

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1006

非定常ナビエ・ストークス方程式に対する  
 $\delta^2$  - コレクションスキーム

松野 謙一

1988年12月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 非定常ナビエ・ストークス方程式に対する $\delta^2$ -コレクションスキーム\*

松野 謙一\*\*

## $\delta^2$ -Correction Scheme for Unsteady Compressible Navier-Stokes Equations

Kenichi MATSUNO

### Abstract

In this paper a time accurate scheme for unsteady Navier-Stokes equations is presented. This scheme employs, as unknowns, quantities of order of square of time spacing, thus making an algorithm of the " $\delta^2$ -form", of which the right hand side is a numerical approximation of unsteady governing equations. This algorithm makes a scheme especially suitable for time accurate simulations.

A shock tube flow is calculated as an example. The flow is assumed laminar, and a shock wave-boundary layer interaction is simulated.

#### 1. 序 論

計算流体力学においては、数値計算法の研究が、最重要テーマのひとつである。通常、数値計算法のターゲットは、(1)高精度 (high accuracy), (2)安定性 (robustness), (3)高効率 (efficiency) の3つを兼ね備えたスキームを構成することにある。MacCormack は、彼の論文<sup>1)</sup>において、発展方程式に対するスキームを次のような形でとらえた議論をしている。すなわち時間進行法の範疇にはいるスキームについて、そのアルゴリズムを

$$[ \text{Numerics} ] C = [ \text{Physics} ] \quad (1)$$

の形式に構成し、(1) 高精度については右辺の [ Physics ] に於て、(2) 安定性及び(3) 高効率については左辺の [ Numerics ] に於て、それぞれ望みの特性を持たせようとするのである。つまり、目的とする物理現象の模擬は右辺に於て可能な限り高精度に実現する。一方、数値的な安定性及び高効率

性(経済性)は、右辺に影響しない程度に左辺にある程度自由度を持たせたアルゴリズムによって実現する。上述(1)式にもとづくアルゴリズムは、基本的に陰的解法のそれであることに注意されたい。陽的解法は、時間ステップ幅に制限がでる等、安定性の面で好ましくない要素があるので圧縮性ナビエ・ストークス方程式を対象とする本論文では、対象としない。

さて、既存のナビエ・ストークス方程式に対する陰的解法で、最もよく用いられるのは Beam-Warming 法<sup>2)</sup>に代表される ADI スキームを「 $\delta$ -形式」で表現したスキームである。既存の「 $\delta$ -形式」に基づくスキームは、時間依存解としての定常流を対象とした場合、(1)スキームの右辺側に定常方程式の離散近似形が現れる、(2)収束解の時間ステップ幅への依存性を排除できる、等から定常流計算には好都合な形式といわれている。(1)式に対応付けると次のようになるであろう。

$$[ \text{Numerics} ] C = [ \text{Physics} ]$$

↓ ↓

「 $\delta$ -形式」:  $\delta q$  定常流支配方程式  
ここに、 $\delta q = q^{n+1} - q^n$ 、 $q$ は、未知変数ベクトル、 $n$ は、時間ステップを示す。

\*昭和63年11月8日受付

\*\*空力性能部

通常よく用いられる局所時間ステップのテクニックは、時間精度をなくしてしまいその代わりに定常解へ早く収束させるように左辺の [ Numerics ] を変形した方法である。また、対角化法<sup>2)</sup>や LU-ADI 法<sup>3)</sup>は、時間精度を犠牲にし(高々時間一次精度)その代わりに高効率のアルゴリズムとしたもので、左辺の [ Numerics ] を近似形で代用したものである。

この「 $\delta$ -形式」は、確かに時間依存解としての定常流を求める場合には、(1)式の立場より理にかなっていると言える。しかしながら、本質的に非定常現象を対象とするときには、必ずしも合理的な形式とは、考えられない。(1)式に表される考え方に立つならば、右辺には非定常流支配方程式の離散近似形が現れるのが適当であろう。このような考えのもとづき、文献<sup>4), 5)</sup>に於て「 $\delta^2$ -形式」を提案し、それに基づく「 $\delta^2$ -コレクションスキーム」を非定常圧縮性オイラー方程式を対象として提案した。

本論文の目的は、この「 $\delta^2$ -コレクションスキーム」を非定常圧縮性ナビエ・ストークス方程式に対するものに拡張することである。

本論文の構成は次の様である。まず序論に続く第2章において一次元方程式を例にナビエ・ストークス方程式に対する「 $\delta^2$ -形式」およびそれに基づく「 $\delta^2$ -コレクションスキーム」を構成する。そして第3章において、スキームの各項のオーダー評価を行うことにより本「 $\delta^2$ -形式」と既存の「 $\delta$ -形式」との違いを特にスキーム左辺側の取扱について議論し、本「 $\delta^2$ -形式」においては、左辺側 [ Numerics ] が、近似形を使って簡略化と効率化を行っても時間二次精度は保たれることを示す。第4章において多次元の場合の一般論を有限差分法および有限体積法の両方法について展開する。第5章において本論文で取り扱った有限体積法を使った場合の定式化を具体的に述べる。2次元衝撃波管流れの計算例が第6章において示され、最後に結論を述べる。

## 2. 「 $\delta^2$ -形式」とそのスキーム

簡単のため一次元方程式を対象に説明する。

圧縮性流体に対する一次元非定常ナビエ・ストークス方程式は、保存形表示で次のように表される：

$$\partial_t q + \partial_x F - \frac{1}{Re} \partial_x F_v = 0, \quad (2)$$

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e+p) \end{bmatrix}, F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \\ f \end{bmatrix}. \quad (3)$$

ここに、 $\rho$ 、 $u$  および  $e$  は、それぞれ密度、速度および全エネルギーであり、 $Re$  はレイノルズ数である。 $\tau$  はせん断応力、 $f$  は粘性による仕事をそれぞれ表す。圧力  $p$  は、 $\gamma$  を非熱比として次式により表される。

$$p = (\gamma - 1)(e - \rho u^2/2). \quad (4)$$

なお、流束  $F$  及び  $F_v$  のヤコビアン行列をそれぞれ  $A$  及び  $M$  とする：

$$A = \partial F / \partial q, M = \partial F_v / \partial q. \quad (5)$$

本論文は非定常流に対する高精度のスキームを提案しようとするものであるから時間精度は時間ステップ幅  $\Delta t$  について二次精度を前提に以下の全ての議論を行う。

準備として、一般形式の時間3-レベルの離散近似式を示す。時刻  $t = t^n$  以前の状態は、既知とし、時間  $\Delta t$  後の時刻  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  における未知量を  $q^{n+1} (= q(t^{n+1}))$  とする。このとき、(2)式に対する離散近似式は、 $\phi$ 、 $\theta$  及び  $\varphi$  をパラメータとして、次のように表される。

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ (1 + \phi) q^{n+1} - (1 + 2\phi) q^n + \phi q^{n-1} \right]$$

$$= \theta L(q^{n+1}) + (1-\theta)L(q^n) + \varphi L(q^{n-1}),$$

$$(6)$$

( $\varphi = \theta - \frac{1}{2}(1+2\phi)$ : 時間2次精度)  
ここに

$$L(q^n) = - \left[ D_x F^n - \frac{1}{Re} D_x' F_v^n \right] \quad (7)$$

$$F^n = F(q^n), F_v^n = F_v(q^n) \quad (8)$$

$D_x$  および  $D_x'$  は、離散近似オペレータである。すなわち、有限差分法の場合は差分オペレータ、有限体積法の場合はセルへの流束 (flux) の出入りに対応するオペレータを示すものとする。

(2) 式に対する「 $\delta^2$ -形式」のスキーム「 $\delta^2$ -コレクションスキーム」は、時間2次精度 ( $\varphi = 0$ ;  $\phi = 1/2$ ,  $\theta = 1$  または  $\phi = 0$ ,  $\theta = 1/2$ ) の前提のもとに、次のように構成される。

まず  $t = t^{n+1}$  に於ける量の時間一次精度またはそれ以上の精度の推定値を  $q^{n+1<0>}$  とする。例えば、一次精度線形外挿

$$q^{n+1<0>} = q^n + (q^n - q^{n-1}). \quad (9)$$

次に新しい未知量  $\delta^2 q$  を次のように定義する：

$$q^{n+1} = q^{n+1<0>} + \delta^2 q. \quad (10)$$

ここで導入された未知数： $\delta^2 q$  は、 $O(\Delta t^2)$  であることに注意されたい。

(10) 式を(6)式に代入する。非線形項は、次式

$$F^{n+1} = F^{n+1<0>} + A^{n+1<0>} \delta^2 q, \quad (11)$$

$$F_v^{n+1} = F_v^{n+1<0>} + M^{n+1<0>} \delta^2 q, \quad (12)$$

により線形化されるが、精度評価より  $\delta^2 q$  が  $O(\Delta t^2)$  であるからより一般的に  $O(1)$  のパラメータ  $\sigma_c$ ,  $\sigma_D$  を導入して

$$F^{n+1} = F^{n+1<0>} + \sigma_c A^{n+1<0>} \delta^2 q, \quad (11')$$

$$F_v^{n+1} = F_v^{n+1<0>} + \sigma_D M^{n+1<0>} \delta^2 q, \quad (12')$$

としても時間2次精度の定式化においては許される。パラメータ  $\sigma$  についての詳細は、文献<sup>4)</sup>を参照されたい。未知量を左辺側に整頓すると、次式を得る。

$$\left[ \frac{1+\phi}{\Delta t} + \theta \left\{ \sigma_c D_x A^{n+1<0>} - \sigma_D \frac{1}{Re} D_x' M^{n+1<0>} \right\} \right] \delta^2 q$$

$$= - \left[ \frac{1}{\Delta t} \left\{ (1+\phi) q^{n+1<0>} - (1+2\phi) q^n + \phi q^{n-1} \right\} + \left\{ \theta (D_x F - \frac{1}{Re} D_x' F_v)^{n+1<0>} + (1-\theta) (D_x F - \frac{1}{Re} D_x' F_v)^n \right\} \right]. \quad (13)$$

ここに、

$$F^{n+1<0>} = F(q^{n+1<0>}),$$

$$F_v^{n+1<0>} = F_v(q^{n+1<0>}),$$

$$A^{n+1<0>} = A(q^{n+1<0>}),$$

$$M^{n+1<0>} = M(q^{n+1<0>}), \quad (14)$$

$$q^{n+1} = q^{n+1<0>} + \delta^2 q. \quad (15)$$

ここで、(13)式の右辺は、時刻  $t = t^n + \theta \Delta t$  に於ける非定常ナビエ・ストークス方程式そのものの離散近似形であるから、形式的に次式のように表すことも可能である：

$$\left[ \frac{1+\phi}{\Delta t} + \theta \left\{ \sigma_c D_x A^{n+1<0>} - \sigma_D \frac{1}{Re} D_x' M^{n+1<0>} \right\} \right] \delta^2 q$$

$$= - \left[ \partial_t q + \partial_x F - \frac{1}{Re} \partial_x F_v \right]^{n+\theta} \quad (16)$$

(13)式または(16)式が、「 $\delta^2$ -形式」で表わされたナビエ・ストークス方程式に対する「 $\delta^2$ -コレクションスキーム」である。

ここで、(13)式で示される本スキームはその特別な場合として、有名な Beam - Warming 法をサブセットに含むことに注意されたい。すなわちその特殊な場合として、 $\sigma_c, \sigma_D = 1$  とおき、各ステップの初期推定値  $q^{n+1<0>}$  として零次オーダーのもの ( $q^{n+1<0>} = q^n$ ) を使用し、 $\delta^2 q$  を  $\delta q$  と解釈するとき(10)~(13)式は Beam - Warming 法に一致する。

さて、(13)式で表されるスキームは、時間2次精度を持ち空間精度は、オペレータ  $D_x$  の精度を持っている。しかしながら、一般的に言って、流れの特性時間が場所によって、又方程式によって極端に異なる、いわゆる "stiff" な系の場合、単一ステップのみからなるアルゴリズムのスキームは、数式上は、時間2次精度であってもその実質精度が落ちることがある。例えば多次元に対する近似因子分解誤差による実質精度の低下があげられる。これを避けるために(13)式を反復型のスキームにする。

(13)式により求められた  $q^{n+1}$  を改めて、 $q^{n+1<0>}$  として再度計算するのである。これを(13)式の右辺の残差が十分小さくなるまで反復する。いま  $\nu$  を反復回数を示すインデックスとすると次に示す反復法型のスキームが本論文にて提案する「 $\delta^2$ -コレクションスキーム」の最終形である。

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1+\phi}{\Delta t} + \theta \left\{ \sigma_c D_x A - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sigma_D \frac{1}{Re} D_x' M \right\}^{n+1<\nu>} \right] \delta^2 q^{<\nu>} \\ & = - \left[ \frac{1}{\Delta t} \left\{ (1+\phi) q^{n+1<\nu>} \right. \right. \\ & \left. \left. - (1+2\phi) q^n + \phi q^{n-1} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ \theta \left( D_x F - \frac{1}{Re} D_x' F_v \right)^{n+1<\nu>} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$+ (1-\theta) \left( D_x F - \frac{1}{Re} D_x' F_v \right)^n \left. \right] \quad (17)$$

または、右辺を形式的に表すと、

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1+\phi}{\Delta t} + \theta \left\{ \sigma_c D_x A - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sigma_D \frac{1}{Re} D_x' M \right\}^{n+1<\nu>} \right] \delta^2 q^{<\nu>} \\ & = - \left[ \partial_t q + \partial_x F - \frac{1}{Re} \partial_x F_v \right]^{n+\theta<\nu>} \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、

$$F^{n+1<\nu>} = F(q^{n+1<\nu>}), \text{ etc.} \quad (19)$$

$$q^{n+1<\nu+1>} = q^{n+1<\nu>} + \delta^2 q^{<\nu>}. \quad (20)$$

ただし

$$q^{n+1<0>} = q^n + (q^n - q^{n-1})$$

前述のとおり  $\sigma_c$  及び  $\sigma_D$  は、 $O(1)$  のパラメータ (通常、 $= 1 \sim 2$ , 分散が小さくなるように決めればよいであろう) で、 $\sigma$  の掛けられている項は、精度上は、安定化項に対応することより導入された<sup>4), 5)</sup>。なお、 $\sigma$  が1の時、上式は、ニュートン反復法と同等となる。残差 ((17)式の右辺) が、規定値より小さくなった時点で、求める

$$q^{n+1} = q^{n+1<\nu>}, \quad (21)$$

を得る。(17)式は、右辺を形式的に表現した(18)式からも明らかなように、もし残差が、十分に小さいとき非定常方程式の離散近似がその残差以下の誤差にて満たされていることを示す。このことから、「 $\delta^2$ -形式」が、非定常方程式の数値解法として、適するアルゴリズムであることがわかるであろう。

### 3. 左辺オペレータの簡略化

本章で、「 $\delta^2$ -形式」を「 $\delta$ -形式」と対比することにより同じ時間2次精度の前提のもとでは、「 $\delta^2$ -形式」は、左辺のオペレータにその近似形を使っても全体の精度が悪くならないこと、またそ

れによって計算効率を高めうることを示そう。簡単の為、 $(\theta = 1/2, \phi = 0)$  とする。

まず、(2) 式に対する「 $\delta$ -形式」のスキームは、次のように表わされる：

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \theta \Delta t (D_x A - D_x' M/Re) \right] \delta q \\ & = -\Delta t \left[ \partial_x F - \partial_x F_v / Re \right] \end{aligned} \quad (22)$$

(22) 式の各項に対するオーダー評価は、次のように表されるであろう：

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{\theta \Delta t (D_x A - D_x' M/Re)}{O(\Delta t)} \right] \underbrace{\delta q}_{O(\Delta t)} \\ & = \frac{-\Delta t \left[ \partial_x F - \partial_x F_v / Re \right]}{O(\Delta t)} \end{aligned} \quad (23)$$

このとき、時間2次精度を仮定すると、(23)式は、 $O(\Delta t^2)$  まで正しく評価する必要がある。したがって、左辺側のオペレータは、何等の近似も許されない。近似による空間精度の劣化は時間精度の劣化となる。例えば、効率化のための対角化<sup>2)</sup>を行うと、時間1次精度に落ちる。

一方、「 $\delta^2$ -形式」のスキームの各項のオーダーは、次のようになる：

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{\theta \Delta t (\sigma_c D_x A - \sigma_p D_x' M/Re)}{O(\Delta t)} \right] \underbrace{\delta^2 q}_{O(\Delta t^2)} \\ & = \frac{-\Delta t \left[ \partial_t q + \partial_x F - \partial_x F_v / Re \right]}{O(\Delta t)} \end{aligned} \quad (24)$$

同様に時間2次精度を仮定すると、(24)式は、 $O(\Delta t^2)$  まで正しく評価する必要がある。言い替えれば、(23)式は、 $O(\Delta t^2)$  まで正しく評価されていればよい。したがって、左辺の  $\Delta t D_x A \delta^2 q$  および  $\Delta t D_x (M/Re) \delta^2 q$  の項は、誤差項である。したがって、左辺のオペレータは、その近似形でもって代用しても精度は変わらない。安定性を考慮して決めればよい。例えば、対角化<sup>2)</sup>を行っても時間2次精度である。

実際にスキームを構成する場合この特徴を大いに利用して、すなわち、

$$A \sim A_{ap} \quad \text{及び} \quad M \sim M_{ap}$$

なる近似流束ヤコビアン  $A_{ap}$ ,  $M_{ap}$  を用いて、時間2次精度でかつ高効率と高安定性が得られるようにすることが可能である。とくに、粘性項については、この近似化は有効である。同様の理由によって(17)式の差分近似オペレータについても左辺側は右辺側の対応する項と同じオペレータである必要はない。右辺側は、高次精度のものを用いたとしても左辺側はブロック五重対角行列を避け、三重対角行列または二重対角行列となるようなオペレータを用いるのが効率の点から推薦されよう。

#### 4. 二次元ナビエ・ストークス方程式に対するスキーム

まず、カーテシアン系によって記述された方程式より始めよう。流体の運動を支配する二次元、圧縮性、非定常ナビエ・ストークス方程式は、カーテシアン系で記述すると次のようになる。

$$\partial_t q + \partial_x E + \partial_y F - \frac{1}{Re} \{ \partial_x E_v + \partial_x F_v \} = 0. \quad (25)$$

ここで、

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{bmatrix}, \quad E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ f_4 \end{bmatrix},$$

$$F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ g_4 \end{bmatrix},$$

$$p = (\gamma - 1) \left\{ e - \rho(u^2 + v^2)/2 \right\},$$

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu)u_x + \lambda v_y,$$

$$\tau_{xy} = \mu(u_y + v_x),$$

$$\tau_{yy} = (\lambda + 2\mu)v_y + \lambda u_x,$$

$$f_4 = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \frac{\mu}{p_r(\lambda-1)} \partial_x c^2,$$

$$g_4 = u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \frac{\mu}{p_r(\lambda-1)} \partial_y c^2,$$

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (26)$$

いま、流束  $E, F, E_v$ , および  $F_v$  のヤコビアンを  $A, B, M$ , および  $N$  とする:

$$A = \partial E / \partial q, \quad B = \partial F / \partial q,$$

$$M = \partial E_v / \partial q, \quad N = \partial F_v / \partial q \quad (27)$$

2章において1次元方程式を例に示したスキームの二次元への拡張を次に示す。記憶容量の節約とスーパーコンピュータでのベクトル化の観点から近似因子分解型を採用することにするとき、(25)式に対する「 $\delta^2$ -コレクションスキーム」は、次のようになる。

$$\left[ \frac{1+\phi}{\Delta t} + \theta \left\{ \sigma_c D_x A - \sigma_v \frac{1}{Re} D_x' M \right\}^{n+1\langle \nu \rangle} \right] \left[ 1 + \frac{\Delta t}{1+\phi} \theta \left\{ \sigma_c D_y B \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sigma_d \frac{1}{Re} D_y' N \right\}^{n+1\langle \nu \rangle} \right] \delta^2 q^{\langle \nu \rangle} = - \left[ \frac{1}{\Delta t} \left\{ (1+\phi) q^{n+1\langle \nu \rangle} - (1+2\phi) q^n + \phi q^{n-1} \right\} + \left[ \theta \left\{ D_x E + D_y F - \frac{1}{Re} (D_x' E_v + D_y' F_v) \right\}^{n+1\langle \nu \rangle} + (1-\theta) \left\{ D_x E + D_y F - \frac{1}{Re} (D_x' E_v + D_y' F_v) \right\}^n \right] \right] \quad (28)$$

(28)式の右辺は、非定常ナビエ・ストークス方程式(23)の、 $t=t^n + \theta \Delta t$  に於ける離散近似形であるから、形式的に次のように表すこともできる:

$$\left[ \frac{1+\phi}{\Delta t} + \theta \left\{ \sigma_c D_x A - \sigma_v \frac{1}{Re} D_x' M \right\}^{n+1\langle \nu \rangle} \right] \left[ 1 + \frac{\Delta t}{1+\phi} \theta \left\{ \sigma_c D_y B - \sigma_v \frac{1}{Re} D_y' N \right\}^{n+1\langle \nu \rangle} \right] \delta^2 q^{\langle \nu \rangle} = - \left[ \partial_t q + \partial_x E + \partial_y F - \frac{1}{Re} \left\{ \partial_x E_v + \partial_y F_v \right\} \right]^{n+\theta} \quad (29)$$

次に上述のスキームを一般曲線座標系へ拡張しよう。一般曲線座標  $(\xi, \eta)$  系に於ける定式化を、有限差分法および有限体積法、2通りの方法について示す。

#### 有限差分法

2次元ナビエ・ストークス方程式(25)を、一般曲線座標  $(\xi, \eta)$  系に変換しても、(25)式と類似の保存形に書き表わすことが可能である。

いま、一般曲線座標  $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$  と

すると支配方程式：(25)式は、 $(\xi, \eta)$  系上で次のように表される：

$$\begin{aligned} & \partial_t \hat{q} + \partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F} \\ & - \frac{1}{Re} \{ \partial_\xi \hat{E}_v + \partial_\eta \hat{F}_v \} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \hat{q} &= q / J, \\ \hat{E} &= y_\eta E - x_\eta F, \quad \hat{F} = -y_\xi E + x_\xi F \\ \hat{E}_v &= y_\eta E_v - x_\eta F_v, \quad \hat{F}_v = -y_\xi E_v + x_\xi F_v. \end{aligned} \quad (31)$$

ただし、 $J$  は座標変換のヤコビアンである。(30)式は、形式的には(25)式の  $x, y$  をそれぞれ  $\xi, \eta$  に置き換えたものと同一の形を持っているのでそれに対するスキームもカルテシアン系に対して示された式における  $x$  および  $y$  を、そのまま  $\xi$  および  $\eta$  に置き換えるだけであり、直観的であろう。したがって、(30)式にたいする  $\delta^2$ -コレクションスキームは次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1+\phi}{\Delta t} + \theta \{ \sigma_c D_\xi \hat{A} \right. \\ & \quad \left. - \sigma_D \frac{1}{Re} D_\xi' \hat{M} \}^{n+1\langle \nu \rangle} \right] \\ & \left[ 1 + \frac{\Delta t}{1+\phi} \theta \{ \sigma D_\eta \hat{B} \right. \\ & \quad \left. - \sigma_D \frac{1}{Re} D_\eta' \hat{N} \}^{n+1\langle \nu \rangle} \right] \delta^2 \hat{q}^{\langle \nu \rangle} \\ & = - \left[ \frac{1}{\Delta t} \{ (1+\phi) \hat{q}^{n+1\langle \nu \rangle} \right. \\ & \quad \left. - (1+2\phi) \hat{q}^n + \phi \hat{q}^{n-1} \} \right. \\ & \quad \left. + \left[ \theta \{ D_\xi \hat{E} + D_\eta \hat{F} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{Re} (D_\xi' \hat{E}_v + D_\eta' \hat{F}_v) \}^{n+1\langle \nu \rangle} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (1-\theta) \{ D_\xi \hat{E} + D_\eta \hat{F} \\ & \quad - \frac{1}{Re} (D_\xi' \hat{E}_v + D_\eta' \hat{F}_v) \}^n \Big]. \end{aligned} \quad (32)$$

ここで  $D_\xi, D_\eta, D_\xi', D_\eta'$  は、それぞれ  $\xi$  および  $\eta$  方向の微分に対する有限差分近似オペレータである。

有限差分法は、微分オペレータを有限差分オペレータで離散近似する方法であり、高精度化は容易である。なお、微分オペレータを有限差分オペレータで近似するのであるから原理的に滑らかに生成された格子に適する方法であるといえよう。

#### 有限体積法

生成された計算格子網の個々のセルについて、ナビエ・ストークス方程式に発散定理を適用し、積分方程式により離散化する方法で、コントロールボリューム法ともいう。

閉曲線  $C$  に囲まれた領域  $S$  について(25)式の体積積分（2次元の場合面積積分）をとると

$$\begin{aligned} & \int_S \partial_t q dv + \int_S \text{div} (E, F) dv \\ & - \int_S \text{div} \left( \frac{1}{Re} E_v, \frac{1}{Re} F_v \right) dv = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

発散定理により、(33)式は、次のように書き換えられる、

$$\begin{aligned} & \int_S \partial_t q dv + \int_C (E dy - F dx) \\ & - \int_C \frac{1}{Re} (E_v dy - F_v dx) = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

ここに、線積分は領域  $S$  の内側を左側に見ながら回る方向をとるものとした。いま、閉領域  $S$  として、生成された格子網の個々のセルをとり、その中心位置にインデックス  $(i, j)$  をつけて表す。また  $i+1/2, j+1/2$  は隣接セルとの境界を表す。ただし、 $i$  は  $\xi$  方向、 $j$  は  $\eta$  方向にそれぞれ対応する。

いま、簡単のため、 $L(q)$  を次式により定義する：



$$L(q) = \int_c (E dy - F dx) \tag{35}$$

$$- \int_c \frac{1}{Re} (E_v dy - F_v dx).$$

そしてその離散近似形をセルインデックス  $i, j$  を付けて次のように表すことにする。

$$L(q)_{i,j}^n = \sum_c (E \Delta y - F \Delta x)_{i,j}^n$$

$$- \sum_c \frac{1}{Re} (E_v \Delta y - F_v \Delta x)_{i,j}^n \tag{36}$$

ここで、

$$\sum_c ( )_{i,j} = ( )_{i+1/2,j} + ( )_{i,j+1/2}$$

$$- ( )_{i-1/2,j} - ( )_{i,j-1/2} \tag{37}$$

さらに、スキームの左辺側近似因子分解のために線積分路も次のように分離する：

$$\sum_c = \sum_{c_\xi} + \sum_{c_\eta} \tag{38}$$

ただし、

$$\sum_{c_\xi} = ( )_{i+1/2,j} - ( )_{i-1/2,j}$$

$$\sum_{c_\eta} = ( )_{i,j+1/2} - ( )_{i,j-1/2} \tag{39}$$

ここで、添え字  $\xi$  および  $\eta$  は、それぞれ  $\xi = \text{一定}$ ,  $\eta = \text{一定}$  に対応するセル境界の線要素に対応することを示す。

いま、セルの体積を  $V$  とすると

$$V = \int_s dv \tag{40a}$$

また、セルの物理量について、その代表値を

$$\bar{q} = \frac{1}{V} \int_s q dv \tag{40b}$$

で定義し、簡単のため単に ( ) をとって  $q$  と表わそう。このとき、(34)式に対する  $\delta^2$ -コレクションスキームは、時間微分を3-レベルの有限差分近似するとき、次のように表される。

$$\left[ \frac{1+\phi}{\Delta t} + \frac{\theta}{V} \sum_{c_\xi} \left\{ \sigma_c \tilde{A} - \sigma_D \frac{1}{Re} \tilde{M} \right\}^{n+1\langle \nu \rangle} \right]$$

$$\times \left[ 1 + \frac{\Delta t}{1+\phi} \frac{\theta}{V} \sum_{c_\eta} \left\{ \sigma_c \tilde{A} - \sigma_D \frac{1}{Re} \tilde{M} \right\}^{n+1\langle \nu \rangle} \right] \delta^2 q_{i,j}^{\langle \nu \rangle}$$

$$= - \left[ \frac{1}{\Delta t} \left\{ (1+\phi) q^{n+1\langle \nu \rangle} - (1+2\phi) q^n + \phi q^{n-1} \right\} + \frac{1}{V} \left\{ \theta L(q)^{n+1\langle \nu \rangle} + (1-\theta) L(q)^n \right\} \right]_{i,j}, \tag{41}$$

ここで、

$$\tilde{A} = A \Delta y - B \Delta x, \quad \tilde{M} = M \Delta y - N \Delta x. \tag{42}$$

ただし、

$$A = \frac{\partial E}{\partial q}, \quad B = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad M = \frac{\partial E_v}{\partial q}, \quad N = \frac{\partial F_v}{\partial q} \tag{43}$$

有限体積法においては、セル内の物理量の分布をどのように仮定し、セル境界における流束を如何にして評価するかが精度を決める上での第一要素で、格子の滑らかさは二次的な要素であるといえる。したがって、格子への依存度は有限差分法より低い。

### 6. 有限体積法による計算アルゴリズム

様々な流れ場への適用性を第一に考慮した場合、格子分布への依存性が低いことから帰結される柔軟性の高さより、本論文では、有限体積法による定式化を採用する。

本論文の目的は、「 $\delta^2$ -コレクションスキーム」を、非定常ナビエ・ストークス方程式に適用しその有効性を示すことにあるので、プログラムの容易さ及び計算所要 CPU 時間の短さの観点より、次に示す最も簡単な式によって流束を評価する。

以下、スキーム右辺側、左辺側の具体式に続いて境界条件の取扱いそして各時間ステップにおける初期推定値のフィルタリングについて述べる。

なお、有限体積法のコントロールボリューム  $S$  の

とりかたはいくつかあるが，ここでは格子線に囲まれるセルをそれとする．通常，セルセンター法 (Cell Centered Method) とよばれるものである．

陽的側 [(41)右辺側]： 次に示すような，セル境界の状態を，隣合う状態の算術平均によって評価し，安定化のための高次数値散逸を付加するものである．有限差分法の空間2次精度の中心差分に Jameson 型の2階および4階の非線形数値散逸<sup>2)</sup>を付加したものに相当する．

セル内の分布は一定とする：

$$q_{i,j} \leftarrow \frac{1}{V} \int_S q dv \quad (44)$$

流束の評価は，セル境界の状態は隣合うセルの平均とし，数値散逸を含む次の式にて評価する：

$$f_{i+1/2,j} = f \left( \frac{q_{i+1,j} + q_{i,j}}{2} \right) + D_{i+1/2,j} \quad (45a)$$

$$f_{i,j+1/2} = f \left( \frac{q_{i,j+1} + q_{i,j}}{2} \right) + D_{i,j+1/2} \quad (45b)$$

ここに， $f$  は，対流項および粘性項両方を合わせた流束ベクトルの個々の要素を示すものとする． $D$  は，次式で表される数値散逸である：

$$D_{i+1/2,j} = -\omega_{i+1/2,j} \sigma_{i+1/2,j} \left[ \omega_{i+1/2,j}^{(2)} \Delta q_{i,j} - \omega_{i+1/2,j}^{(4)} \Delta \nabla \Delta q_{i,j} \right], \quad (46)$$

ここに，

$$\epsilon_{i+1/2,j}^{(4)} = \text{maximum}(0, \kappa^{(4)} - \kappa_{i+1/2,j}^{(2)}) \quad (47a)$$

$$\epsilon_{i+1/2,j}^{(2)} = \kappa^{(2)} \text{maximum}(\pi_{i+1,j}, \pi_{i,j}, \pi_{i-1,j}), \quad (47b)$$

$$\pi_{i,j} = \frac{|\dot{p}_{i+1,j} - 2\dot{p}_{i,j} + \dot{p}_{i-1,j}|}{\dot{p}_{i+1,j} + 2\dot{p}_{i,j} + \dot{p}_{i-1,j}} \quad (47c)$$

$$\Delta q_{i,j} = q_{i+1,j} - q_{i,j},$$

$$\Delta q_{i,j} = q_{i,j} - q_{i-1,j}. \quad (48)$$

文献<sup>2)</sup>では， $\kappa^{(2)}=0.5$ ， $\kappa^{(4)}=0.02$ としているが，実際の計算では，次のように係数 $F^{(2)}$ および $F^{(4)}$ を掛けて，その大きさを調節する．

$$\kappa^{(2)} = F^{(2)} \cdot 0.5, \quad \kappa^{(4)} = F^{(4)} \cdot 0.02 \quad (49)$$

本論文にてとりあげた低レイノルズ数層流計算では， $F^{(2)}=0.1 \sim 0.2$ ， $F^{(4)}=0.2$ が適当であった．また， $\sigma$  は， $c$ を音速として，次に示すような対流項のヤコビアン行列の最大固有値である：

$$\sigma_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} (\sigma_{i+1,j} + \sigma_{i,j}) \quad (50a)$$

$$\sigma_{i,j} = \left[ |y_\eta u - x_\eta v| + c \sqrt{(x_\eta)^2 + (y_\eta)^2} \right]_{i,j} \quad (51b)$$

係数 $\omega$ は，

$$\omega_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} (M_{i+1,j} + M_{i,j}). \quad (52)$$

( $M$ ：局所マッハ数)

これは，境界層の中で数値散逸が効かないようにするために使われている． $D_{i,j+1/2}$ についても，上式を $j$ -方向に読み替えるだけで同様である．

陰的側 [(41)式左辺側]： 3章に於いて議論したように，陰的側における流束の評価は，必ずしも右辺側の方法と同じである必要は無い．ここでは，対流項に対しては，左辺側の評価方法と同様に取り扱うが，数値散逸については，ブロック五重対角行列を避けるために2階のみのものを用いる．

(41)式左辺の，例えば， $\xi(i)$ -方向について個々の項を示すと次のようになる：

$$\tilde{A}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} (\tilde{A}_{i+1,j} + \tilde{A}_{i,j}) + d_{i+1/2,j} \quad (53)$$

$$q_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} (q_{i+1,j} + q_{i,j}), \quad (54)$$

数値散逸項  $d$  は，

$$d_{i+1/2, j} = -F^{(2)'} \cdot \Delta \sigma_{i, j}. \quad (55)$$

ここに、 $\sigma$ は、対流項のヤコビアン行列の最大固有値で、(51b)式のものである。この数値散逸は、右辺側のそれとの対応とモノトニックスキーム (Monotonic scheme) の一次精度風上差分法と類似の形を持つものとして定めたものである。 $F^{(2)'}$ は、数値散逸の大きさを調節するための係数で、 $F^{(2)'} \approx F^{(2)}$ が選ばれる。

粘性項については、次の(56)～(60)式に示す近似形を使う。

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{i+1/2, j} &\rightarrow \tilde{M}_{ap_{i+1/2, j}} = \tilde{M}_{ap} (q_{i+1/2, j}) \\ \tilde{M}_{ap} &= M_{ap} \Delta y - N_{ap} \Delta x. \end{aligned} \quad (56)$$

ここで、左辺の粘性項の流束ヤコビアンに次の近似形を使った。

$$M_{ap} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_x' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x' \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$N_{ap} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_y' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_y' \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\lambda_x' = (\tau \mu / \rho \tau) \partial_x (1/\rho) \quad (59)$$

$$\lambda_y' = (\tau \mu / \rho \tau) \partial_y (1/\rho) \quad (60)$$

ここに、 $\lambda_x'$ および $\lambda_y'$ は、Pulliam<sup>2)</sup>に倣って最大固有値より小さくない値として、評価した式を使った。

境界条件： 境界条件は個々の問題に対応して決め

られる。ここでは、物体表面における境界条件の設定について述べよう。

セルセンター法では、物体境界と流束を評価するセル境界とが一致する。本方法において物体との境界面における流束(例えば $F_{i,1/2}$ 等)を評価しなければならない。物体表面に位置するのであるからそこで速度は、

$$u, v = 0, \quad (61)$$

である。速度の導関数 $u_x, u_y, v_x$ および $v_y$ は、格子網が、非直交の場合も考慮して次のようにして決められる。 $\eta$ ＝一定の格子線が、物体境界と一致すると仮定するとき、(61)式より速度の $\xi$ に関する微分は0である：

$$u_\xi = 0 = u_x x_\xi + u_y y_\xi \quad (62)$$

一方物体表面では $u = 0$ 、物体に接するセルの中心(または重心)では $u_1 (= u(\Delta\eta/2))$ とすると物体境界において $u$ をテーラー展開し、 $\Delta\eta$ の一次までとると

$$u_1 = 0 + \frac{1}{2} \Delta\eta u_\eta$$

すなわち

$$u_1 = \frac{1}{2} (u_x x_\eta + u_y y_\eta) \quad (63)$$

(62),(63)両式より物体表面上の $u_x$ および $u_y$ が決まる。 $v$ についても $u$ を $v$ に置き換えればよい。圧力 $p$ は、物体に接するセルにおいては境界層近似が成り立つと仮定すると $\kappa$ を物体の曲率、 $n$ を垂直方向の指標として

$$-\kappa u^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (64)$$

が成立する。物体境界より最初の $p$ の評価点(セル中心)まで台形則により積分して

$$\rho \kappa \frac{1}{2} u^2 \Delta n = p_i - p_{wall} \quad (65)$$

これより $p_i$ がわかっているとき物体面の圧力

$p_{wall}$  が求められる。密度  $\rho$  は、 $\partial\rho/\partial n = 0$  を仮定する。

初期推定値のフィルタリング： 初期推定値は、(9) 式に示すような簡単な線形外挿値を使っている。したがって、その過程に発生するノイズの除去またはその増大を減少させるために2階および4階のスージングをかけることが計算の安定上有用と考えられる。とくに高周波成分の除去のために4階のスージングは、有効である。フィルタリングに関する議論は別報<sup>6)</sup>に譲る。ここでは、次式をつかう：

$$\bar{q} = q^n + (q^n - q^{n-1}) \quad (66a)$$

$$q_{i,j}^{n+1<0>} = \bar{q}_{i,j} + \left\{ s^{(2)} \frac{1}{4} (\Delta\nabla_{(i)} + \Delta\nabla_{(j)}) \right.$$

$$\left. - s^{(4)} \frac{1}{16} (\Delta\nabla\Delta\nabla_{(i)} + \Delta\nabla\Delta\nabla_{(j)}) \right\} \bar{q}_{i,j} \quad (66b)$$

$$0 \leq s^{(2)} \leq 1, \quad 0 \leq s^{(4)} \leq 1, \quad s^{(2)} + s^{(4)} \leq 1. \quad (66c)$$

ここで、係数  $s^{(2)}$  および  $s^{(4)}$  は、(66c) 式を満たす任意定数で、ここでは  $s^{(2)} = 0.01$ ,  $s^{(4)} = 0.01$  とした。添え字  $(i)$  および  $(j)$  は、各々の演算子の作用する方向を示す。

## 8. 数値計算

衝撃波を伴う典型的な非定常粘性流の計算例として、衝撃波管流れを取り上げる。対象とするのは図1に示すような比較的短い衝撃波管で、隔膜は管中央に位置する。高圧側を隔膜の左側とし時刻  $t=0$  に於いて破膜する。形成された衝撃波が右管壁に衝突し反射、自身が作った境界層と衝撃波の干渉の流れ場の完全ナビエ・ストークス方程式によるシミュレーションを層流の仮定のもとで行なう。図1に形状及び初期静止状態を示す。図2は、用いた格子で、格子点数  $75 \times 25$ ,  $x$ -方向格子幅は、 $\Delta x = 4./74$  (一定),  $y$ -方向は、管底で最小格子幅

$\Delta y = 0.1 \times \Delta x \sim 0.005$  で、等比数列的に格子幅が拡大するように全格子25点が配置されている。スキーム右辺側に付加した Jameson 型の非線形散逸項は、できるだけ小さい方が好ましいので、係数パラメータは標準値<sup>2)</sup>の0.2倍を用い、更にそれに局所マッハ数を掛けて境界層内では特に小さくなるようにした。計算時のクラン数は、最大値約6で計算を実行した。スキーム右辺側の非定常方程式の残差が規定値以下になるまで反復処理を行った。本計算例では1~2の反復数であった。図3に、ある時刻の流れ場の計算結果を示す。物理的に妥当な流れ場が計算されている。

スキームに関して計算の実行過程で判明したことは、次の事項である。Jameson 型の人工散逸項は無視できない位の大きさを持っており、とくに境界層内においてはできるだけ小さくなるような処置が必要と思われる。元来この人工散逸は、オイラー方程式に対して提案されたものであるからナビエ・ストークス方程式に対して適用するときには、その大きさに注意を払うことは必要であろう。ここでは Jameson 他によって与えられたもとの係数に  $F^{(2)}$  および  $F^{(4)}$  なるファクターを掛けた上に更に境界層でより小さくなるように局所マッハ数を掛けて大きさを調整した。初期値のフィルタリングは、本質的というわけでは無いが初期推定値が線形外挿であるからケースによっては安定性を増すために有効な場合がある。但し、このフィルタリングの係数が大きい場合には逆にそれによる誤差が  $q^{n+1<0>}$  に含まれてしまう。当然それは支配方程式を満たさないわけであるからスキーム右辺側の残差となり余分な1回分の内部反復を必要となる可能性がある。本例題の衝撃波管のケースでは  $s^{(2)}$ ,  $s^{(4)}$  ともに同一値0.01とした。一般的に言えば  $s^{(2)}$  は  $s^{(4)}$  より十分に小さい方が物理的な粘性効果を正しく評価する意味から望ましいと言える。

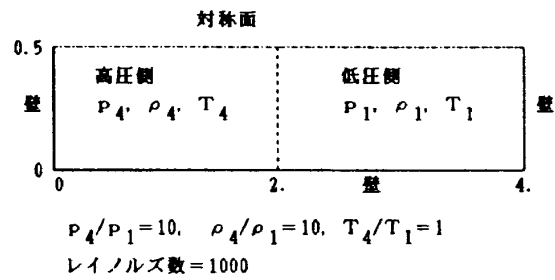


図1. 短い衝撃波管問題

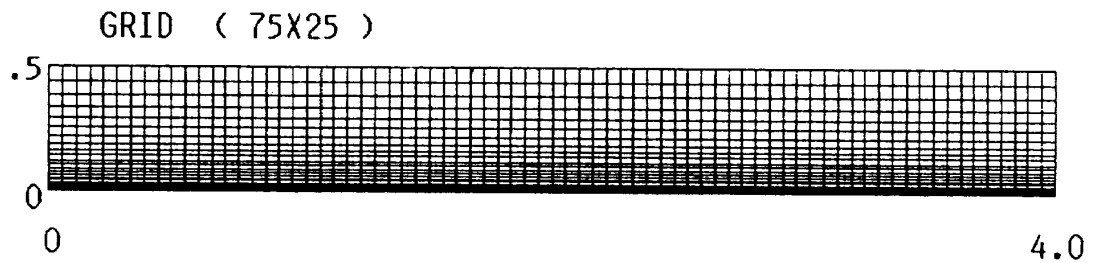


図2. 計算格子

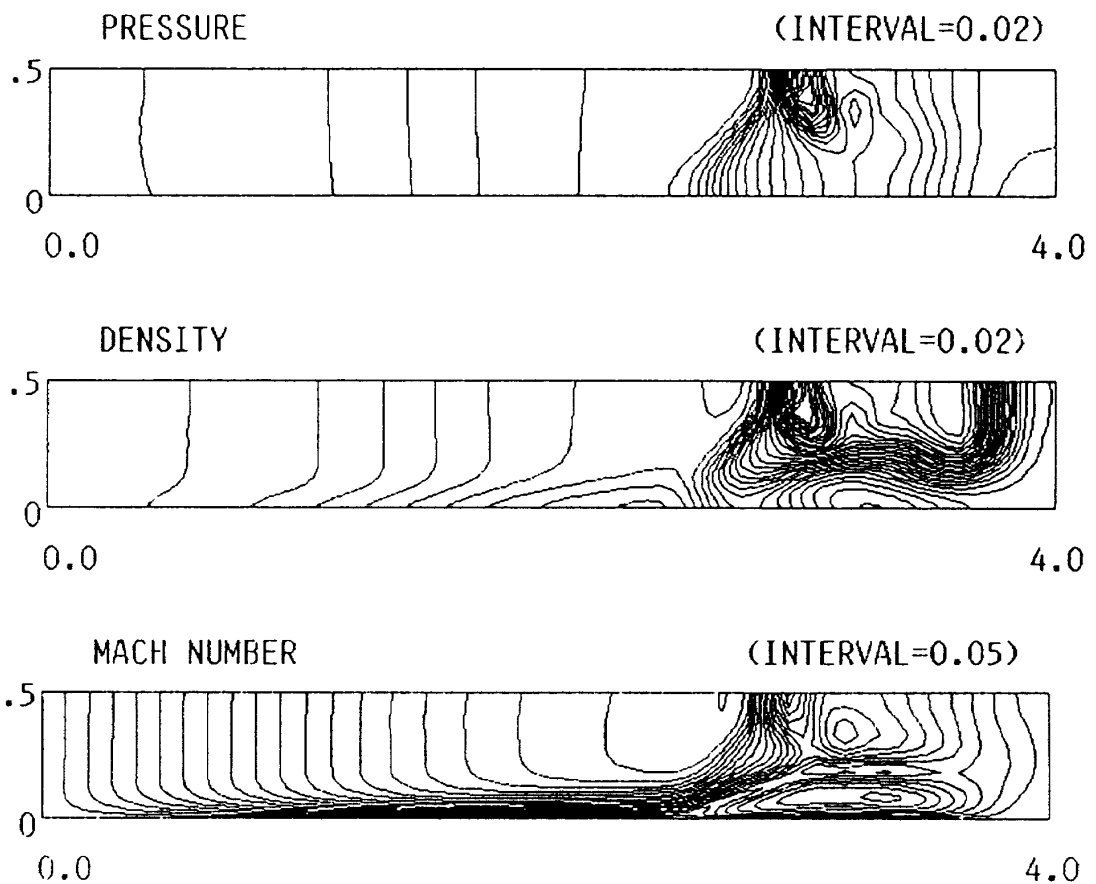


図3. 管右端で反射した衝撃波と層流  
境界層の干渉流れ場：圧力，密度，局所マッハ数  
の等高線図

## 9. 結 論

非定常ナビエ・ストークス方程式を対象に「 $\delta^2$ -形式」およびそれに基づく「 $\delta^2$ -コレクションスキーム」を示した。定式化はオイラー方程式に対する場合の直接の拡張であるが、オペレータのオーダー評価より左辺側のオペレータをその近似形で代用しても時間2次精度が維持されることを示し、より効率的なスキームを構成した。

簡単な数値実験の結果、本スキームは非定常ナビエ・ストークス方程式にも適用可能であることが示された。

## 参考文献

- 1) MacCormack, R.W. ; A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow, AIAA J., Vol.20, No.9, (1982), pp.1275-1281., also, AIAA-81-0110 (1981)
- 2) Pullium, T. : Artificial Dissipation Models for the Euler Equations, AIAA-85-0438, (1985)
- 3) Obayashi, S., Matsushima, S., Fujii, K. and Kuwahara, K.; Improvements in Efficiency and Reliability for Navier-Stokes Computations Using the LU-ADI Factorization Algorithm, AIAA-86-338, (1986)
- 4) 松野謙一：非定常オイラー方程式に対する $\delta^2$ -コレクションスキーム，日本航空宇宙学会誌，Vol.36, No.409, (1988) pp.44-49.
- 5) Matsuno, K. : An Implicit, High Order Accurate, Upwind Scheme for Unsteady Euler Equations., Theoretical and Applied Mechanics, Vol.37 (1988), (印刷中)
- 6) Matsuno, K. , Model Studies on Time Accurate Scheme of " $\delta^2$ -form", (準備中)

---

## 航空宇宙技術研究所報告1006号

昭和63年12月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 有限会社清光社印刷所  
東京都調布市西つつじヶ丘1-5-15

---

**Printed in Japan**