km}$  の内の  $r_2$  個,  $r_4$  個の  $\psi$  および  $r_6$  個の  $\mathcal{Q}_q$  を示し, 次のようになる。

$$v - w = r_2 + r_4 + r_6$$

そして  $B_{v-w+1}, \dots, B_v$  は  $R'_1, R'_2, \dots, R'_{km}$  の内の  $r_1$  個,  $S_1, S_2, \dots, S_{lm}$  の内の  $r_3$  個,  $r_5$  個の  $\psi$  および  $r_7$  個の  $\mathcal{Q}_q$  を示し, 次のようになる。

$$w = r_1 + r_3 + r_5 + r_7$$

なお  $\Sigma$  は上式の右辺の形の項にしてすべての項にわたって加えることを示す。さらに次のようになる。

$$\begin{aligned} I_{v,w}(B_1, B_2, \dots, B_v) \\ &= (-1)^{\left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{w}{2} + \frac{1+(-1)^v}{4} \right\rfloor} \frac{1}{2^{v-1}} \\ &\times \sum_{m=1}^{2^{v-1}} (-1)^{\sum_{n=w}^{\max(v-1, w)} \left\lfloor \frac{m-1}{2^n} \right\rfloor} \\ &\times \left\{ \frac{1-(-1)^{v+w}}{2} S_{v,m} + \frac{1+(-1)^{v+w}}{2} C_{v,m} \right\} \end{aligned}$$

$$S_{v,m} = I_S(\Gamma_{v,m}, \dot{\Gamma}_{v,m}, \delta t),$$

$$C_{v,m} = I_C(\Gamma_{v,m}, \dot{\Gamma}_{v,m}, \delta t),$$

$$I_S(\Gamma, \dot{\Gamma}, \delta t) = -\frac{1}{\dot{\Gamma}} \{ \cos(\Gamma + \dot{\Gamma} \delta t) - \cos \Gamma \},$$

$$I_C(\Gamma, \dot{\Gamma}, \delta t) = \frac{1}{\dot{\Gamma}} \{ \sin(\Gamma + \dot{\Gamma} \delta t) - \sin \Gamma \},$$

ただし

$$\dot{\Gamma} = 0$$

のときは

$$I_S(\Gamma, \dot{\Gamma}, \delta t) = (\sin \Gamma) \delta t$$

$$I_C(\Gamma, \dot{\Gamma}, \delta t) = (\cos \Gamma) \delta t$$

とする。また

$$\Gamma_{v,m} = \sum_{\nu=1}^v (-1)^{\left\lfloor \frac{m-1}{2^{\nu-\nu}} \right\rfloor} B_\nu,$$

$$\dot{\Gamma}_{v,m} = \sum_{\nu=1}^v (-1)^{\left\lfloor \frac{m-1}{2^{\nu-\nu}} \right\rfloor} \dot{B}_\nu$$

となる。ここで  $\lfloor \quad \rfloor$  は整数部分を示す。

特に (5.1.1) の初めの三式において右辺の第二項までをとることにすれば, (5.2.3) の代わりに (5.2.3') を用いて次のようになる。

$$(\delta_1 i)_{(j)} = F_i I(j) + F_i II(j)$$

$$(\delta_1 \mathcal{Q}_q)_{(j)} = F_{\mathcal{Q}_q} I(j) + F_{\mathcal{Q}_q} II(j)$$

$$(\delta_1 \omega)_{(j)} = F_\omega I(j) + F_\omega II(j)$$

$$F_i I = - \left\{ \cos \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{km} P_k I_{3,0}(R_k, \psi, \mathcal{Q}_q) \right.$$

$$- \sin \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{k=1}^{km} P_{k'} P_k I_{4,1}(R_k, \psi, \mathcal{Q}_q,$$

$$R_{k'}) + \sin \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{lm} Q_l I_{3,2}(\mathcal{Q}_q, S_l, \psi)$$

$$+ \cos \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{l=1}^{lm} P_{k'} Q_l I_{4,3}(\mathcal{Q}_q, R_{k'},$$

$$S_l, \psi) - \sin^2 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{km} P_k I_{2,1}(R_k, \mathcal{Q}_q)$$

$$- \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{km} P_k I_{3,2}(R_k, \psi, \mathcal{Q}_q)$$

$$- \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{k=1}^{km} P_{k'} P_k I_{3,2}(R_k,$$

$$R_{k'}, \mathcal{Q}_q) + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{k=1}^{km}$$

$$P_{k'} P_k I_{4,3}(R_k, R_{k'}, \psi, \mathcal{Q}_q)$$

$$+ \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{lm} Q_l I_{3,2}(\psi, S_l, \mathcal{Q}_q)$$

$$+ \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{l=1}^{lm} P_{k'} Q_l I_{4,3}(\psi, R_{k'},$$

$$\begin{aligned}
& S_l, \mathcal{Q}_q) \} \\
F_{i\text{II}} &= 0 \\
F_{\mathcal{Q}_q\text{I}} &= -\cot i \left\{ \cos \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{km} P_k I_{3,1}(R_k, \psi, \mathcal{Q}_q) \right. \\
& - \sin \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{k=1}^{km} P_{k'} P_k I_{4,2}(R_k, \psi, \\
& R_{k'}, \mathcal{Q}_q) + \sin \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{lm} Q_l I_{3,3}(S_l, \psi, \mathcal{Q}_q) \\
& + \cos \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{l=1}^{lm} P_{k'} Q_l I_{4,4}(R_{k'}, S_l, \\
& \psi, \mathcal{Q}_q) + \sin^2 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{km} P_k I_{2,0}(R_k, \mathcal{Q}_q) \\
& + \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{km} P_k I_{3,1}(R_k, \mathcal{Q}_q, \psi) \\
& + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{k=1}^{km} P_{k'} P_k I_{3,1}(R_k, \\
& \mathcal{Q}_q, R_{k'}) - \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{k=1}^{km} \\
& \times P_{k'} P_k I_{4,2}(R_k, \mathcal{Q}_q, R_{k'}, \psi) \\
& - \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{lm} Q_l I_{3,1}(\psi, \mathcal{Q}_q, S_l) \\
& - \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{l=1}^{lm} P_{k'} Q_l I_{4,2}(\psi, \\
& \mathcal{Q}_q, R_{k'}, S_l) \}
\end{aligned}$$

$$F_{\mathcal{Q}_q\text{II}} = \frac{1}{2} \{ (-\cos \varepsilon_0 + \sin^2 \varepsilon_0)$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k'=1}^{km} \sum_{k=1}^{km} P_{k'} P_k I_{3,1}(R_k, \psi, R_{k'}) \\
& - \sin^3 \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{l=1}^{lm} P_{k'} Q_l I_{3,3}(R_{k'}, S_l, \psi) \\
& + \sin \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{km} P_k I_{2,0}(R_k, \psi) \\
& + \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{lm} Q_l I_{2,2}(S_l, \psi) \\
& + \cos^3 \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{k=1}^{km} P_{k'} P_k I_{4,2}(R_k, \psi, \\
& R_{k'}, \psi) - \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{lm} Q_l I_{3,3}(S_l, \\
& \psi, \psi) - \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{l=1}^{lm} \\
& \times P_{k'} Q_l I_{4,4}(R_{k'}, S_l, \psi, \psi) \\
& - \sin^2 \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sum_{l=1}^{lm} Q_l I_{3,1}(\psi, \psi, S_l) \\
& - 2 \sin \varepsilon_0 \cos^2 \varepsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{l=1}^{lm} \\
& \times P_{k'} Q_l I_{4,2}(\psi, \psi, R_{k'}, S_l) \}
\end{aligned}$$

(6.1.3')

(6.1.3) あるいは (6.1.3') は長周期の変化を示している。

## 6.2 二次の摂動

一次の摂動に基づく軌道要素の変化率として特に二次の zonal harmonic による長年摂動におけるもののみをとることにする。この軌道要素は  $\mathcal{Q}_q$ ,  $\omega$  および  $\chi^*$  であり, これらを  $E\mathcal{L}_A$  と表すことにする。

$EL_A$  の変化率は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_1 &= \frac{3}{2} J_{2,0} a_e^2 \frac{n}{\{a(1-e^2)\}^2} \cos i \\ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_1 &= \frac{3}{2} J_{2,0} a_e^2 \frac{n}{\{a(1-e^2)\}^2} \left(\frac{5}{2} \sin^2 i - 2\right) \\ \left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_1 &= \frac{3}{2} J_{2,0} a_e^2 \frac{n}{\{a(1-e^2)\}^2} \sqrt{1-e^2} \\ &\quad \times \left(\frac{3}{2} \sin^2 i - 1\right) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.1)$$

ここで

$a_e$  : 地球の平均赤道半径

$J_{2,0}$  : 地球の重力ポテンシャルの二次の zonal harmonic の定数

である。また一次の摂動に基づく軌道要素の変化として特に (6.1.3) に与えられる赤道面の運動によるもののみをとることとする。このとき二次の摂動に基づく軌道要素の変化率は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_2 &= \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_1 \\ &\quad \cdot \delta_1 i = - \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_1 \tan i \cdot \delta_1 i \\ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_2 &= \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_1 \\ &\quad \cdot \delta_1 i = 5 \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_1 \sin i \cdot \delta_1 i \\ \left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_2 &= \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{d\chi^*}{dt}\right)_1 \\ &\quad \cdot \delta_1 i = 3 \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_1 \sqrt{1-e^2} \cdot \sin i \cdot \delta_1 i \end{aligned} \right\} \quad (6.2.2)$$

以上においては一次の摂動に基づく軌道要素の変化率および変化を取り扱っているので  $(\delta t)_{(j)}$  の間において、(6.1.2) および次式が成立するとみなされる。

$$a = a(j) , \quad e = e(j) \quad (6.2.3)$$

したがって (6.2.2) を  $t$  に関して積分することが可能である。

(6.2.2) から求められる二次の摂動に基づく軌道要素の変化を

$$\delta_2 EL_A$$

とする。ここで (6.2.2) を  $t_{(j)}$  から  $t_{(j+1)}$  まで積分して求められるこの変化を

$$(\delta_2 EL_A)_{(j)}$$

とする。この積分に際しては被積分関数における  $\delta_1 i$  を  $\delta_1 i_{(j)}$  とするを要する。

特に (5.1.1) の初めの三式において右辺の第二項までをとることになれば、(6.1.3) の代わりに (6.1.3') を用いて次のようになる。

$$(\delta_2 Q_q)_{(j)} = \left\{ - \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_1 \tan i \right\}_{(j)} G_i I_{(j)}$$

$$(\delta_2 \omega)_{(j)} = \left\{ 5 \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_1 \sin i \right\}_{(j)} G_i I_{(j)}$$

$$(\delta_2 \chi^*)_{(j)} = \left\{ 3 \left(\frac{dQ_q}{dt}\right)_1 \sqrt{1-e^2} \sin i \right\}_{(j)} G_i I_{(j)}$$

$$G_i I = - \left\{ \cos \epsilon_0 \sum_{k=1}^{km} P_k H_{3,0}(R_k, \psi, Q_q) \right.$$

$$- \sin \epsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{l=1}^{km} P_{k'} P_l H_{4,1}(R_k, \psi,$$

$$Q_q, R_{k'}) + \sin \epsilon_0 \sum_{l=1}^{lm} Q_l H_{3,2}(Q_q, S_l, \psi)$$

$$+ \cos \epsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{l=1}^{lm} P_{k'} Q_l H_{4,3}(Q_q, R_{k'},$$

$$S_l, \psi) - \sin^2 \epsilon_0 \sum_{k=1}^{km} P_k H_{2,1}(R_k, Q_q)$$

$$- \cos^2 \epsilon_0 \sum_{k=1}^{km} P_k H_{3,2}(R_k, \psi, Q_q)$$

$$- \sin \epsilon_0 \cos \epsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{k=1}^{km} P_{k'} P_k H_{3,2}(R_k,$$

$$R_{k'}, Q_q) + \sin \epsilon_0 \cos \epsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{k=1}^{km}$$

$$\times P_{k'} P_k H_{4,3}(R_k, R_{k'}, \psi, Q_p)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin \epsilon_0 \cos \epsilon_0 \sum_{l=1}^{lm} Q_l H_{3,2}(\psi, S_l, Q_q) \\
 & + \cos^2 \epsilon_0 \sum_{k'=1}^{km} \sum_{l=1}^{lm} P_{k'} Q_l H_{4,3}(\psi, R_{k'}, \\
 & S_l, Q_q) \}
 \end{aligned}
 \tag{6.2.4}$$

ここで次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & H_{v,w}(B_1, B_2, \dots, B_v) \\
 & = (-1)^{\left[\frac{v}{2}\right] + \left[\frac{w}{2} + \frac{1+(-1)^v}{4}\right]} \frac{1}{2^{v-1}} \\
 & \times \sum_{m=1}^{2^{v-1}} (-1)^{\sum_{n=w}^{v-1} \left[\frac{m-1}{2^n}\right]} S'_{v,m},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & S'_{v,m} = I'_S(\Gamma_{v,m}, \dot{\Gamma}_{v,m}, \delta t), \\
 & I'_S(\Gamma, \dot{\Gamma}, \delta t) = -\frac{1}{\dot{\Gamma}} \left[ \frac{1}{\dot{\Gamma}} \{ \sin(\Gamma + \dot{\Gamma} \delta t) \right. \\
 & \quad \left. - \sin \Gamma \} - (\cos \Gamma) \delta t \right]
 \end{aligned}$$

ただし

$$\dot{\Gamma} = 0$$

のときには

$$I'_S(\Gamma, \dot{\Gamma}, \delta t) = \frac{1}{2} (\delta t)^2 \sin \Gamma$$

とする。なおここで〔 〕は整数部分を示す。

### 7. 軌道要素

運動決定の開始時を  $t_{(1)}$  とする。このとき

$$t_{(j)} = t_{(1)} + \Delta t = t_{(1)} + \sum_{j=1}^{J-1} (\delta t)_{(j)} \tag{7.1}$$

における前章によって求められる  $El_p$  に対する一次および  $El_A$  に対する二次の摂動はそれぞれ次のようになる。

$$\Delta_1 El_p = \sum_{j=1}^{J-1} (\delta_1 El_p)_{(j)} \tag{7.2}$$

$$\Delta_2 El_A = \sum_{j=1}^{J-1} (\delta_2 El_A)_{(j)}$$

また  $(\delta t)_{(j)}$  の間における  $El_p$  および  $El_A$  の変化は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & (\delta i)_{(j)} = (\delta_1 i)_{(j)} \\
 & (\delta Q_q)_{(j)} = \left( \frac{dQ_q}{dt} \right)_{1(j)} (\delta t)_{(j)} \\
 & \quad + (\delta_1 Q_q)_{(j)} + (\delta_2 Q_q)_{(j)} \\
 & (\delta \omega)_{(j)} = \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_{1(j)} (\delta t)_{(j)} \\
 & \quad + (\delta_1 \omega)_{(j)} + (\delta_2 \omega)_{(j)} \\
 & (\delta \chi^*)_{(j)} = \left( \frac{d\chi^*}{dt} \right)_{1(j)} (\delta t)_{(j)} + (\delta_2 \chi^*)_{(j)}
 \end{aligned}
 \tag{7.3}$$

### 8. 昇交点経度

(3.2.1.6) に示した二つの昇交点経度の差  $D$  とその変化率を以下に求める。このために一般歳差を表わす次の諸量をとる。

$90^\circ - \zeta_0$  : 1950.0 の平均春分点と平均赤道に基づく瞬時の平均赤道の昇交点の赤経を表わす角度

$90^\circ + z_m$  : この昇交点の、瞬時の平均春分点と平均赤道に基づく赤経を表わす角度

$\theta_m$  : 1950.0 の平均赤道に対する瞬時の平均赤道の傾斜角

これらの諸量は天体暦<sup>4)</sup>に表示されている。したがってそれらから  $\zeta_0, z_m, \theta_m$  などの変化率  $d\zeta_0/dt, dz_m/dt, d\theta_m/dt$  などを求めることができる。さらに次のようにする。

$\lambda$  : 1950.0 の平均赤道に対する瞬時の黄道の傾角の補角

$\beta$  : 瞬時の黄道に沿って測った 1950.0 の平均赤道と瞬時の平均赤道の角距離

$r$  : 瞬時の黄道と 1950.0 の平均赤道の交点のうち太陽が南から北へこの赤道を通過する点を  $Y'$  とするとき、1950.0 の平均春分点と平均赤道に基づく  $Y'$  の赤経を  $90^\circ - \zeta_0$  から減じ

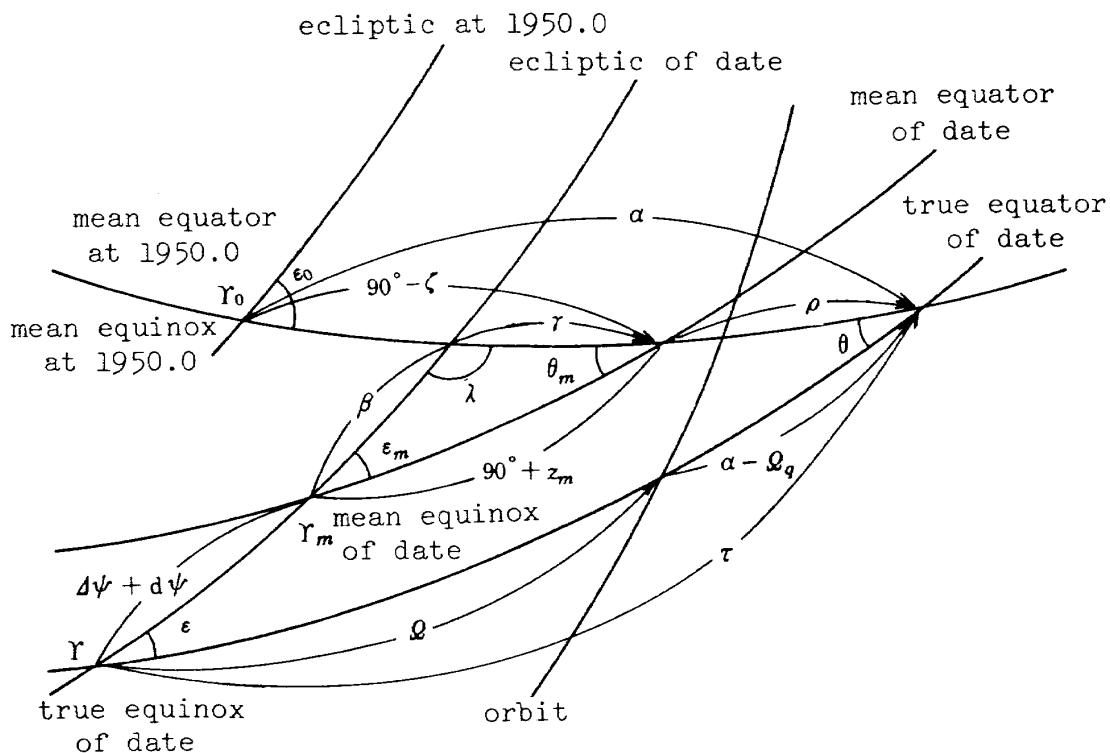


図2 春分点と赤道

た角度

$\rho$  :  $\alpha$  から  $90^\circ - \zeta_0$  を減じた角度

$\tau$  : 瞬時の真春分点と真赤道に基づく, 1950.0の平均赤道に対する瞬時の真の赤道の昇交点の赤経

このとき次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= -\cos \epsilon_m \cos \theta_m + \sin \epsilon_m \sin \theta_m \\ &\quad \times \cos (90^\circ + z_m) \\ \sin \beta_m &= \frac{\sin (90^\circ + z_m)}{\sin \lambda} \sin \theta_m \\ \cos \gamma &= \cos \beta \cos (90^\circ + z_m) \\ &\quad + \sin \beta \sin (90^\circ + z_m) \cos \epsilon_m \\ \cos \theta &= -\cos \lambda \cos \epsilon + \sin \lambda \sin \epsilon \cos (\Delta\psi \\ &\quad + d\psi + \beta) \\ \cos (\gamma + \rho) &= \frac{\sin \lambda \cos \epsilon + \cos \lambda \sin \epsilon \cos \\ &\quad \times (\Delta\psi + d\psi + \beta)}{\sin \theta} \\ \cos \tau &= \frac{\sin \theta \cos \lambda + \cos \theta \sin \lambda \cos (\gamma + \rho)}{\sin \epsilon} \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

この (8.1) に示す三角関数の逆三角関数の主値として  $\lambda, \beta, \gamma, \theta, \gamma + \rho, \tau$  などが求められる。さら

にこれらを用いて (8.1) の  $t$  に関する導関数からこれらの変化率が求められる。このとき  $D$  とその変化率を求める式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} D &= Q - Q_q \\ &= \tau - 90^\circ + \zeta_0 - \rho \\ \frac{dD}{dt} &= \frac{dQ}{dt} - \frac{dQ_q}{dt} \\ &= \frac{d\tau}{dt} + \frac{d\zeta_0}{dt} - \frac{d\rho}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

### 9. 軌道要素の計算

一つの人工衛星をとり, これに関して赤道面の運動による人工衛星の軌道要素に対する一次の摂動および二次の摂動を計算によって求める。ここで二次の摂動としては, この一次の摂動に基づいて生ずる, 二次の zonal harmonic による長年摂動におけるもののみを求めることにする。

この際に (5.1.1) の最初の三式において右辺の第二項までをとることにして第7章までに示した理論における諸式を用いる。この場合に角の秒を単位として表わされた  $p_k, q_l$  などとして, その数値の絶対値が  $10^{-3}$  以上の大きさをもつものをとることにす



れば十分である。そして  $\Delta t$  が  $\Delta t_M$  をこえれば計算を終わらせることにする。

ここで  $t_{(1)}$  として 1980.0 をとる。また  $t_{(1)}$  における人工衛星の軌道要素とその変化率を表 1 に示すようにする。さらに、定数を次のようにする。

$$\mu = 398601.3 \frac{\text{km}}{\text{s}^2}$$

$$a_e = 6378.140 \text{ km}$$

$$J_{2,0} = -1082.637 \times 10^{-6}$$

それから  $(\delta t)_{(j)}$  および  $\Delta t_M$  として表 2 に示す値をとる。

以上のようにして計算を行い、得られた  $\Delta_1 i$ ,  $\Delta_1 Q_q$  および  $\Delta_1 \omega$  をそれぞれ図 3.4 および 5 に示す。また  $\Delta t$  が  $\Delta t_M$  になったときの  $\Delta_2 Q_q$ ,  $\Delta_2 \omega$  および  $\Delta_2 \chi^*$  を表 3 に示す。

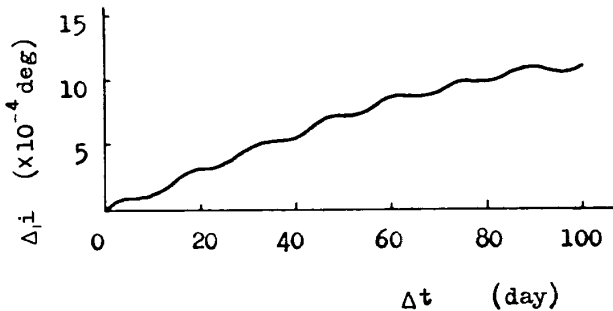


図 3  $\Delta t$  と  $\Delta_1 i$  との関係

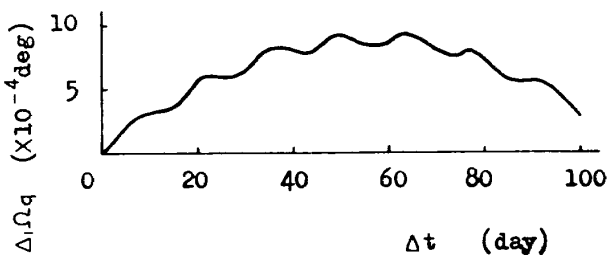


図 4  $\Delta t$  と  $\Delta_1 Q_q$  との関係

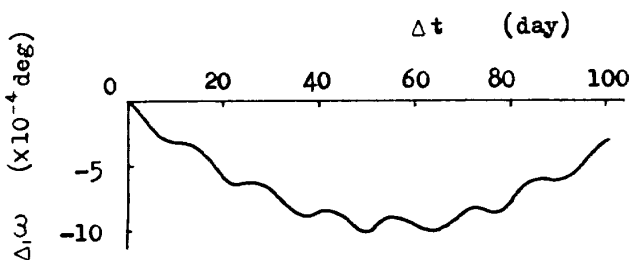


図 5  $\Delta t$  と  $\Delta_1 \omega$  との関係

表 1 軌道要素とその変化率

$a$	km	7800
$e$		0.005
$i$	deg	101.5407
$Q_q$	deg	240
$\dot{Q}_q$	$\frac{\text{deg}}{\text{day}}$	0.9856473

表 2  $\delta t_{(j)}$  および  $\Delta t_M$

$\delta t_{(j)}$	day	0.5
$\Delta t_M$	day	100

表 3 二次の摂動における軌道要素の変化

$\Delta t$	day	100
$\Delta_2 Q_q$	deg	$0.928 \times 10^{-5}$
$\Delta_2 \omega$	deg	$-0.4261 \times 10^{-4}$
$\Delta_2 \chi^*$	deg	$-0.2556 \times 10^{-4}$

## 10. 考 察

人工衛星の慣性系における運動方程式から座標系  $Ox, y, z$  を基準とする諸量を用いて表された運動方程式 (3.1.2) が得られる。<sup>3)</sup> 次にこの方程式から座標系  $Ox_T y_T z_T$  を基準とする諸量を用いて表された運動方程式 (3.2.1.4)<sup>2)</sup> および、(3.2.2.2) が導かれた。したがって人工衛星の運動は座標系  $Ox_T y_T z_T$  を基準とする諸量を用い、座標系  $Ox, y, z$  を基準として決定されることになる。

この運動方程式 (3.2.1.4) および (3.2.2.2) において赤道面の運動に基づく項のみをとり、これから赤道面の運動による軌道要素に対する一次の摂動が (6.1.3) に示すように求められた。この摂動は非常に多くの長周期摂動によって構成されている。そしてその大きさは微小である。ただしその振幅を表わす式の除数が微小となれば長時間にわたってゆるやかにその大きさを変化し続ける。このようにこの摂動の大きさは微小ではあるが、測地学、地球の弾性

学などに関連して人工衛星の運動を精密に決定する際にはこれを考慮する必要がある。<sup>5)</sup>

次に前章において一例としてとった人工衛星に関する計算の結果をみることにする。まず  $\Delta_1 i$ ,  $\Delta_1 Q$  および  $\Delta_1 \omega$  においては図3, 図4および図5に示されるように1年および半月の周期をもつ長周期摂動が存在することがわかる。

なおこの一次の摂動を求めるときに  $(\delta t)_{(j)}$  の間において  $P'_k$ ,  $P_k$ , および  $Q_l$  の変化を無視した。しかし実際にはこれらは時刻に関する三次以下の式で表される。これを考慮すると軌道要素の混合長年変化が出現する。しかしこの変化の振幅は極めて微小であって取るに足りない。

また二次の摂動の大きさは一次の摂動に比べると表3に示すように非常に小さい。

## 11. 結 論

人工衛星の慣性系における運動方程式から、1950.0における平均春分点と平均赤道に基づく、地心を原点として慣性系に対し並進運動のみをする座標系を基準とする諸量を用いて記された Lagrange's planetary equations が得られる。<sup>3)</sup>

古在と木下はこの Lagrange's planetary equations における諸量を瞬時の真の赤道に基づく、地心赤道座標系を基準とする諸量を用いて記述し、摂動関数によって表わされた運動方程式を出した。<sup>2)</sup>

以上の理論に接続して、本研究においては摂動加速度によって表わされた運動方程式を示した。

したがって人工衛星の運動はこの赤道座標系を基準とする諸量を用い、この並進運動座標系を基準として決定されることになる。

運動方程式における赤道面の運動に基づく項を、日月歳差の三乗と同位の微小数までを考慮して、赤道面の位置と軌道要素の関係式から求めた。

この項から、赤道面の運動による軌道要素に対す

る一次の摂動を求めた。この摂動は非常に多くの長周期摂動によって構成され、その大きさは微小である。ただしその振幅を表わす式の除数が微小となれば長時間にわたってゆるやかにその大きさを変化し続ける。

二次の摂動として、特に赤道面の運動による一次の摂動に基づいて生起する、二次の zonal harmonic による長年摂動におけるものを求めた。

瞬時の真の春分点と赤道に基づいた昇交点経度から1950.0の平均春分点と平均赤道に基づいた昇交点経度を引いた差を時刻の関数として求めた。

本研究を行なうにあたりこれに対して助言をされた当研究所の松島弘一主任研究官ならびに助力をして頂いたトータルシステム研究所の塚田之彦氏および白百合女子大学学生岡田典子嬢に対してここに謝意を表明する。

## 引 用 文 献

- 1) Y. Kozai ; Effect of Precession and Nutation on the Orbital Elements of a Close Earth Satellite , *Astronomical J.*, Vol. 65 No. 10 (1960) pp. 621-623.
- 2) Y. Kozai & H. Kinoshita ; Effects of Motion of the Equatorial Plane on the Orbital Elements of an Earth Satellite , *Celestial Mechanics* , Vol. 7, No. 3 (1973) pp. 356-366.
- 3) W. M. Smart ; *Celestial Mechanics*, (1953) Longmans.
- 4) 海上保安庁水路部 ; 昭和56年天体位置表, 昭和54年, 海上保安庁 .
- 5) E. M. Gaposchkin ; 1973 *Smithsonian Standard Earth (III)* , *Smithsonian Astrophys. Obs. Spe. Rep.* No. 353 , (1973).

---

## 航空宇宙技術研究所報告 695号

昭和57年1月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊎182  
印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山5-6-17

---