

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-948

非定常オイラー方程式に対する δ^2 -コレクションスキーム

松野謙一

1987年10月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

非定常オイラー方程式に対する δ^2 -コレクションスキーム*

松野謙一**

δ^2 -Correction Scheme for Unsteady Euler Equations

By Kenichi MATUNO

ABSTRACT

A new implicit finite-difference scheme for unsteady Euler equations is proposed in this paper. The quantities of the order of the square of the time-step are employed as unknowns of the scheme, which produces a " δ^2 (delta-square)-form" of the algorithm. The present scheme has second-order time accuracy without iteration. The iteration process in the algorithm, which the scheme has as an option, improves the numerical accuracy and robustness. Numerical experiments show that the present scheme is very good not only for an unsteady problem but also a steady problem.

1. 序論

スーパーコンピュータの出現と高能率数値計算法の発達により、今日では、実機まわりの定常オイラー/ナビエ・ストークス方程式がある程度の許容時間内に解かれるようになってきた¹⁾。Beam-Warming法を代表とする陰的差分法は、時間依存解としての定常流を求めることを目的に、対角化を施す事による演算量の減少化、局所時間ステップを用いて収束を加速する等、目覚ましい改良が加えられてきた²⁾。このように漸近解としての定常流を求める場合の数値計算法については、非常に多く改良発展が為されているが、本質的に非定常現象に対する数値解法は、あまり考慮が払われていないように思われる。

この様な背景の下、本論文の目的は、本質的に非定常方程式を対象としたスキームを提案することである。

ナビエ・ストークス方程式をも考慮するとき数値解法は安定性その他から陰的解法が普通選ばれ

ることが多い。陰的解法の場合、通常、 q^{n+1} そのものを未知数とするか、または、 $\delta q (= q^{n+1} - q^n)$ を未知数とし差分方程式を δ (デルタ)-形式に表す。 δ -形式で表された数値解法は、一次元非定常オイラー方程式に対しては、一般に次の形式となる：

$$\left[\frac{1}{\Delta t} + D_x A \right] \delta q = -[F_x] \quad (1)$$

ここで、 D_x は、空間差分オペレータである。いま、MacCormack³⁾に従って差分法(1)式を

$$[\text{Numerics}] \delta q = [\text{Physics}] \quad (2)$$

とみると、 δ -形式により記述された数値解法は、 $[\text{Physics}]$ が、 F_x であることから定常流-orientedなスキームといえるであろう。少なくとも、時間依存解として定常流を求める場合には $\delta q \rightarrow 0$ として、 $F_x = 0$ を求めるのであるから、都合のいい形式である。これに対し、非定常方程式を対象とする時には、 $[\text{Physics}]$ の項は、やはり、非定常方程式そのものが、来るのが好ましいであろう。即ち

$$[\text{Physics}] \rightarrow [q_t + F_x]$$

*昭和62年 7月18日受付

**空気力学第二部

この方針の下に本論文では、以下、時間二次精度の仮定の下、非定常方程式-orientedで、かつ定常流をも効率よく計算出来る新しい定式化に基づくスキームを提案する。新しい定式化とは、ここでは「 δ^2 -形式」と呼び、その δ^2 -形式に基づく新しいスキームは、一次元非定常オイラー方程式に対して次式により表される：

$$\left[\frac{(1+\tau)}{\Delta t} + \sigma \theta D_x A \right] \delta^2 q = -[q_t + F_x]^{n+\theta \langle \nu \rangle} \quad (3)$$

$$q^{n+1 \langle \nu+1 \rangle} = q^{n+1 \langle \nu \rangle} + \delta^2 q$$

但し、

$$q^{n+1 \langle 0 \rangle} = q^n + (q^n - q^{n-1})$$

上式は、本質的に非定常方程式に基づくものであり、同時に、反復解法の特徴をも保持するものである。すなわち、数式上は、反復することなく希望の空間精度をもつが、実質精度および安定性を高めるため、あるいは定常解を求める過程で解が停滞した時の対策として、反復過程を取ることも可能な事を意味する。

なお、本論文では、一次元非定常オイラー方程式を対象としたが、非定常ナビエ・ストークス方程式に対しても、同様であり、また、多次元に対しても、近似因子分解等既存のテクニックを使って容易く拡張可能である。

2. 一次元非定常オイラー方程式

対象とする一次元非定常オイラー方程式は、ベクトル形式で、次の様に書かれる。

$$q_t + F_x = 0 \quad (4)$$

ここに

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e+p) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここに、 ρ 、 u 及び e は、それぞれ密度、速度及び全エネルギーである。圧力 p は、

$$p = (r-1) \left(e - \frac{\rho u^2}{2} \right) \quad (6)$$

ただし、 r は比熱比で空気の場合1.4である。

3. 陰的差分法と風上差分

(4)式に対し、 τ 及び θ をパラメータとして時間3-レベルの差分近似を行うと、(7)式の如くなる：

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \right) [(1+\tau)q^{n+1} - (1+2\tau)q^n + \tau q^{n-1}] + \theta D_x F^{n+1} + (1-\theta)D_x F^n = 0 \quad (7)$$

ここに、

$$q^{n+1} = q(t^{n+1}), \quad t^{n+1} = t^n + \Delta t \quad (8)$$

であり、 D_x は、空間微分に対する差分近似オペレータである。 τ 及び θ の組合せにより(7)式は次のような時間差分形となる：

$\tau = 0, \theta = 1$: オイラーインプリシット
(時間一次精度)

$\tau = 0, \theta = 1/2$: クランクニコルソン型
(時間二次精度)

$\tau = 1/2, \theta = 1$: 3点後退差分
(時間二次精度)

本論文においては時間二次精度を前提においてるので、以下において(τ, θ)は、時間二次精度となるものが選ばれているものとする。

今、 δq^n を次式：

$$\delta q^n = q^{n+1} - q^n \quad (9)$$

により定義し(7)式を書き換えると次のようになる：

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \right) [(1+\tau)\delta q^n - \tau \delta q^{n-1}] + \theta D_x F^{n+1} + (1-\theta)D_x F^n = 0 \quad (10)$$

非線形項 F^{n+1} は、時間二次精度で次の様に線形化される：

$$F^{n+1} = F^n + A^n \delta q^n + o(\Delta t^2) \quad (11)$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial q}$$

(11)式を(10)式に代入して整理すると、Beam -

Warming法に代表される δ -形式の陰的スキームが得られる：

$$\left[\frac{1+\tau}{\Delta t} + \theta D_x A^n \right] \delta q^n = -[D_x F^n] + \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right) \delta q^{n-1} \quad (12)$$

$$\delta q^n = q^{n+1} - q^n \quad (13)$$

ここで注意しておきたいのは、(12)式は、例えば $\tau=1/2$, $\theta=1$ のときには、時間二次精度をもちその誤差のオーダーは $o(\Delta t^2)$ である。即ち(12)式は $o(\Delta t)$ まで正しく評価されており各項は、それぞれ次のオーダーである：

$$\frac{1+\tau}{\Delta t} \delta q^n : o(1) \quad (14a)$$

$$D_x A^n \delta q^n : o(\Delta t) \quad (14b)$$

$$-[D_x F^n] + \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right) \delta q^{n-1} : o(1) \quad (14c)$$

波動型の方程式に対しては、波動の伝播方向に対しそれぞれが風上差分となるように差分近似するのが安定性の上でまた衝撃波における無用な振動を押さえる意味でも好ましい。いま流束 F 及びそのヤコビアン A をその波動の伝播方向に対し次のように分離する：

$$F = F^+ + F^- \quad (15)$$

$$A = A^+ + A^- \quad (16)$$

このとき、分離された流束のそれぞれの波動伝播方向に対し風上差分を適用すると(12)式は次のようになる：

$$\left[\frac{1+\tau}{\Delta t} + \theta (D_x^- A^{+n} + D_x^+ A^{-n}) \right] \delta q^n = -[D_x^- F^{+n} + D_x^+ F^{-n}] + \frac{\tau}{\Delta t} \delta q^{n-1} \quad (17)$$

$$\delta q^n = q^{n+1} - q^n \quad (18)$$

ここに、 D_x^- および D_x^+ は、一次精度または高次精度の風上差分オペレータである。

なお、以下においては、特に断らないかぎり $D_x A$ 及び $D_x F$ は、流束分離されているものとする：

る：

$$D_x A = D_x^- A^+ + D_x^+ A^-$$

$$D_x F = D_x^- F^+ + D_x^+ F^-$$

4. δ^2 -コレクションスキーム

4.1 単段型スキーム

まず、(17)式における陰的側空間差分項について考えてみよう。空間差分オペレータとして二次以上の精度のものを適用する時それは、一次精度のオペレータとそれを高次に補正する項との和として表す事が可能である。即ち、

$$D_x^- A^+ \delta q^n = \sigma \nabla_x A^+ \delta q^n + g(\delta q^n) \quad (19)$$

但し、

$$\nabla_x : \text{First order upwind operator}$$

$$\nabla_x ()_i = \frac{()_i - ()_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\left(\text{同様に、} \Delta_x ()_i = \frac{()_{i+1} - ()_i}{\Delta x} \right)$$

ここに σ は任意に指定できるパラメータである。例えば、二次精度風上差分オペレータは、次のように分離可能である

$$D_x^- u_i = \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x} = \frac{3}{2} \nabla_x u_i + \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{2\Delta x} \quad (20)$$

$$\left(\sigma = \frac{3}{2} \right)$$

また、次のようにも分離出来る：

$$D_x^- u_i = \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x} = 2\nabla_x u_i + \frac{-u_i - u_{i-2}}{2\Delta x} \quad (\sigma = 2) \quad (21)$$

したがって空間差分オペレータの分離は一意的ではない。

さて、

$$\delta q^n = \delta q^{n-1} + o(\Delta t^2) \quad (22)$$

であるから、時間二次の範囲で考察するとき、(19)式を

$$D_x^- A^+ \delta q^n = \sigma \nabla_x A^+ \delta q^n + g(\delta q^{n-1}) \quad (23)$$

としても時間精度は劣化しない。

いま、 $\delta^2 q$ を次の様に定義する：

$$\begin{aligned} \delta^2 q &= \delta q^n - \delta q^{n-1} \\ (\delta q^n &= \delta q^{n-1} + \delta^2 q) \end{aligned} \quad (24)$$

(23)式に(24)式を代入して整理すると

$$D_x^- A^+ \delta q^n = \sigma \nabla_x A^+ \delta^2 q + [\sigma \nabla_x A^+ \delta q^{n-1} + g(\delta q^{n-1})]$$

即ち、

$$D_x^- A^+ \delta q^n = \sigma \nabla_x A^+ \delta^2 q + D_x^- A^+ \delta q^{n-1} \quad (25)$$

したがって、(24)、(25) 両式を (17)式に代入すると、 $\delta^2 q$ を未知数とする「 δ^2 -形式」のスキームが得られる：

$$\begin{aligned} \left[\frac{1+\tau}{\Delta t} + \sigma \theta (\nabla_x A^{+n} + \Delta_x A^{-n}) \right] \delta^2 q \\ = - \left[\frac{(1+\tau) \delta q^{n-1} - \tau \delta q^{n-1}}{\Delta t} + \{ D_x F^n + \theta D_x A^n \delta q^{n-1} \} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、

$$D_x A^n \delta q^{n-1} = D_x F^{n+1} - D_x F^n + o(\Delta t^2) \quad (27)$$

(26)式の右辺は、非定常オイラー方程式(4)を、 $t=t^n + \theta \Delta t$ において差分近似したものに相当する。このことを強調して、(26)式の右辺を象徴的に表わすと、

$$\begin{aligned} \left[\frac{1+\tau}{\Delta t} + \sigma \theta (\nabla_x A^{+n} + \Delta_x A^{-n}) \right] \delta^2 q \\ = - [q_t + F_x]^{n+\theta} \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、

$$\begin{aligned} q^{n+1} &= q^n + \delta q^{n-1} + \delta^2 q \\ &= q^n + (q^n - q^{n-1}) + \delta^2 q \end{aligned} \quad (29)$$

(26)式または(28)式が、本論文にて提案する新しいスキームであり、時間二次精度を持ち、空間精度は、右辺の空間差分オペレータの精度を持つ。

この新しいスキームは、未知量として $\delta^2 q$ を使っておりそのオーダーは、時間ステップ Δt の二乗であるので、このスキームを本論文においては「 δ^2 -コレクションスキーム」と呼ぶ。また、(26)式あるいは(28)式の形式を、 δ -形式の差分法(11)式に対応づけて、ここでは「 δ^2 -形式」と呼ぶ。

4.2 反復型スキーム

クーラン数が大きい場合あるいは流れの特性時間が場所によって極端に異なるいわゆるstiffな系の場合、(28)式単段では十分に現象に追従できない場合がある。この様な場合、 δ^2 -コレクションスキームを反復的にもちい解の実質精度を高めかつ安定性をも高めることが可能である。

いま、 ν を反復回数を示すインデックスとし、 $\nu=1$ を(29)式により与えられるものとする。即ち、 $\nu=1$ に対し：

$$\begin{aligned} q^{n+1<\nu>} &= q^n + \delta q^{n-1} + \delta^2 q \\ &= q^n + (q^n - q^{n-1}) + \delta^2 q \end{aligned} \quad (30)$$

さらに、 $\nu \geq 1$ に対し $\delta q^{n<\nu>}$ 及び $\delta^2 q$ を次式で定義する：

$$\delta q^{n<\nu>} = q^{n+1<\nu>} - q^n \quad (31)$$

$$\delta^2 q = \delta q^{n<\nu+1>} - \delta q^{n<\nu>} \quad (32a)$$

$$= q^{n+1<\nu+1>} - q^{n+1<\nu>} \quad (32b)$$

このとき、

$$\begin{aligned} D_x^- A^+ \delta q^{n<\nu+1>} \\ = \sigma \nabla_x A^+ \delta q^{n<\nu+1>} + g(\delta q^{n<\nu+1>}) \\ = \sigma \nabla_x A^+ \delta q^{n<\nu+1>} + g(\delta q^{n<\nu>}) \\ + o(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (33)$$

であるから、(32a)式を用いて書き換えると

$$\begin{aligned} D_x^- A^+ \delta q^{n<\nu+1>} \\ = \sigma \nabla_x A^+ \delta^2 q + D_x^- A^+ \delta q^{n<\nu>} \end{aligned} \quad (34)$$

(32a)および(34)両式を(17)式に代入し、更に係数行列Aも最新のものに更新するとき、反復型 δ^2 -コレクションスキームとして次式を得る：

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1+\tau}{\Delta t} + \sigma \theta (\nabla_x A^{n+1<\nu>} \right. \\ & \quad \left. + \Delta_x A^{-n+1<\nu>}) \right] \delta^2 q \\ &= - \left[\frac{(1+\tau) \delta q^{n<\nu>} - \tau \delta q^{n-1}}{\Delta t} \right. \\ & \quad \left. + \{D_x F^n + \theta D_x A^{n+1<\nu>} \delta q^{n<\nu>}\} \right] \quad (35) \end{aligned}$$

同様に、(35)式の右辺は、非定常オイラー方程式(4)を、最新の既知の値を使って $t=t^n + \theta \Delta t$ に於いて差分近似したものに相当する。即ち、

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1+\tau}{\Delta t} + \sigma \theta (\nabla_x A^{n+1<\nu>} \right. \\ & \quad \left. + \Delta_x A^{-n+1<\nu>}) \right] \delta^2 q \\ &= -[q_t + F_x]^{n+\theta<\nu>} \quad (36) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} q^{n+1<\nu+1>} &= q^n + \delta q^{n<\nu>} + \delta^2 q \\ &= q^{n+1<\nu>} + \delta^2 q \quad (37) \end{aligned}$$

いま、十分に反復を行い $\delta^2 q$ が、零に収束したならば、(36)式の右辺も零となる。即ち、(36)式左辺の [Numerics] が0となるとき右辺の [Physics] も0となり、求める非定常方程式の解が右辺の差分近似精度で求められることになる。

4.3 一般化

4.1 節(19)式及び4.2 節(33)式においては、陰的側の空間差分項を一次精度のオペレータとそれを高次に補正する項との和として表した。それは、風上差分においては一次精度のオペレータが最も安定で基本となっている上に陰的側が高々三重対角行列で済むことにより演算量が少ないからであった。より一般的には、空間差分オペレータの分離は保存形が保たれる限り任意に行うことが可能である。いま、空間差分オペレータ D_x を次のように D_x^1 、 D_x^2 の両オペレータの和として表されたとき、

$$D_x = D_x^1 + D_x^2 \quad (38)$$

時間二次精度の範囲において

$$\begin{aligned} D_x A \delta q^n &= D_x^1 A \delta q^n + D_x^2 A \delta q^n \\ &= \sigma D_x^1 A \delta q^n + (1-\sigma) D_x^1 A \delta q^n \\ & \quad + D_x^2 A \delta q^n \\ &= \sigma D_x^1 A \delta q^n + (1-\sigma) D_x^1 A \delta q^{n-1} \\ & \quad + D_x^2 A \delta q^{n-1} \quad (39) \end{aligned}$$

$\delta^2 q$ を使って書き換えると

$$\begin{aligned} D_x A \delta q^n &= \sigma D_x^1 A \delta^2 q + D_x A \delta q^{n-1} \quad (40) \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} D_x A \delta q^{n<\nu+1>} &= \sigma D_x^1 A \delta^2 q + D_x A \delta q^{n<\nu>} \quad (41) \end{aligned}$$

次に、 δ^2 -コレクションスキームを単段型及び反復型両者を一つにまとめて記述しよう。いま、(35)、(37)両式において特に $\nu=0$ を次のように定義する：

$$\delta q^{n<0>} = \delta q^{n-1} = q^n - q^{n-1} \quad (42a)$$

$$q^{n+1<0>} = q^n + \delta q^{n-1} \quad (42b)$$

このとき、4.1 節(26)~(29)式及び4.2 節(35)~(37)式は、一つにまとめて次のように記述される。空間差分については、一般的な(41)式を使った。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1+\tau}{\Delta t} + \sigma \theta (D_x^{1-} A^{n+1<\nu>} \right. \\ & \quad \left. + D_x^{1+} A^{-n+1<\nu>}) \right] \delta^2 q \\ &= - \left[\frac{(1+\tau) \delta q^{n<\nu>} - \tau \delta q^{n-1}}{\Delta t} \right. \\ & \quad \left. + \{D_x F^n + \theta D_x A^{n+1<\nu>} \delta q^{n<\nu>}\} \right] \quad (43) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} D_x A^{n+1<n>} \delta q^{n<\nu>} &= D_x F^{n+1<\nu>} - D_x F^n \quad (44) \end{aligned}$$

であるから、(43)式は次のように書き換えられる：

$$\left[\frac{1+\tau}{\Delta t} + \sigma \theta (D_x^{-1} A^{n+1<\nu>} + D_x^{1+} A^{-n+1<\nu>}) \right] \delta^2 q$$

$$= - \left[\frac{(1+\tau) \delta q^{n<\nu>} - \tau \delta q^{n-1}}{\Delta t} + \{ \theta D_x F^{n+1<\nu>} + (1-\theta) D_x F^n \} \right] \quad (45)$$

あるいは、右辺を象徴的に表すと

$$\left[\frac{1+\tau}{\Delta t} + \sigma \theta (D_x^{-1} A^{n+1<\nu>} + D_x^{1+} A^{-n+1<\nu>}) \right] \delta^2 q$$

$$= - [q_t + F_x]^{n+\theta<\nu>} \quad (46)$$

($\nu = 0, 1, 2, \dots$)

ここで、

$$q^{n+1<\nu+1>} = q^{n+1<\nu>} + \delta^2 q \quad (47)$$

但し、

$$q^{n+1<0>} = q^n + (q^n - q^{n-1}) \quad (48)$$

なお、 $A^{n+1<0>}$ の評価は、次式(49)(50)何れでも精度に影響はない。

$$A^{n+1<0>} = A(q^n) \quad (49)$$

$$A^{n+1<0>} = A(q^{n+1<0>}) \quad (50)$$

4.4 考察

δ^2 -コレクションスキームの時間についての各項のオーダーは、 $\delta^2 q$ が、 $o(\Delta t^2)$ であるから、それぞれ次のようになる：

$$\frac{(1+\tau)}{\Delta t} \delta^2 q \quad : \quad o(\Delta t) \quad (51a)$$

$$\sigma \theta D_x^1 A^{n+1<\nu>} \delta^2 q \quad : \quad o(\Delta t^2) \quad (51b)$$

$$-[q_t + F_x]^{n+\theta<\nu>} \quad : \quad o(\Delta t) \quad (51c)$$

時間二次精度のスキームは、 $o(\Delta t)$ 迄正しく評価され、 $o(\Delta t^2)$ 以上は、誤差項である。したがって、 δ^2 -コレクションスキームの左辺(陰的側)の空間差分項((51b)式)は、数式上は、誤差項であり精度上は意味がなく安定化項に相当する事が

わかる。事実 σ は、時間精度には独立の任意パラメータであった。したがって、 σ をスキームが安定となるように選ぶことができる。一つの目安として(46)式左辺の係数行列：

$$\left[\frac{1+\tau}{\Delta t} E + \sigma \theta D_x^1 A^{n+1<\nu>} \right] \quad (52)$$

(E：単位行列)

の固有値が1より大きくなるように採るのが安定上必要であろう。この意味から σ は、1以上のある程度大きい値である必要がある。ただし、本スキームの分散現象(dispersion)は、スキームの擬似微分方程式より σ に依存することが示されるので、 σ を安定性の面だけから判断し、大きくとると分散が大きくなる場合があるので注意する必要がある。本論文においては σ は、2とした。

次章の数値計算例では、陰的(左辺)側風上差分オペレータ D_x^1 として一次精度風上差分オペレータを使った：

$$D_x^1 A^{n+1<\nu>} \delta^2 q$$

$$= (\nabla_x A^{n+1<\nu>} + \Delta_x A^{-n+1<\nu>}) \delta^2 q \quad (53)$$

陽的(右辺)側風上差分オペレータは、次のVan Leerの滑らかな流束分離に高次精度風上差分を適用し、微分可能制限子(Differentiable limiter)を導入した⁴⁾。

$$D_x F = D_x^- F^+ + D_x^+ F^-$$

$$= \frac{(F_{i+1/2}^+ - F_{i-1/2}^+) + (F_{i+1/2}^- - F_{i-1/2}^-)}{\Delta x} \quad (54)$$

ここに、 f を流束ベクトル F の要素とするとき

$$f_{i+1/2}^+ = f_i^+ + \left[\frac{s}{4} \{ (1-\kappa s) \nabla^+ + (1+\kappa s) \Delta^+ \} \right] \quad (55a)$$

$$f_{i+1/2}^- = f_{i+1}^- - \left[\frac{s}{4} \{ (1-\kappa s) \Delta^- + (1+\kappa s) \nabla^- \} \right]_{i+1} \quad (55b)$$

$$\Delta^+ = f_{i+1}^+ - f_i^+, \quad \nabla^+ = f_i^+ - f_{i-1}^+$$

$$s = \frac{2\Delta\nabla + \varepsilon}{\Delta^2 + \nabla^2 + \varepsilon} \quad (55c)$$

ε は、小さな正数である ($\varepsilon = 10^{-6}$)。また、(54)式は κ が、0及び-1のとき二次精度の、1/3のとき三次精度のそれぞれ風上差分となる。

5. 数値計算例

δ^2 -コレクションスキームの特性を調べるため、衝撃波管問題を例に、その計算結果を厳密解と比較する。また、本スキームが、定常問題にも有効である事を示すために拡大管流れ問題を例にその計算結果を示す。スキームの時間差分は、二

次精度とし、非定常問題については、局所最大クーラン数が、1以下であるのでクランク・ニコルソン型 ($\tau = 0, \theta = 1/2$) を、また定常問題については、局所最大クーラン数を大きくとるので3点後退型 ($\tau = 1/2, \theta = 1$) とした。また、計算は、(43)式により行い、 $\nu = 0$ に於けるAとして(49)式を使った。陽側空間差分は、微分可能制限付きの三次精度風上差分とした

衝撃波管問題

スキームに関する論文でしばしば使われるSodの標準問題⁵⁾を選んだ。隔膜は1/3管長に位置し高圧側/低圧側の圧力及び密度比は、それぞれ、

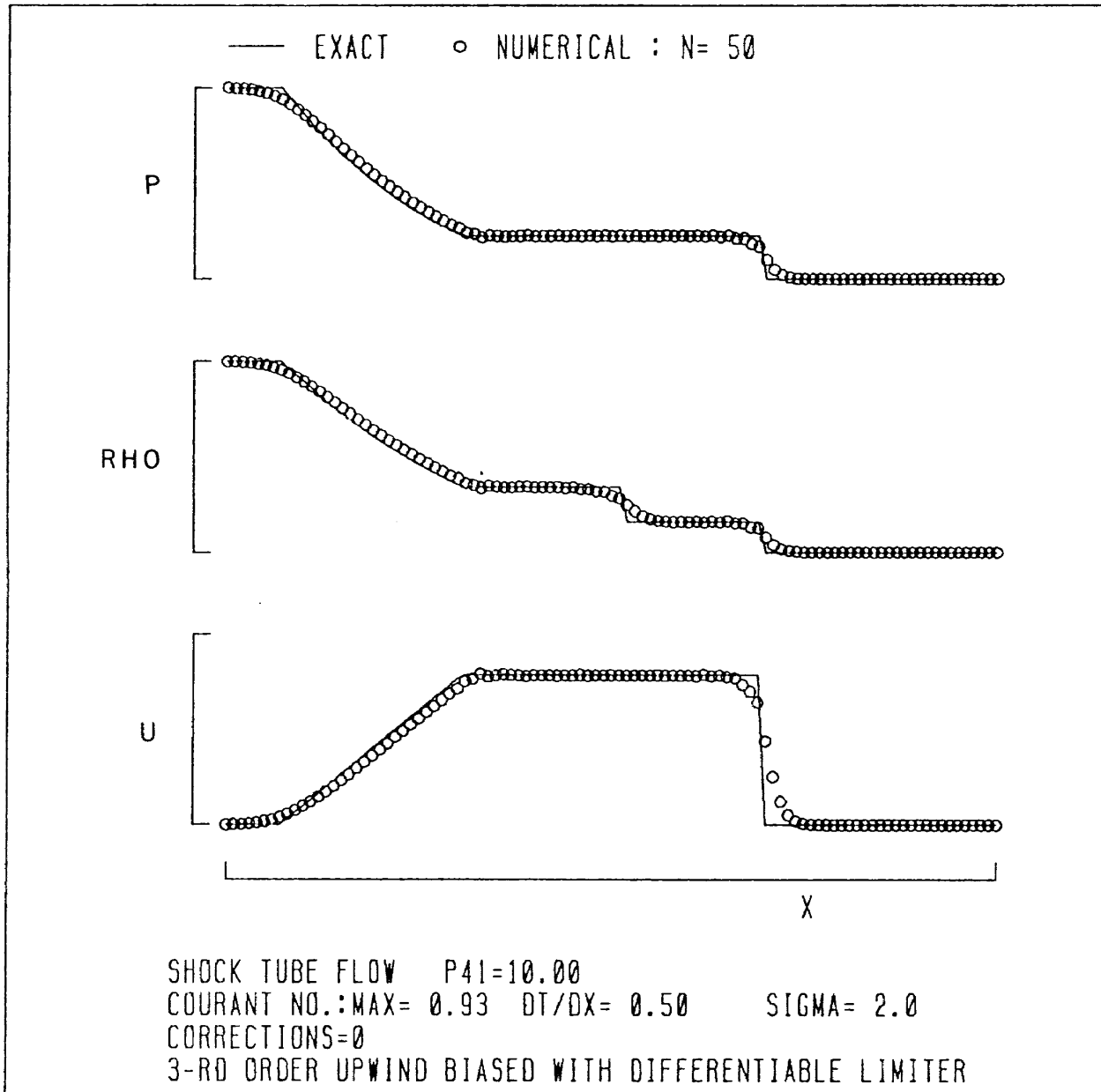


図1. 衝撃波管問題に対する計算値と厳密解との比較 (反復無し、単段型スキーム)

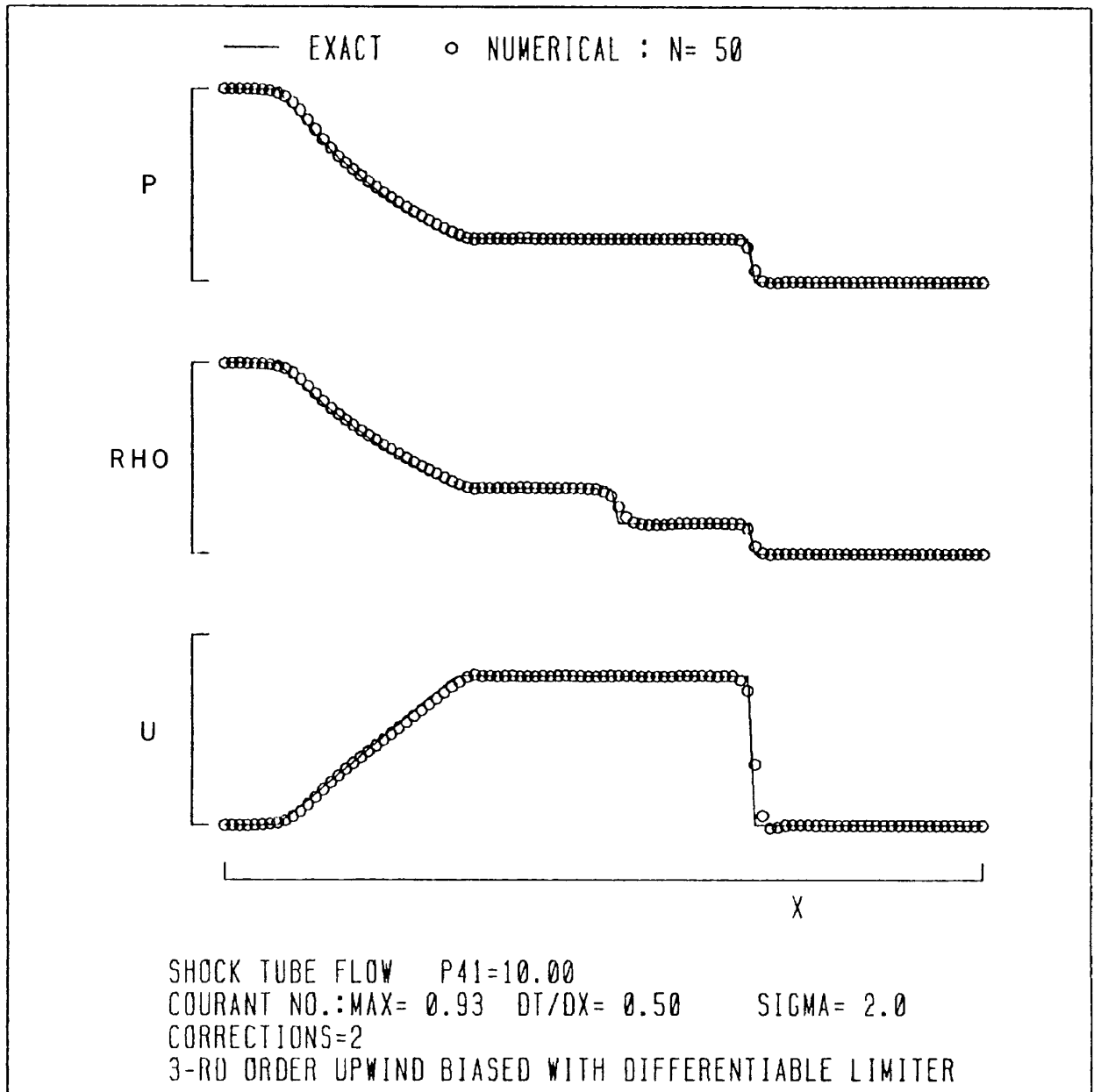


図 2. 衝撃波管問題に対する計算値と厳密解との比較 (2 回反復)

$p_{41}=10$ 、 $\rho_{41}=8$ である。計算格子数は、101点とし、 $\Delta t/\Delta x=0.5$ 局所最大クーラン数は、約 0.93である。50タイムステップに於ける計算値を厳密解と比較する。

δ^2 -コレクションスキームは、反復無しでも数式上、時間二次精度を持っている。第1図は、反復無し(単段型スキーム)として計算した場合の結果を示す。三次精度の空間差分近似を使っているのにも拘らず衝撃波及び接触面に於ける結果は、良好とは言い難い。これに対し、第2図は、2回反復を行った場合の結果を示す。第2図、中央の密度分布図から見られるごとく、衝撃波面は2格子、接触面は3格子で捉えられており、極

めて良い解の改善が為されている。

拡大管流れ問題

時間依存解として定常流を求めるいわゆる時間依存法に対するテスト問題として Yee⁶⁾ 他によってしばしば用いられた次の断面形状分布を持つ拡大管に対し超音速流入亜音速流出の場合を計算した。

$$S(x)=1.398+0.347 \tanh (0.8x-4),$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (56)$$

計算は、超音速流入側圧力 $p_1/\rho_1 c_1^2=1/r$ 、マッハ数 $M_1=1.26$ 、亜音速流出側圧力 $p_2/p_1=1.9$ とし格子点数51、 $\Delta t/\Delta x=4.42$ (流入口クーラン

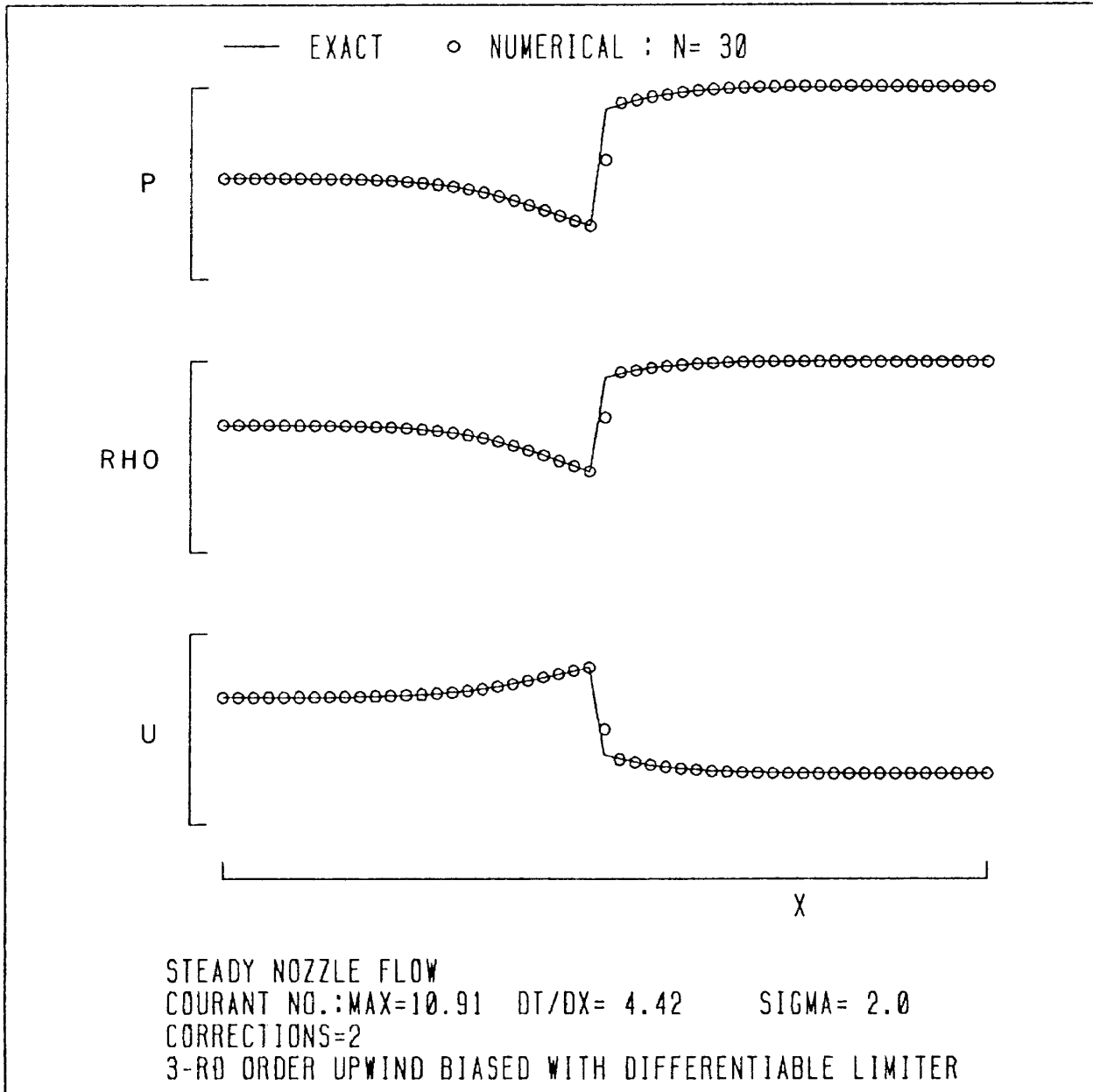


図3. 定常拡大管流れに対する計算値と厳密解との比較。

数10) を与えて行った。なお、計算境界条件⁶⁾は、陽的に取扱い、超音速流入側において p, ρ, u を与え、亜音速流出側において p を与えその他は線形外挿とした。初期条件⁶⁾は、流入と流出両端の線形内挿とした。第3図に計算結果を厳密解と比較する。図は30タイムステップに於ける結果である。通常陰的差分法が第3図の状態に達するのに100タイムステップ以上要することを考慮するとき、本スキームが定常流計算に対しても有効かつ能率的な計算法であることが示されている。

6. まとめ

非定常オイラー方程式に適した新しいスキームを提案した。本 δ^2 -コレクションスキームは既存のスキームが未知量として $o(\Delta t)$ の量 δq を使っているのに対し本スキームは、更に一次高い $o(\Delta t^2)$ の量 $\delta^2 q$ を未知量として定式化し、それにより右辺側に非定常方程式そのものの差分近似式が来るようにしているところに特徴がある。数値実験の結果は、本スキームが、非定常流に対してのみならず時間依存解としての定常流問題に対しても有望なスキームであることを示している。本スキームは、反復無しでも数式上は時間二次精

度をもつものの数値実験の結果では、2回の反復を行った方が良い結果を示した。

7. 参考文献

- 1) Jameson, A.: Successes and Challenges in Computational Aerodynamics, AIAA 87-1184 (1987)
- 2) Pulliam, T. and Steger, J. L.: Recent Improvement in Efficiency, Accuracy and Convergence for Implicit Approximate Factorization Algorithms, AIAA 85-0360 (1985)
- 3) MacCormack, R. W.: A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow, AIAA 81-0110. (1981)
- 4) Anderson, W. K., Thomas, J. L. and van Leer, B.: A Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations, AIAA 85-0122 (1985)
- 5) Sod, G. A.: A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, J.Computational Phys., Vol. 27 (1978) pp.1-31
- 6) Yee, H.C., Beam, R. M. and Warming, R.F.: Stable Boundary Approximations for a Class of Implicit Schemes for the One-Dimensional Inviscid Equations of Gas Dynamics, AIAA 81-1009 (1981)

航空宇宙技術研究所報告 948 号

昭和 62 年 10 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町 7 丁目 44 番地 1
電話武蔵野三鷹 (0422) 47-5911 (大代表) 〒182

印刷所 有限会社清光社印刷所
東京都調布市西つつじヶ丘 1-5-15
