

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-850

対称積層板における端末効果の数値解析

奥村秀人

1985年1月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 対称積層板における端末効果の数値解析\*

奥村 秀人\*\*

## Numerical Analysis of End Effects in Symmetric Laminated Plates

Hidehito OKUMURA

### ABSTRACT

Stress eigenstates at the loaded end in symmetric laminated plates are discussed in this paper. The rate of attenuation of nonuniform stress distribution in composite materials is slow in comparison with that in isotropic materials. For a graphite/epoxy cross-ply laminate, for example, the characteristic length  $l_e$  is approximately three times that for an isotropic material. It is emphasized that the evaluation by numerical method of this decay is important in estimating the strength of composite laminated plates.

### 1. 緒 言

複合材料においては、通常の均質材の場合とは異なった独得の局所応力・ひずみ場が発生する場合が多く、その解析は複合材料の力学特性や強度を正しく評価するうえで重要であり、その解析方法の確立は急務のことと思われる。複合材料における不均一応力・ひずみ場の代表的なものとして1970年代初頭に数多く報告された積層板の自由縁近傍の層間せん断応力に関する問題<sup>1),2),3)</sup>や1970年代後半頃から注目されているサンプナンの端末効果の問題がある<sup>4),5)</sup>。本報においては後者の荷重作用点近傍の不均一応力場を解析する。

均質な等方性材料に比べ複合材料において著しい様相を呈する端末効果を実用的な数値解析法として確立されている有限要素法により解析した研究としては、DongとGoetschelによる固有値解析<sup>6)</sup>やサンドイッチ材を通常の有限要素法により弾性解析したRaoとValsarajanの研究<sup>7)</sup>、異った均質等方性材料

の組合せにより構成された複合材料を弾塑性解析した研究<sup>8)</sup>がある。

本報告は複合材料とくに対称積層材における端末効果を有限要素法により解析した結果を示すものである。有限要素法による固有解析法<sup>9)</sup>を対称積層材を取り扱えるように拡張を行ない、複合材料の材料設計および構造設計に端末効果を考慮できることをいくつか例題を通して検証する。

### 2. 端末効果の固有値解析

解析する領域は図1に示す半無限の対称積層材の細片であり、一端に自己平衡力が負荷された場合の固有状態を解析する。図1のように対称積層板の厚さ $t$ を有する任意の直方体 $V_0$ を考える。ここで、 $T_A = (T_{Ax}, T_{Ay})$ は表面 $S_A$ に作用する表面力ベクトルであり、 $u_A = (u_A, v_A)$ は同じ点での変位ベクトルである。他の表面での表面力ベクトルと変位ベクトルも同様に定義する。

図1の領域 $V_0$ に図2の9節点アイソパラメトリック要素を用いる。さらに次の条件を付加すると

$$\begin{aligned}x_1 = x_8 = x_4 = X_1, \quad x_5 = x_9 = x_7 = X_3, \\x_2 = x_6 = x_3 = X_2\end{aligned}$$

\* 昭和59年11月20日受付

\*\* 計算センター

$$y_1 = y_5 = y_2 = Y_1, \quad y_8 = y_9 = y_6 = Y_3, \\ y_4 = y_7 = y_3 = Y_2 \quad (1)$$

幾何学的写像の式は次のようになる。

$$x = \sum_{i=1}^3 S_i X_i, \quad y = \sum_{i=1}^3 H_i Y_i \quad (2)$$

ここで

$$S_1 = (1/2)(\xi^2 - \xi), \quad S_2 = (1/2)(\xi^2 + \xi), \\ S_3 = 1 - \xi^2 \\ H_1 = (1/2)(\eta^2 - \eta), \quad H_2 = (1/2)(\eta^2 + \eta), \\ H_3 = 1 - \eta^2 \quad (3)$$

つぎに要素内における変位場は、端末より指数関数的に減衰する特性を有する解を求めるために次の変数分離型で定義する式を用いる。

$$\mathbf{u}(x, y) = \exp(-\lambda x) \bar{\mathbf{u}}(y) \quad (4)$$

ここで

$$\mathbf{u}^T(x, y) = [u(x, y) \ v(x, y)] \\ \bar{\mathbf{u}}^T(y) = [\bar{u}(y) \ \bar{v}(y)] \quad (5)$$

$\lambda$  は減衰の程度を表わすパラメータである。

また式(1)の関係を考慮して節点(5, 9, 7)の組の変位から内挿すると

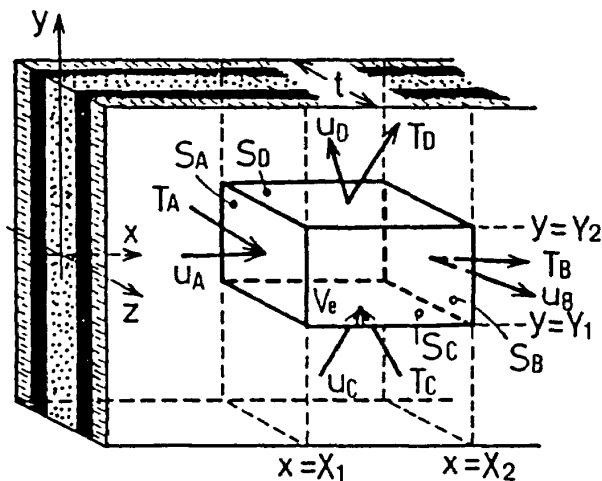


図1 解析の対称とする半無限の対称積層板細片

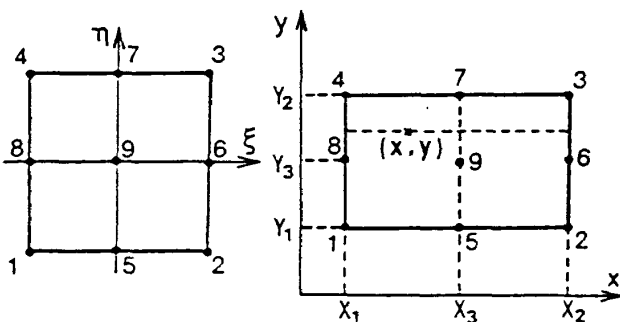


図2 9節点アイソパラメトリック要素

$$\mathbf{u}(x, y) = \exp(-\lambda L_x \xi) \sum_{i=1}^3 H_i \\ \cdot \exp(-\lambda X_3) \bar{\mathbf{u}}(Y_i) \quad (6)$$

マトリックス表示をすると

$$\mathbf{u}(x, y) = \exp(-\lambda L_x \xi) [H] \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (7)$$

ここで

$$[H] = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 \end{bmatrix} \\ \{\bar{\mathbf{u}}\}^T = \exp(-\lambda X_3) [\bar{u}(Y_1) \ \bar{v}(Y_1) \\ \bar{u}(Y_2) \ \bar{v}(Y_2) \ \bar{u}(Y_3) \ \bar{v}(Y_3)] \quad (8)$$

対称積層板の要素では、各層とも共通の変位をすることになり、対応するひずみも各層共通のひずみ $\{\epsilon^0\}$ となる。したがって式(7)を用いて要素内のひずみを求めると次式となる。

$$\{\epsilon^0\} = \exp(-\lambda L_x \xi) [B] \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (9)$$

ここで

$$\{\epsilon^0\}^T = [\epsilon_x^0 \ \epsilon_y^0 \ \tau_{xy}^0] \\ [B] \{\bar{\mathbf{u}}\} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i \bar{\mathbf{u}}_i = \sum_{i=1}^3 (-\lambda \mathbf{B}_{ia} + \mathbf{B}_{ib}) \bar{\mathbf{u}}_i \\ \mathbf{B}_{ia} = \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & H_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{ib} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_y} \frac{\partial H_i}{\partial \eta} \\ \frac{1}{L_y} \frac{\partial H_i}{\partial \eta} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \exp(-\lambda X_3) [\bar{u}(Y_i) \ \bar{v}(Y_i)] \quad (10)$$

各層の値を平均した応力 $\{\bar{\sigma}\}$ と各層共通のひずみ $\{\epsilon^0\}$ の関係式は次の式で示される。<sup>10)</sup>

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \tau_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで

$$A_{ij} = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (Z_k - Z_{k-1}), \quad A_{ij} = A_{ji} \quad (12)$$

$(\bar{Q}_{ij})_k$  は  $k$  番目の層におけるモジュラスであり、 $Z_k$  は  $k$  番目と  $k+1$  番目の層の接合面における  $Z$  座標である。

図1の解析領域 $V_e$ に仮想仕事の原理を適用すると次の式となる。

$$\int_{X_1}^{X_2} \int_{Y_1}^{Y_2} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \tau_{xy}) t dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{Y_1}^{Y_2} (T_{Ax} \delta u_A + T_{Ay} \delta v_A) t dy \\
 &+ \int_{Y_1}^{Y_2} (T_{Bx} \delta u_B + T_{By} \delta v_B) t dy \\
 &+ \int_{X_1}^{X_2} (T_{Cx} \delta u_C + T_{Cy} \delta v_C) t dx \\
 &+ \int_{X_1}^{X_2} (T_{Dx} \delta u_D + T_{Dy} \delta v_D) t dx \quad (13)
 \end{aligned}$$

各表面での力学的境界条件は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 T_{Ax} &= -\sigma_x \Big|_{x=X_1}, & T_{Bx} &= \sigma_x \Big|_{x=X_2} \\
 T_{Ay} &= -\tau_{xy} \Big|_{x=X_1}, & T_{By} &= \tau_{xy} \Big|_{x=X_2} \\
 T_{Cx} &= -\tau_{xy} \Big|_{y=Y_1}, & T_{Dx} &= \tau_{xy} \Big|_{y=Y_2} \\
 T_{Cy} &= -\sigma_y \Big|_{y=Y_1}, & T_{Dy} &= \sigma_y \Big|_{y=Y_2}
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(1)~(12)と式(14)を式(13)に代入して整理すると

$$F \{ \delta \bar{u} \}^T \{ \lambda^2 [a] + \lambda [b] + [c] \} \{ \bar{u} \} = 0 \quad (15)$$

ここで

$$F = (-t/2\lambda) [ \exp(-2\lambda L_x) - \exp(2\lambda L_x) ]$$

$$[a] = [k_a] - [k_{sa}]$$

$$[b] = -[k_b] + [k_{sb}] + [\bar{P}_a]$$

$$[c] = [k_c] - [\bar{P}_b]$$

$$[k_a] = \int_{-1}^1 [B_a]^T [D] [B_a] L_y d\eta$$

$$[k_c] = \int_{-1}^1 [B_b]^T [D] [B_b] L_y d\eta$$

$$[k_{sa}] = \int_{-1}^1 2 [H]^T \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{bmatrix} [B_a] L_y d\eta$$

$$[k_{sb}] = \int_{-1}^1 2 [H]^T \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{bmatrix} [B_b] L_y d\eta$$

$$[\bar{P}_a] = [\tilde{P}_a]_{\eta=1} - [\tilde{P}_a]_{\eta=-1}$$

$$[\bar{P}_b] = [\tilde{P}_b]_{\eta=1} - [\tilde{P}_b]_{\eta=-1}$$

$$[\tilde{P}_a] = [H]^T \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \end{bmatrix} [B_a],$$

$$[\tilde{P}_b] = [H]^T \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \end{bmatrix} [B_b]$$

$$L_y = (1/2)(Y_2 - Y_1)$$

$$[B_a] = \sum_{i=1}^3 B_{ia}, \quad [B_b] = \sum_{i=1}^3 B_{ib} \quad (16)$$

となり、式(15)が任意の仮想変位  $\{ \delta \bar{u} \}^T$  について成り立つことにより、領域  $V_e$  に対応する要素についての固有方程式が次のように得られる。

$$(\lambda^2 [a] + \lambda [b] + [c]) \{ \bar{u} \} = 0 \quad (17)$$

式(17)は  $\eta$  つまり  $y$  についてのみの方程式で  $0 \leq x < \infty$  の任意の  $x$  で成り立つ。したがって任意の  $x$  ( $0 \leq x < \infty$ ) で  $y$  方向に要素分割して、それらの要素に関する式(17)を組み立てると解析領域全体に対する固有方程式が次のようになる。

$$(\lambda^2 [A] + \lambda [B] + [C]) \{ \bar{U} \} = 0 \quad (18)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
 [A] &= \sum [a], \quad [B] = \sum [b], \quad [C] = \sum [c] \\
 \{ \bar{U} \} &= \sum \{ \bar{u} \}
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

パラメータ  $\lambda$  に関する固有方程式(18)は次の標準固有値問題に変換のうえ、解くことができる。

$$\left. \begin{aligned}
 [S] \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\lambda} \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix}, \quad \{ \bar{V} \} = \lambda \{ \bar{U} \} \\
 [S] &= \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} & -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで  $\mathbf{O}$  は零マトリックスであり、 $\mathbf{I}$  は単位マトリックスを表す。

### 3. 数値解析例

#### 3.1 面内等方弾性材料

はじめに本解析法の妥当性を検証するために、図3に示すような面内等方弾性材料の細片が  $x-y$  平面内における平面ひずみ状態で、対称変形および反対称変形をする場合について計算結果と解析解との比較を行なう。対称変形の場合は、図3(a)のように変位  $u, v$  が  $x$  軸に関して対称であり、 $y=0$  の節点における  $y$  方向変位  $v_1$  の拘束条件として  $v_1 = 0$  により図3(b)のように  $y \geq 0$  の上半分を解析する。また反対称変形の場合には、図3(a)のように変位  $u, v$  が  $x$  軸に関して反対称であるので、拘束条件として  $u_1 = 0$  により対称変形と同様に  $y \geq 0$  の上半分を解析する。ここでは図3(b)のように  $y \geq 0$  の上半分を10要素に分割する。

Graphite/Epoxyの一方向繊維強化材の材料定数は文献[4, 12]の例題で設定された次の値を計算に使用した。

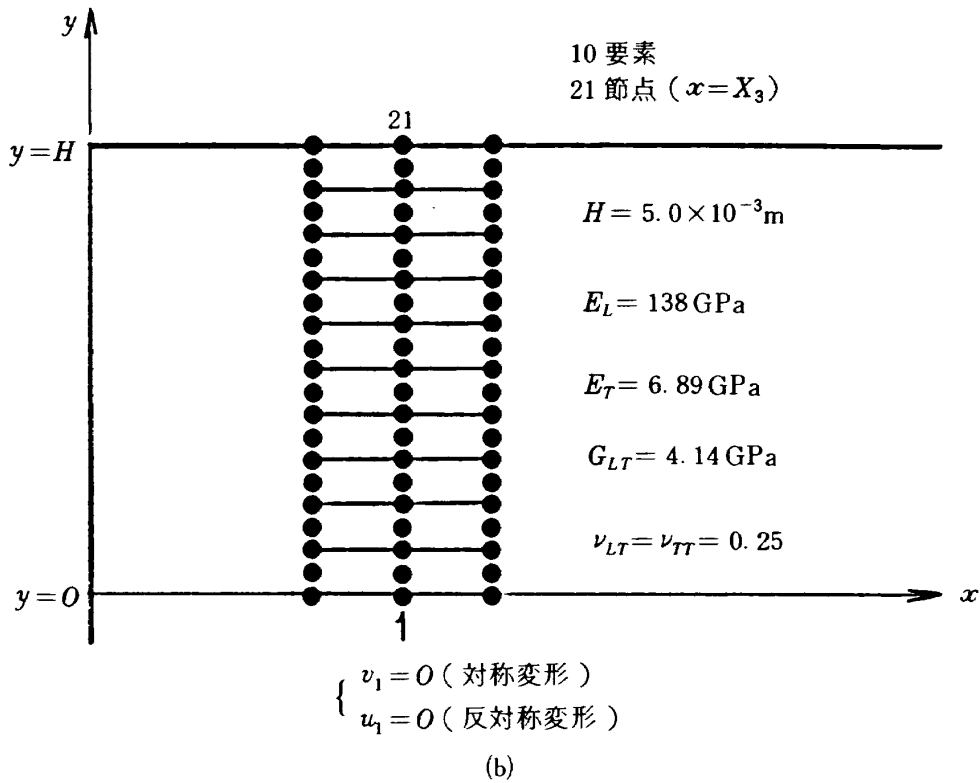
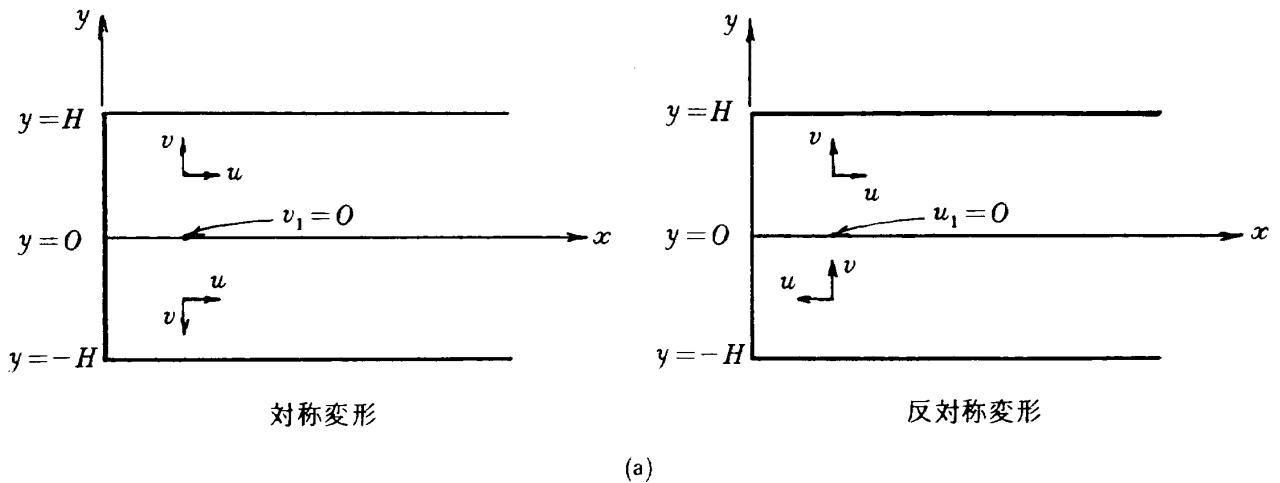


図3 (a), (b)要素分割図

$$E_L = 138 \text{ GPa}, E_T = 6.89 \text{ GPa},$$

$$G_{LT} = 4.14 \text{ GPa}$$

$$\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25 \tag{21}$$

ここで、添字  $L$  は繊維方向を示し、 $T$  は繊維方向に対して垂直な方向を示している。また板幅は  $H = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$  である。

表1は対称変形における第5次までの固有値  $\lambda H$  について有限要素解と解析解<sup>4)</sup>とを比較したものである。結果は良好な一致を示している。固有値  $\lambda H$  は一般に複素固有値であり、実数部  $R_e(\lambda H)$  は減衰の程度を示

すこととなる。 $x=0$  の端面に荷重が作用するので、最大応力は  $x=0$  の端面上に生ずることとなる。最大応力値の1%まで減衰する端末からの距離を  $x_0$  とすると

$$\exp(-R_e[\lambda] x_0) = 0.01 \tag{22}$$

の関係があるので

$$(R_e[\lambda H]/H) x_0 = 4.61 \tag{23}$$

となる。したがって特性長さ  $l_e$  を次の式で定義し、

$$l_e = x_0/2H = 2.31/R_e(\lambda H) \tag{24}$$

表1の最小固有値  $\lambda H = 0.56$  を式(24)に代入すると

表1 Graphite/Epoxy 複合材細片における固有値  $\lambda H$  の有限要素解と解析解<sup>4)</sup>との比較

MODE	有限要素解		解析解 <sup>4)</sup>	
	Real	Imaginary	Real	Imaginary
1	0.56	0	0.56	0
2	1.14	0	1.13	0
3	1.76	0	1.75	0
4	2.10	0.18	2.10	0.18
5	2.72	0	2.73	0

次の値になる。

$$l_e = 4.11 \tag{25}$$

式(25)の値は板幅の4倍程度の範囲内にまで端末の影響が及ぶことになる。等方性材料の場合には最小固有値が  $\lambda H = 2.11 \pm 1.12i$  であり<sup>11)</sup> 同様にして式(24)に代入すると

$$l_e = 1.09 \tag{26}$$

となる。したがって等方性材料の場合には板幅程度の範囲であったのに比べると異方性を有する Graphite/Epoxy の材料では端末の不均一応力・ひずみ場の影響範囲が広いことを示している。

図4は表1の最小固有値  $\lambda H = 0.56$  の対称変形

における変位モードと応力モードを図示したものであり、図5は  $\lambda H = 0.80$  の反対称変形における変位モードを図示したものである。

つぎに図6に示すように長さ  $2L$ 、板幅  $2H$  の Graphite/Epoxy 細片の両端に同じ放物線分布の荷重が作用した問題を通常有限要素解析により行なう。荷重分布は  $x = 2L$  の端面で次の式の放物線である。

$$\sigma_x = \sigma_0 (1 - y^2) \tag{27}$$

したがって、板幅  $2H$  に対して全荷重を平均すると  $(2/3)\sigma_0$  となる。荷重分布と幾何学的形状の対称性により、全体の1/4の領域 ( $y \geq 0, 0 \leq x \leq L$ )

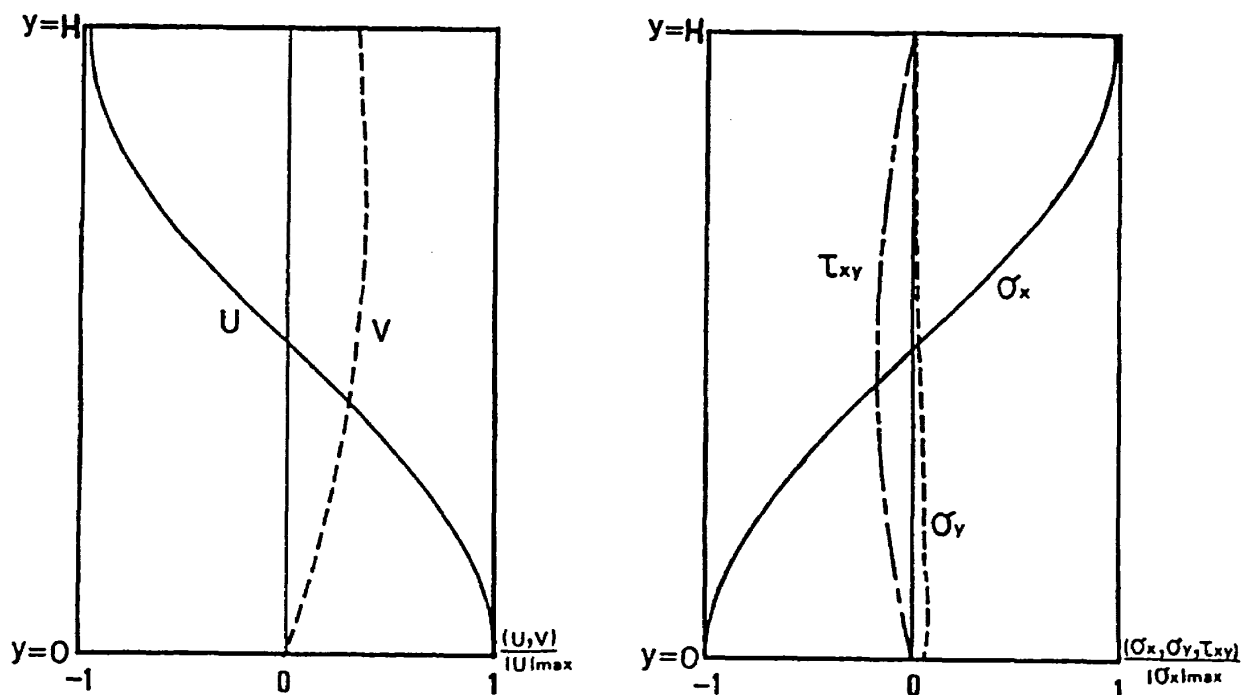


図4 対称変形の変位モードと応力モード ( $\lambda H = 0.56$ )

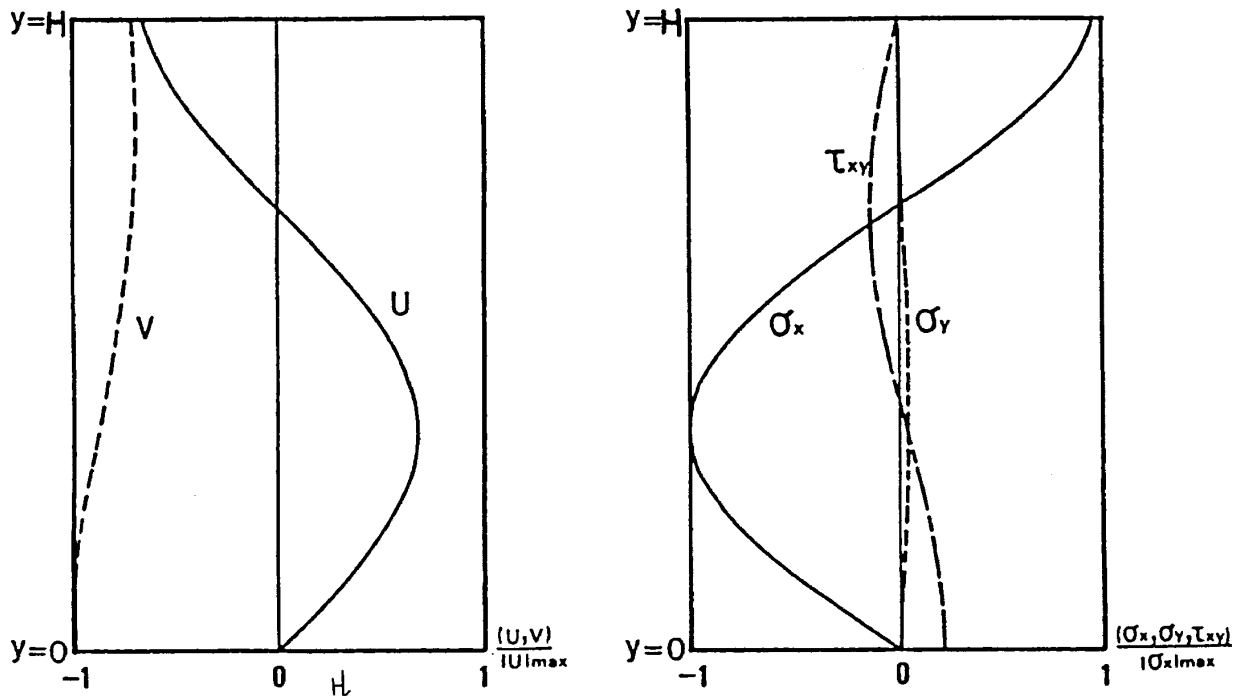


図5 反対称変形の変位モードと応力モード ( $\lambda H = 0.80$ )

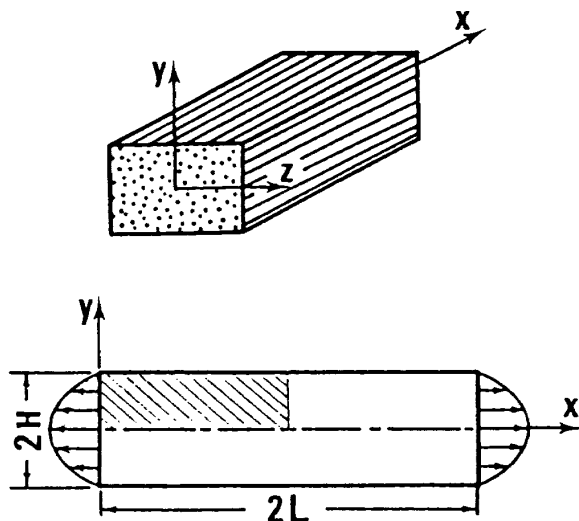


図6 両端に放物線分布の荷重が作用する Graphite/Epoxy の細片

を8節点のアイソパラメトリック平面要素で要素数40、節点数147の分割を行なう。

図7は板の幅に対する板の長さの比  $2L/2H$  の値が3.5および4.5の場合について応力  $\sigma_x$  の  $x$  軸方向に沿った分布を図示したものである。また  $2L/2H = 3.0$  の場合については等方性材料(縦弾性係数100GPa, ポアソン比  $\nu = 0.3$  の値を用いた)の計算結果も同様に示している。曲線A, C, Eは  $y = 0.02$  の  $x$  軸近傍の座標を有するガウス積分点での

応力  $\sigma_x$  の値であり, B, D, Fは  $y = 0.82$  で自由縁近傍の値である。曲線A, Bの分布によると  $x/2H = 4.5$  の中央では平均値  $\sigma_x = (2/3)\sigma_0$  の値に収束している。したがって末端の影響範囲は  $x/2H = 4$  まで及ぶことになり, 板幅の4倍程度を示している特性長さ  $l_e = 4.11$  の値を裏付けていることになる。また板の長さが特性長さ  $l_e$  より短い  $2L/2H = 3.5$  の場合には,  $x/2H = 3.5$  の中央断面での値は平均値に収束していない。つまり応力が均一に分布する断面が, この場合には存在していないことになる。さらに等方性材料の場合にはE, Fの曲線から  $x/2H = 1$  で平均値に収束している。この場合も特性長さ  $l_e = 1.09$  の値に対応していることが検証できる。

図8は  $2L/2H = 3.0$  の両端に放物線分布の荷重が作用したときの応力  $\sigma_x$  について解析解<sup>4)</sup>と比較したものである。解析解は  $y = 0$  の  $x$  軸上の分布と  $y = 0.8$  の自由縁に近いところの分布を示したものであり, 有限要素解は  $y = 0$  と  $y = 0.8$  に近いガウス積分点での値を図示したものである。曲線A, Bの値は特性長さ  $l_e = 4.11$  より板の長さが短い場合で, 末端の影響があまり減衰していないことを示している。このために  $x = L$  の中央の値は平均値  $(2/3)\sigma_0$

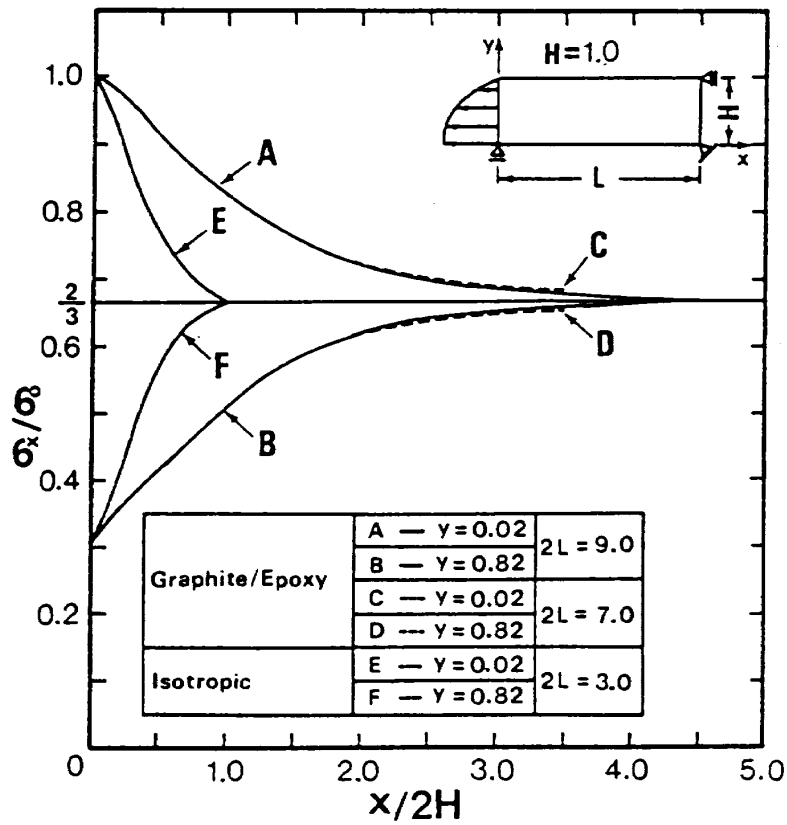


図7  $x$ 軸方向に沿った応力  $\sigma_x$  の分布 ( $2L/2H=3.5, 4.5$ )

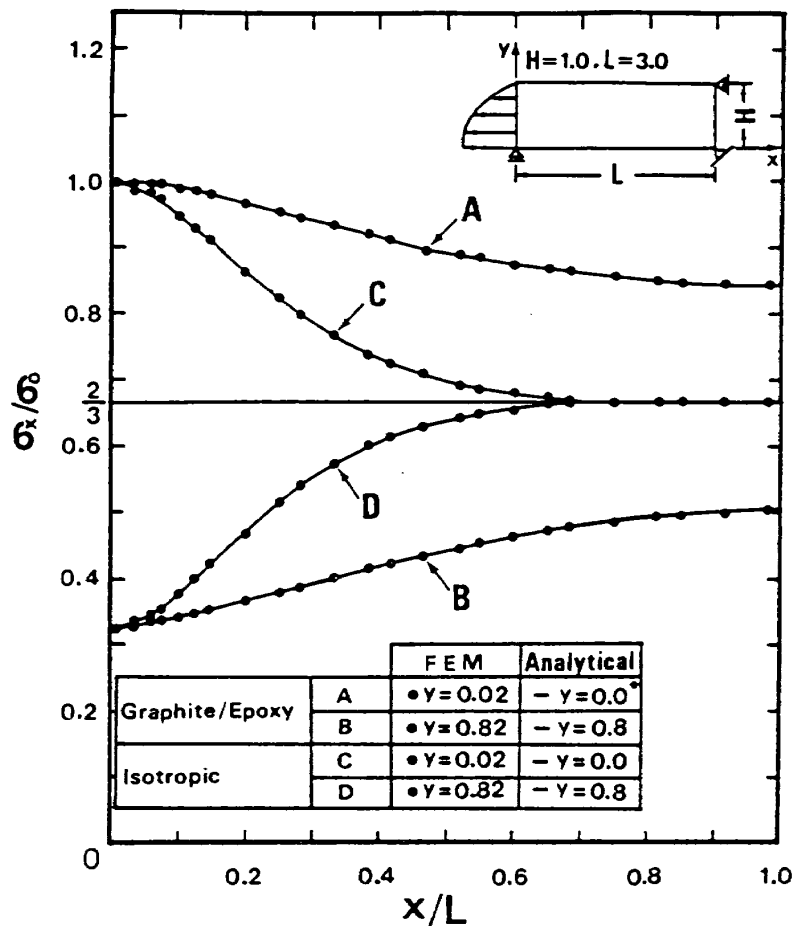


図8  $x$ 軸方向に沿った応力  $\sigma_x$  の解析解<sup>4)</sup>との比較 ( $2L/2H=3.0$ )



ではなく、大きな差が生じていることが確認できる。曲線 C, D の値は等方性材料の場合であり、 $x/L = 0.8$  のところで平均値に収束している。つまり、等方性材料に対しては、板の長さが特性長さより長いためである。

図 9 は  $2L/2H = 5.0$  の場合における応力  $\sigma_x$  の板厚方向 (  $y$  軸方向 ) の分布を図示したものである。 $x/L = 0.1$  の荷重端の近傍の断面では放物線の荷重分布に類似の分布を示し、中央面に近づくとしたがつて曲線 C の分布になることを表わしている。

表 2 は Magnesium と Zinc について固有値解析した場合の最小固有値  $\lambda H$  と特性長さ  $l_e$ 、さらに対応

する解析解<sup>4)</sup>を示したものである。表には等方性材料と Graphite/Epoxy の値をも比較のため併記している。ここで magnesium, Zinc の計算に用いた応力-ひずみマトリックス [D] の値は文献 [4] で設定されたコンプライアンスの値より計算した次の値である。

magnesium (GPa)			Zinc (GPa)		
58.6	18.1	0	62.8	51.7	0
対称	56.4	0	対称	164.3	0
		16.8			37.9

(28)

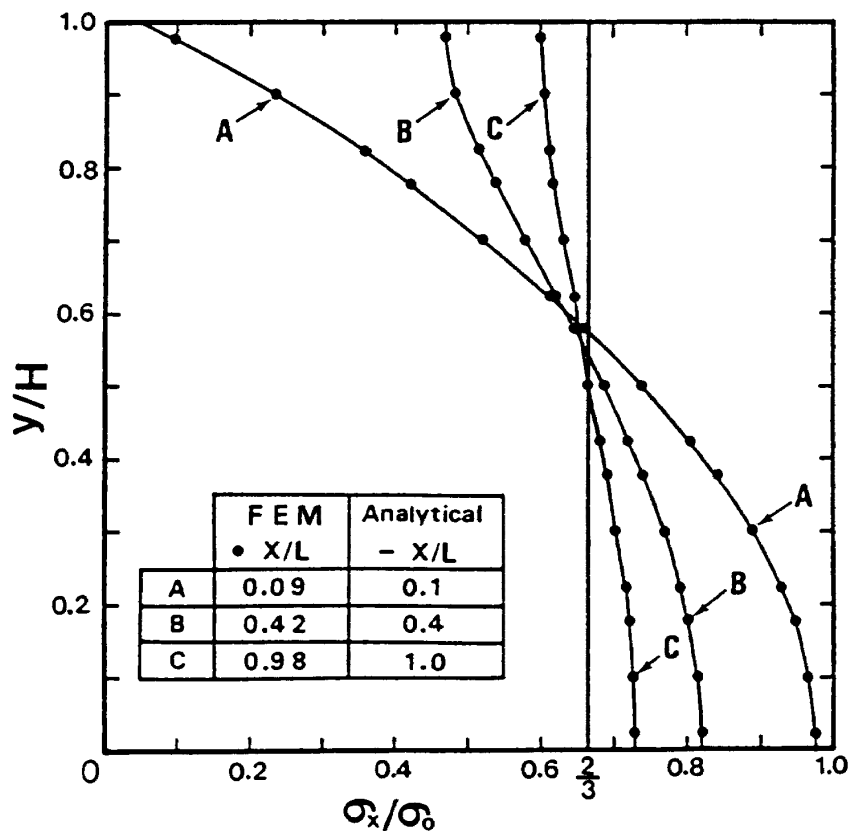


図 9  $y$  軸方向に沿った応力  $\sigma_x$  の解析解<sup>4)</sup>との比較 ( $2L/2H = 5.0$ )

表 2 固有値  $\lambda H$  の比較と特性長さ  $l_e$  の値

	材 料	有限要素解	解 析 解	特性長さ $l_e$
1	等方性材料	$2.11 \pm 1.12i$ <sup>9)</sup>	$2.11 \pm 1.13i$ <sup>11)</sup>	1.09
2	Magnesium	$2.19 \pm 0.94i$	$2.19 \pm 0.94i$ <sup>4)</sup>	1.05
3	Zinc	$2.40 \pm 1.82i$	$2.40 \pm 1.82i$ <sup>4)</sup>	0.96
4	Graphite/Epoxy	0.56	$0.56$ <sup>4)</sup>	4.11

Graphite/Epoxyは端末の影響が著しいが、同じ面内等方性の材料でもMagnesium, Zincは等方性材料と同程度の端末効果である。

### 3.2 対称積層板

表3はGraphite/Epoxy対称積層板の場合について固有値解析を行ない、さらにその結果から計算した特性長さ $l_e$ の値を最小固有値 $\lambda H$ とともに示したものである。ここで対称積層板の積層構成記号は、図10に示した例と同様に積層板の中央面から上半分の積層構成を記号で示すことにする。また積層材の各角度に対する層の体積率は同じとする。 $[0^\circ]_s$ は一方方向繊維強化材の単層板(lamina)であり、繊維方向は $x$ 方向と同じである。表2のGraphite/Epoxyの値と同じ値を示している。この場合は平面応力状態での解であり、表2は平面ひずみ状態での解である。 $[90^\circ]_s$ は単層板の繊維方向が $x$ 軸と直角の場合で

あり、等方性材料の特性長さ $l_e = 1.09$ より小さい値を示している。これは不均一応力場の減衰速度が速く、端末の影響がほとんど板幅程度の範囲内であることを示している。 $[0^\circ/90^\circ]_s$ は対称cross-ply積層板であり、 $0^\circ$ と $90^\circ$ の層の体積率が同じであっても $0^\circ$ の影響が大きく、端末効果の著しい積層構成と言える。 $[45^\circ/-45^\circ]_s$ は対称angle-ply積層板で固有値 $\lambda H$ の値は複素数であり、 $[0^\circ/90^\circ]_s$ の積層構成に比べると端末効果は少ない。等方性材料の特性長さに比較すると1.5倍の長さである。 $[0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$ は擬等方性(quasi-isotropic)積層材料で全体の弾性定数は等方性材料と等価である。固有値解析の結果も等方性材料の場合と同一の値を示していることからこのことが理解できる。

図11はGraphite/Epoxy複合材の積層構成が $[\theta/-\theta]_s$ の対称angle-ply積層板について固有値解析を行ない、その結果から計算した特性長さ $l_e$ を図示

表3 Graphite/Epoxy 対称積層板の固有値 $\lambda H$ と特性長さ $l_e$

	積層構造	有限要素解	特性長さ $l_e$
1	$[0^\circ]_s$	0.56	4.11
2	$[90^\circ]_s$	2.53	0.91
3	$[0^\circ/90^\circ]_s$	0.76	3.03
4	$[45^\circ/-45^\circ]_s$	$1.38 \pm 1.93i$	1.67
5	$[0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$	$2.11 \pm 1.12i$	1.09

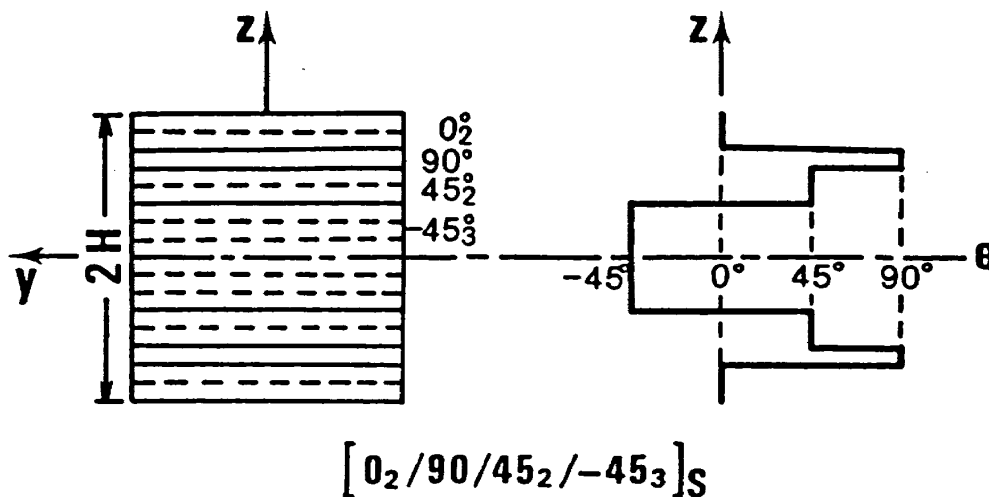


図10 対称積層板の積層構成例

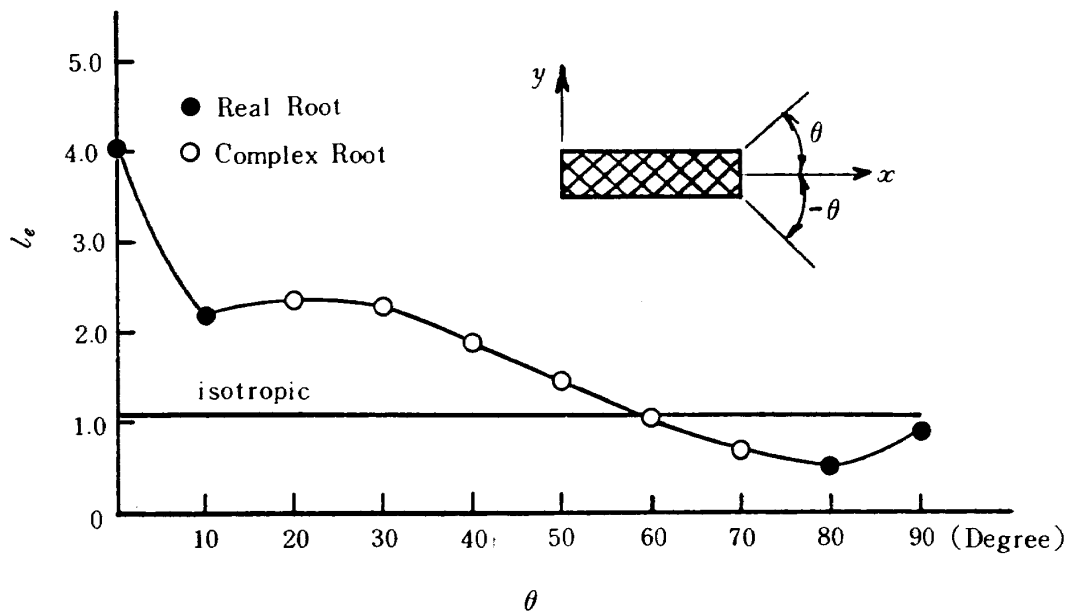


図 11 Graphite/Epoxy の Angle-ply 積層板における特性長さ  $l_e$  の値

したものである。積層角度  $\theta$  と  $-\theta$  の各層の体積率は同じとする。図により積層角度  $\theta$  が  $0^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$  の範囲では、特性長さ  $l_e$  が 2 より大きくなり、末端の影響が板幅の 2 倍以上に及ぶことになる。また angle-ply 積層板であっても積層角  $\theta$  が  $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  の範囲では  $l_e < 1$  となり、等方性の場合に比べ減衰速度が速く末端の影響が遠くに及ばないことを示している。とくに  $\theta$  が  $80^\circ$  の近傍で特性長さ  $l_e$  が最小になり、等方性の場合に比べ  $1/2$  以下となっているのは興味ある結果といえる。Graphite/Epoxy の単層板では末端効果が著しいが積層角度を  $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  の範囲で材料設計をすることで末端効果の少ない積層板が得られることになる。

#### 4. 結 論

複合材料とくに対称積層板における末端効果を固有値解析の立場より評価する一般的な手法を確立することができ、数値計算例を通してその有効性が確認できた。得られた結果をまとめると次のようになる。

1. 面内等方性材料の末端効果を固有値解析した結果と解析解との比較により良好な一致をしている。また得られた固有値  $\lambda H$  の値より計算した特性長さ  $l_e$  と通常の有限要素法の弾性解析の応力分布により、末端効果の及ぶ範囲を特性長さ  $l_e$  で評

価できることが確認できた。

2. 面内等方性材料の Magnesium, Zinc については、等方性材料と同程度の末端効果であり、また同じ面内等方性材料であっても弾性定数比  $E_T/E_L$ ,  $G_{LT}/E_L$  の値が小さい Graphite/Epoxy 材では末端効果の著しいことが有限要素解析によっても確認された。
3.  $[0^\circ]_s$  と  $[90^\circ]_s$  では特性長さ  $l_e$  を比較すると 4 倍程度の差があり、 $[0^\circ/90^\circ]_s$  と  $[90^\circ]_s$  では 3 倍程度の差があることから、 $[0^\circ/90^\circ]_s$  の cross-ply では  $0^\circ$  の層の影響が顕著に現われ、末端効果の著しいことが明らかになった。
4. Graphite/Epoxy の対称  $[\theta/-\theta]_s$  angle-ply 積層板では、積層角度  $\theta$  が  $0^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$  の範囲において等方性材料の 2 倍以上の末端効果が生じるために注意することが必要である。しかし積層角度  $\theta$  が  $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  の範囲では、等方性の特性長さ以下の値が得られることが明らかになった。

#### 5. 参 考 文 献

- 1) Puppo, A. H. and Evensen, H. A., Interlaminar Shear in Laminated Composites Under Generalized Plane Stress, J. Composite Materials, Vol.4, 1970, pp.204-220.
- 2) Pipes, R. B and Pagano, N. J., Inter-

- laminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension, *J. Composite Materials*, Vol.4, 1970, pp.538-548.
- 3) Pagano, N. J. and Pipes, R. B., Some Observations on the Interlaminar Strength of Composite Laminates, *Int. J. of Mechanical Science*, Vol.15, 1973, pp.679-688.
  - 4) Choi, I. and Horgan, C. O., Saint-Venant's Principle and End Effects in Anisotropic Elasticity, *J. Applied Mechanics (Trans. ASME)*, Vol.44, 1977, pp.424-430.
  - 5) Choi, I. and Horgan, C. O., Saint-Venant End Effects for Plane Deformation of Sandwich Strips, *Int. J. Solids Structures*, Vol.14, 1978, pp.187-195.
  - 6) Dong, S. B. and Goetschel, D. B., Edge Effects in Laminated Composite Plates, *J. Applied Mechanics (Trans. ASME)*, Vol.49, 1982, pp.129-135.
  - 7) Rao, N. R. and Valsarajan, K. V., Saint-Venant's Principle in Sandwich Strip, *Computers and Structures*, Vol.12, 1980, pp.185-188.
  - 8) 横内康人, 奥村秀人, 渡辺勝彦, 山田嘉昭, 複合材料におけるサンブナンの原理の検討, *日本機械学会講演論文集*, No.884-1, 1984年3月, pp.41-43.
  - 9) 奥村秀人, 横内康人, 渡辺勝彦, 山田嘉昭, 複合材料における局所応力場の有限要素解析, *日本機械学会*, 第929回講演会(材料力学)講演論文集, 1984年11月, pp.621-628.
  - 10) Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, 1975, Chapter 4, McGraw-Hill.
  - 11) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., (金多 潔監訳) *弾性論*, 1973, pp.62-64 (コロナ社).
  - 12) Pagano, N. J. and Whitney, J. M., Geometric Design of Composite Cylindrical Characterization Specimens, *J. Composite Materials*, Vol.4, 1970, pp.360-378.

## 既 刊 報 告

- |         |  |                |   |
|---------|--|----------------|---|
| TR-840  | 空気孔による燃焼器ライナ壁温度分布に及ぼす影響—実験・研究—<br>The Effect of Air Holes on Combustor Liner Wall Temperature Profile<br>—Experiments—   | 1984年10月       | 鈴木 和雄                                       |
| TR-841  | 凹曲面に沿う二次元境界層の安定計算第一報、攪乱を支配する連立常微分方程式の数値解法<br>Stability Calculations of the Two-Dimensional Boundary layer along a Concavewall Part 1, A Numerical method of Solution for the Simultaneous Ordinary Differential Equations Governing the Disturbances | 1984年10月       | 綿貫 忠晴, 伊藤 信毅                                |
| TR-842  | 航技研二次元風洞の気流特性について(Ⅲ)<br>—気流の乱れと測定法—<br>Flow Quality of NAL Two-Dimensional Transonic Wind Tunnel Part III Flow Turbulence Level and Measuring Method   | 1984年12月       | 小国 保男, 佐藤 衛<br>神田 宏, 榑原 盛三<br>三輪 等, 馬場 滋夫   |
| TR-843T | Monte Carlo Simulation of Thermalization of Subexcitation Electrons in He, Ne, Ar Kr, and Xe   | December, 1984 | Katsuhisa KOURA                             |
| TR-844  | 弾性バネ支持方式振り子型加速度計の研究<br>Study on a Flexure Hinged Pendulum Accelerometer  | 1984年12月       | 鈴木 孝雄, 大月 正男<br>円居 繁治                       |
| TR-845  | 非圧縮二次元翼の層流制御設計法(その1)積分法に基づく吸込み速度の近似計算法<br>A Method of Determining the Suction Velocity for Laminar Flow Control of Two-Dimensional Airfoil in incompressible Flow  | 1984年12月       | 石田 洋治                                       |
| TR-846  | 片持矩形弾性翼の突風荷重軽減の風洞試験と解析<br>Gust Load Alleviation of a Cantilevered Rectangular Elastic Wing, Wind Tunnel Experiment and Analysis  | 1984年12月       | ACT 研究会                                     |
| TR-847  | 航空宇宙技術研究所 2m×2m 遷音速風洞の省電力運転法の研究<br>On Power Efficient Operation of the 2m×2m transonic wind tunnel at the National Aerospace Laboratory  | 1984年12月       | 白井 正孝, 中村 正剛<br>鈴木 正光, 鈴木 弘一<br>小池 陽, 神谷 信彦 |
| TR-848T | Effective Specific Impulse of Secondary Flow Injected into a Rocket Nozzle   | December, 1984 | Hiroshi MIYAZIMA<br>and<br>Kazuo KUSAKA     |
| TR-849T | Numerical Simulation of Unsteady Motion in a Turbulent Mixing Layer  | December, 1984 | Kenji INOUE                                 |

---

## 航空宇宙技術研究所報告850号

昭和60年1月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大東町7丁目44番地1  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川2-27-12

---

Printed in Japan