

ISSN 0389-4010

UDC 532.2.22

532.5

629.78

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1095

タンク内液体の大変形時での減衰の評価

小松 敬治 ・ 清水 順一郎

1991年2月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

タンク内液体の大変形時での減衰の評価*

小松 敬治*¹ 清水 順一郎*²

Theoretical Estimation of the Viscous Damping from Liquid Transient Motion in Tanks*

Keiji KOMATSU*¹, and Jyun-ichirou SHIMIZU*²

ABSTRACT

The dynamic behavior of liquid propellants in launch vehicles and spacecraft has been of great importance in past current generation vehicle designs.

A method to theoretically estimate the viscous dissipative force from liquid propellants transient motion in tanks is present. The estimation algorithm is combined into the LAMPS (Large AMPLitude Sloshing) algorithm, where the dissipative values have been approximated from test data.

Analytical predictions show excellent correlation with existing test results.

Keywords: Damping, liquid, spacecraft, sloshing, propellant

概 要

自由表面をもつタンク内液体の運動解析の手法として液体重心の動きを追うアルゴリズム LAMPS がある。そのオリジナルプログラムにおいては液体の減衰は実験値から入力されるため、予測計算に使うには汎用性に欠けていた。本報告ではこのアルゴリズムの欠点であった減衰力の入力について、減衰を理論的に導き、その実用性を既存の試験結果により確認した。

1. ま え が き

宇宙機タンク内の液体の動的挙動を知ることは制御系の設計、飛行解析、推進系の設計において重要である^{1,2)}。自由表面をもつ液体の大変形解析法としては差分法や有限要素法があり、これらの連続体解法はそれなりに有用であるが、初期設計段階やパラメータスタディ、それに機体の運動との連成解析にはもっと簡単なモデルの存在価値

がある。LAMPS^{3,4)}はこのような目的に対して開発されたアルゴリズムで、液体の重心の動きだけを追うため、数値計算が簡単で安定性がある。また、計算結果から得られる液体の運動による力は多くの場合、実際を過大評価することとなり安全側の設計になる。しかし、そのオリジナルプログラムにおいては液体の減衰は実験値から入力され、数値シミュレーションの道具としては汎用性に欠けている。本報では、このアルゴリズムの欠

* 平成2年12月12日受付(received 12 December 1990)

*1 構造力学部(Structural Mechanics Division)

*2 宇宙開発事業団, 筑波宇宙センター(Tsukuba Space Center, National Space Development Agency)

点であった減衰力の入力について、減衰を理論的に導き、その実用性を既存の試験結果により確認したので報告する。

2. LAMPS のアルゴリズム

本節ではBerryにより開発されたLAMPS (Large AMplitude Slosh) のアルゴリズム^{3,4)}について簡単に説明する。この方法の考え方を述べれば以下のようなになる。

- タンクは3次元であるが内部液体の運動は2次元運動とする。
- 液体は全質量を重心に集めて質点として扱う。それゆえ、水位は低いほうが良い。
- その質点の運動軌跡は1g下でタンクを回転して得られる液体重心の軌道である。
- ゆえに、低重力でも液体の自由表面は平面と仮定される。ただし、タンク内液体のグローバルな運動に関してはいくら微小重力場でもボンド数は1に比べて十分大きい数値となるから、この仮定は多くの場合妥当である。
- 軌道の曲率計算のため、軌跡は部分的に楕円近似される。

液体の重心軌跡の計算は数値計算で行う。重心軌跡が解ればあとは質点系の力学の問題である。図1に重心軌跡での力の釣り合いを示す。結果は接線方向加速度

$$\dot{V}_T = -\frac{f}{M_F} - A_y \cos \beta - A_z \sin \beta \quad (1)$$

偏角の角速度

$$\dot{\beta} = \frac{V_T}{r} \quad (2)$$

Y方向の力

$$FY_T = f \cos \beta + \lambda e_{Ny} - A_y M_s \quad (3)$$

Z方向の力

$$FZ_T = f \sin \beta + \lambda e_{Nz} - A_z M_s \quad (4)$$

回転モーメント

$$MZ = (f \sin \beta + \lambda e_{Nz})y - (f \cos \beta + \lambda e_{Ny})z \quad (5)$$

拘束力

$$\lambda = M_F c_e \left(\frac{V_T^2}{r} \right) - M_F (\vec{A} \cdot \vec{e}_N) \quad (6)$$

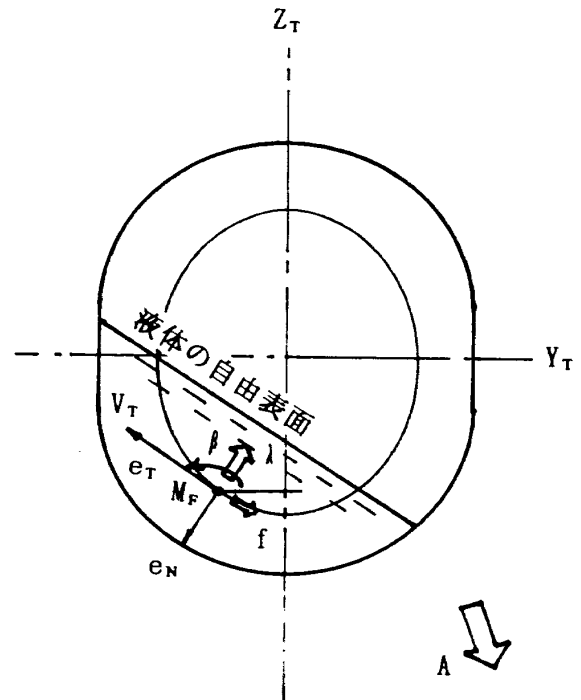


図1 液体重心の軌跡

摩擦力

$$f = \text{減衰力 (3章に示す)} \quad (7)$$

となる。ここにドットは時間 t に関する微分を表わし、

A_y, A_z : 加速度 A の y, z 方向成分

M_F : 液体の全質量

M_s : タンクの質量

r : 軌跡の曲率

c_e : 液体の有効質量係数

e_N, e_T : それぞれ軌跡上の点の単位法線ベクトル, 単位接線ベクトル

である。有効質量係数はタンク壁面に分散してかかる液体の遠心力ベクトルを加算して液体重心を通る一つのベクトルに置き換えることによって得られるもので、液体が少なければ1に近く、満水に近いと0になる。具体的な数値は経験的に得られ、文献4)のFig.M-9に与えられる。この値は液体のタンクに及ぼす力に影響を与えるが、液体重心の運動自体には影響しない。

これらの式(1)~(7)をルンゲ-クッタ法による時間差分で解く。重心軌道は既知なので Y_T 軸からの偏角 β から重心位置が決定される。

3. 減衰の評価

3.1 オリジナルの減衰入力

液体の粘性による減衰力 f (式(7)) については初期のプログラム³⁾では

$$f = \mu_1 |\dot{x}| + \eta |V_T| \quad (8)$$

と仮定している。係数 μ_1 , η は実験によりだいたいの値を決めるが、文献³⁾での落下塔での実験の場合、 μ_1 は 0 で η は 0.01 程度である。後に減衰について修正が行われ⁴⁾、上式のかわりに

$$f = \mu_2 |\dot{\beta}| \quad (9)$$

と比例粘性減衰に単純化されている。ここで μ_2 の値には 0.00002 程度が推奨されている。いずれにしてもこれらの値は試験結果に合うようにパラメータスタディのあとで決められたものであり、この値に理論的根拠がなく、他の形状のタンクはいうまでもなく、単位系を変えただけでどういう数値を採用すべきか困ることになる。

このような欠点を無くすため、本報では以下のように理論的に減衰を導入する。計算にあたっては液体の内部減衰は無視し、液体とタンク壁面とのすべりによる減衰のみを考える。3.2 節ではタンク壁面を平板として、3.3 節では球形タンクとして減衰の導出を行い、その両者の値はオーダー的に等しいことを示す。

3.2 タンク壁面を平板とした扱い

理論的な取り扱いを行うため水位が低いことを考慮してタンク壁を平板と仮定すると、面内に平行に角振動数 ω で速度振幅 U の単振動を行っている無限遠の板に働くせん断応力 τ は

$$\tau = -\rho U \omega \sqrt{\omega \nu} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (10)$$

と与えられる⁵⁾。ここに ρ は液体の密度、 ν は液体の動粘性係数である。面積 S で 1 周期 T 当たりの粘性による仕事量 W は

$$W = \frac{1}{2} \rho U^2 S \sqrt{\frac{\omega \nu}{2}} T \quad (11)$$

となる。一方、 m , k , c を質量、剛性、減衰とした 1 自由度系

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (12)$$

での減衰による仕事は

$$W = \frac{1}{2} c U^2 T \quad (13)$$

であるので、式(11)と式(13)を比べて

$$c = \rho S \sqrt{\frac{\omega \nu}{2}} \quad (14)$$

となる。無次元化のため減衰比 ζ を導入すると液体の全質量を M_F として

$$\zeta = \frac{c}{2M_F\omega} = \frac{\rho S \delta}{4M_F} \quad (15)$$

となる。ここに δ は

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (16)$$

と境界層の厚さとして定義できる。

さて、接触面積はタンク形状、水位、時間によって変わるが、表面積対体積 S/M_F の値が最も小さいのは球形タンクで、さらに都合のよいことに球については体積と接触面積の比が陽な線形式で与えられる。半径が R 、水位が H で充填率 V_f のとき

$$\frac{\rho S}{M_F} = \frac{3}{2} \frac{H}{R} \frac{1}{RV_f} \quad (17)$$

であるのでこれを式(15)に代入して

$$\zeta = \frac{3}{8} \frac{1}{V_f} \frac{H}{R} \frac{\delta}{R} \quad (18)$$

を得る。

3.3 球形タンクとしての評価

前節ではタンク壁面を平板としてナビエ・ストークス方程式の解を用いた。この他、振動流場で、タンク内液体問題に適用できそうで、解析解の求まっている問題として一つの軸回りに振動回転する球形タンクがある。

球形タンクに完全に液体の入っている場合の液体の有効慣性モーメントと減衰力が Bauer⁶⁾ により解かれている。この結果を利用して等価粘性減衰比を求める。

図 2 のように球座標系を定義し、半径 R の球形タンクの内部液体についてストークス近似を行えば、 v を z 軸回り接線方向速度として

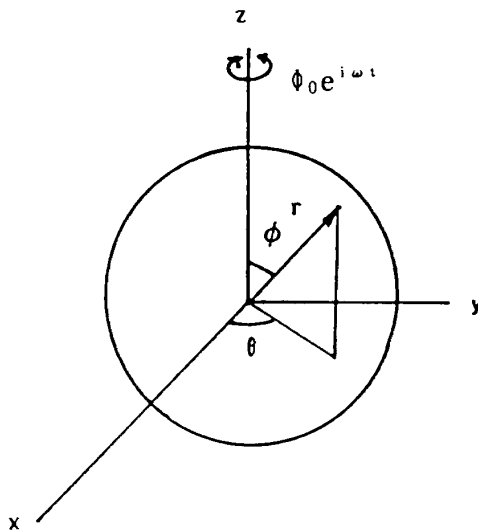


図2 球座標系

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} \right\} \quad (19)$$

と運動方程式が線形化される。この基礎式をタンク壁での境界条件

$$v = i\omega \Phi_0 e^{i\omega t} R \sin \theta \quad \text{at } r = R \quad (20)$$

で解けば

$$v = \frac{i\omega \Phi_0 R^{3/2} e^{i\omega t}}{\sqrt{r}} \frac{I_{3/2} \left(r \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)}{I_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)} \sin \theta \quad (21)$$

を得る。ここに Φ_0 は z 軸回りの片側振幅角度、 ω は角振動数で、 I は変形されたベッセル関数である。回転によるせん断応力 τ は

$$\tau = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \quad (22)$$

となる。これをタンク全表面で積分して重心回りの回転モーメントが

$$M = \frac{8}{3} \mu \pi R^3 i\omega \Phi_0 e^{i\omega t} \times \left\{ R \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \frac{I'_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)}{I_{3/2} \left(R \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)} - \frac{3}{2} \right\} \quad (23)$$

と得られる。ここに I' は変形されたベッセル関数

の変数による微分である。回転に関する運動方程式は、液体の有効慣性モーメントを I_f 、減衰係数を c_f として

$$I_f \ddot{\phi} + c_f \dot{\phi} = M \quad (24)$$

となる。ここに

$$I_f = \frac{1}{\Phi_0 e^{i\omega t}} \frac{1}{\omega^2} \text{Re}(M) \quad (25)$$

$$c_f = \frac{1}{\Phi_0 e^{i\omega t}} \frac{1}{\omega} \text{Im}(M) \quad (26)$$

である。以上が Bauer によって得られた結果である。

式(24)をもとに等価粘性減衰比 ζ を求めると

$$\zeta = \frac{c_f}{2\omega I_f} = \frac{3}{8} \frac{5c_1}{\pi c_2} \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \quad (27)$$

となる。ここに c_1, c_2 は

$$c_1 = \frac{8\pi}{3} \frac{z_1}{N} \quad (28)$$

$$c_2 = \frac{5z}{N} \quad (29)$$

$$N = [\xi (\sinh \xi \sin \xi + \cosh \xi \cos \xi - \sin \xi \cosh \xi)^2 + [\xi (\cosh \xi \cos \xi - \sinh \xi \sin \xi) - \sinh \xi \cos \xi]^2]$$

$$Z_1 = \xi^2 \{ 2 \sinh \xi \cos \xi [\xi (\sinh \xi \sin \xi + \cosh \xi \cos \xi) - \sin \xi \cosh \xi] - 2 \sin \xi \cosh \xi [\xi (\cosh \xi \cos \xi - \sinh \xi \sin \xi) - \sinh \xi \cos \xi] \}$$

$$Z = \sinh \xi \cos \xi [\xi (\cosh \xi \cos \xi - \sinh \xi \sin \xi) - \sinh \xi \cos \xi] + \sin \xi \cosh \xi [\xi (\sinh \xi \sin \xi + \cosh \xi \cos \xi) - \sin \xi \cosh \xi]$$

$$\xi = \frac{R}{\delta}$$

と δ の関数として定義されるが、数値計算を行うと図3のようになり、近似的に

$$c_1 \approx 10 \left(\frac{R}{\delta} \right) \quad (30)$$

$$c_2 \approx 0.2 \sim 0.5 \quad (31)$$

となる。また、液体が水位 H だけ部分的に入っている場合の接触面積はタンクの全表面積の $(2\pi RH)/(4\pi R^2)$ 倍であるので、この補正を行って式(27)は

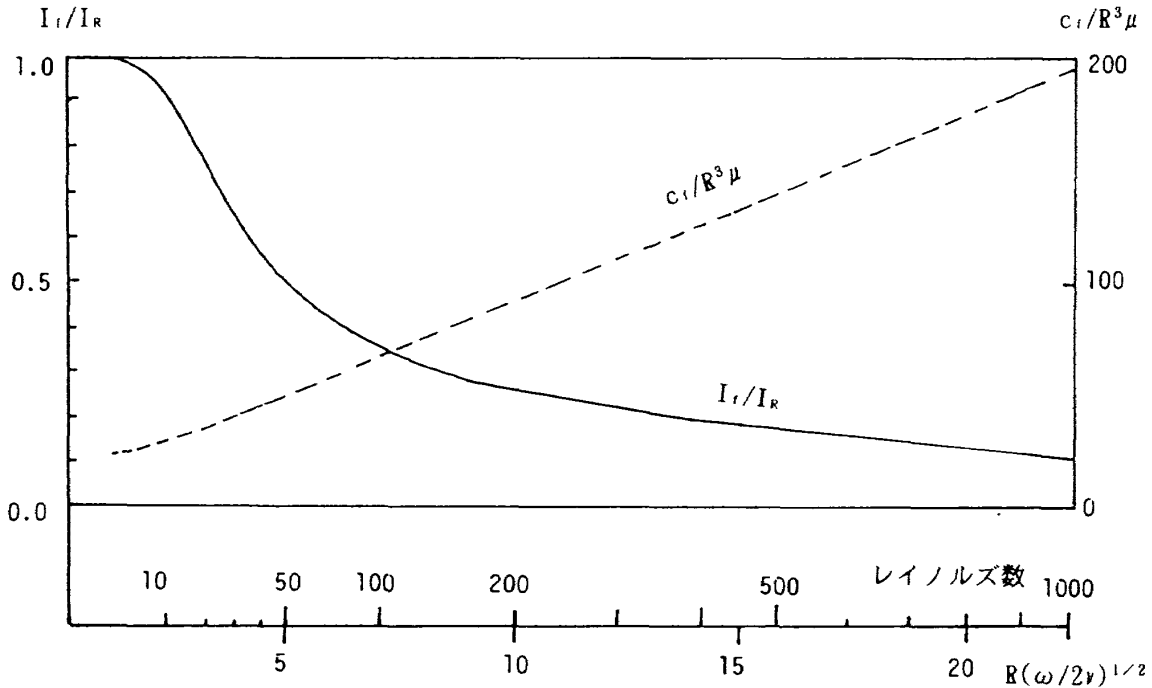


図3 球形タンク中の粘性液体の慣性モーメント I_f と減衰 c_f

$$\left(I_R = \frac{2}{5} \left(\frac{4}{3} \rho \pi R^3 \right) R^2 \right)$$

$$\zeta = (3/8) (16 \sim 40) \left(\frac{H}{R} \right) \left(\frac{\delta}{R} \right) \quad (32)$$

となる。よって ζ は平板として得られた結果の式(8)に比べ2倍から10倍程度大きくなるが、オーダーとしてはほぼ一致する。

3.3 他の要因による修正

前節までに2つのモデルにより減衰比が得られ、オーダーは一致した。本報告では平板によって得られた式(8)が、各導出の段階でより小さく減衰を見積もっているため、以下のように補正して使用することとする。

式(8)に導いた減衰は実際よりかなり小さい。式(10)は平板として得られた応力で、タンクのような曲面ではもっと大きいはずである。また、液体とタンクとの接触面積は遠心力と表面張力のため自由表面を平面と仮定した式(7)よりかなり大きくなる。さらに砕波などにより減衰は増加する。しかし、以上に述べた減衰は数値的に評価できないので、計算プログラムにおいてはこれらの影響を取り入れて式(7)の $2 \times (a/b)$ 倍の値を最終的に採用する。ここに a, b はそれぞれ液体の楕円重心軌道の

長径と短径である。倍数2は粘性減衰以外の減衰の補正で数値的な根拠はあいまいである。 (a/b) は S/M_f を球形タンクとして導いているので、球形タンクからのずれの補正である。結局、式(7)に対応するのは

$$f = 2 \left(\frac{a}{b} \right) c V_T \quad (33)$$

$$c = 2\omega M \zeta \quad (34)$$

$$\zeta = \frac{3}{8} \frac{H}{R} \frac{1}{RV_f} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (35)$$

となる。ここで ω には数値計算の便宜上、時々刻々の水位と加速度場での球形タンクの1次のスロッシングの固有角振動数¹⁾

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \left[\frac{1}{3} \frac{240 - 220\alpha + 72\alpha^2 - 9\alpha^3}{80 - 100\alpha + 44\alpha^2 - 9\alpha^3 + \alpha^4} \times \sin \left\{ \frac{\pi}{4} (2 - \alpha) \left(1 + \frac{\alpha}{3} \right) \right\} \right]^{1/2} \quad (36)$$

$$\alpha = \frac{H}{R}$$

を充てる。 ω はタンクの運動による加速度 $g(t)$ により時々刻々変化していくことになる。

液体重心の軌道計算も含めた全体のプログラム

リスト（言語は FORTRAN）は文献8）に記載してある。

4. 計算例

ここでは前章で導いた減衰力を付加した LAMPS のシミュレーション能力を検討するため既存の試験結果に対して数値計算を行った。併せて、代表的な差分コードである FLOW-3D によっても計算を行い、比較検討した。

4.1 スペースタグ模型実験

Martin Marietta 社の落下塔（Denver, 高さ23

m）で行われたスペースタグ模型の一連の実験⁴⁾の中から試験番号 I-13 と I-17 について計算を行った。液体はふっ化炭素溶液で試験番号 I-13 の場合、充填率 V_f は 25% で有効質量係数 c_e は 0.23 を与え、試験番号 I-17 の場合、 V_f は 50% で、 c_e には 14% を与えた。試験番号 I-17 ではタンクは 45° 傾けてある。タンクは自由落下するが横方向にわずかの加速度が与えられている。

試験結果と計算結果との比較を図4から図7までに示す。図4と図5とは液体の重心位置についての各時刻 t （単位：秒）での計算と試験との比較である。

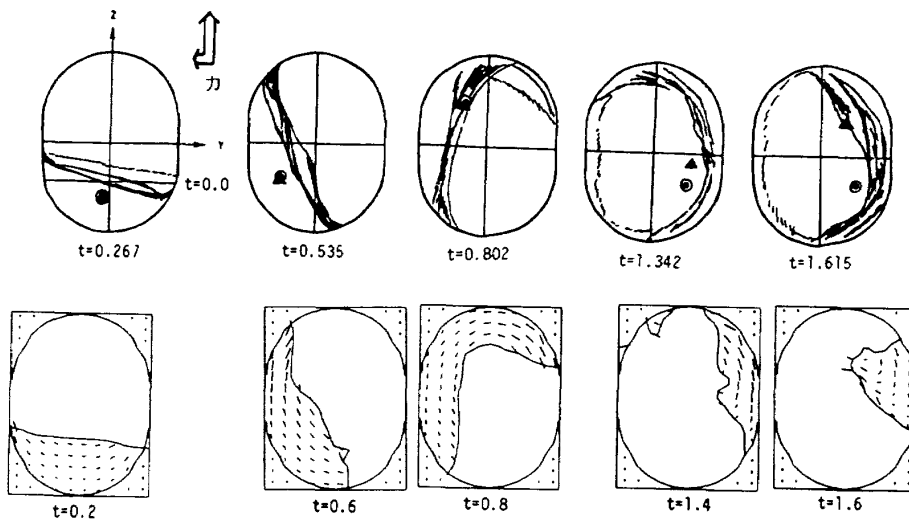


図4 試験番号 I-13 に関する試験と計算による液体表面と液体重心
 (▲：本方法による重心位置の計算結果，◎：文献4)での減衰を入力した計算結果，
 上段の絵は文献4)での試験のスケッチ，下段は差分法 FLOW-3D による計算結果)

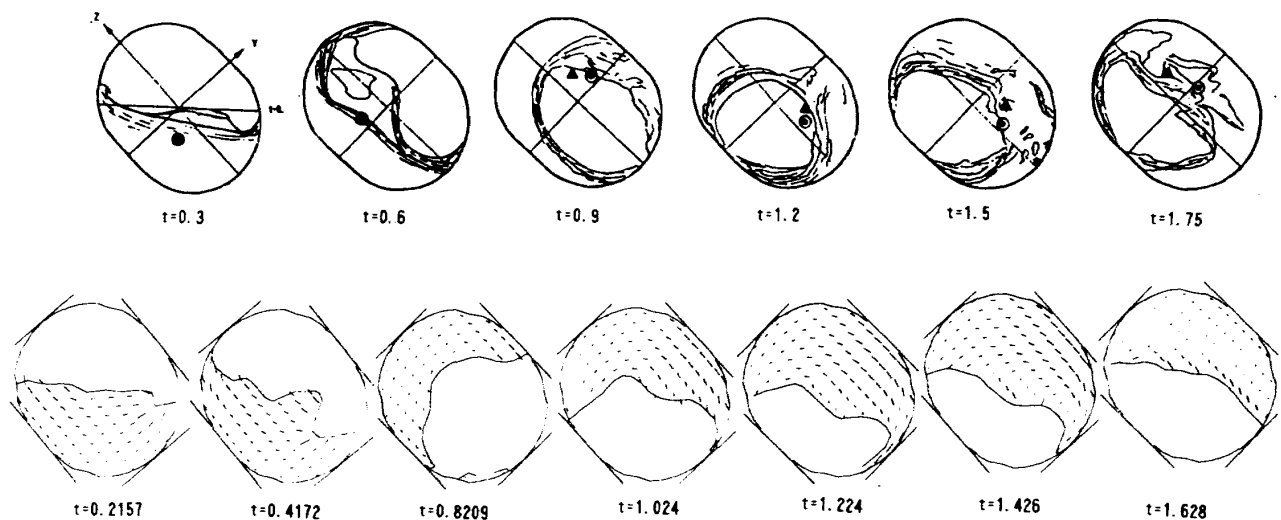


図5 試験番号 I-17 に関する試験と計算による液体表面と液体重心
 (▲：本方法による重心位置の計算結果，◎：文献4)での減衰を入力した計算結果，
 上段の絵は文献4)での試験のスケッチ，下段は差分法 FLOW-3D による計算結果)

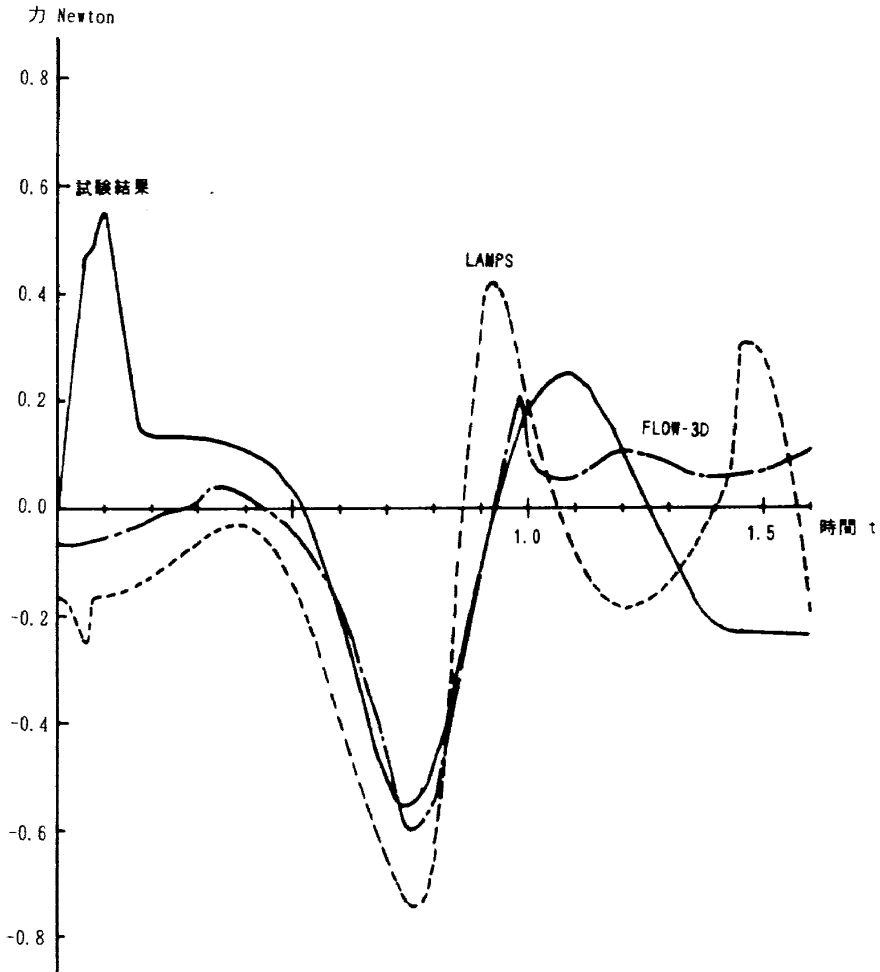


図 6(a) 試験番号 I-13 での液体による力 FY_T の試験結果と計算との比較

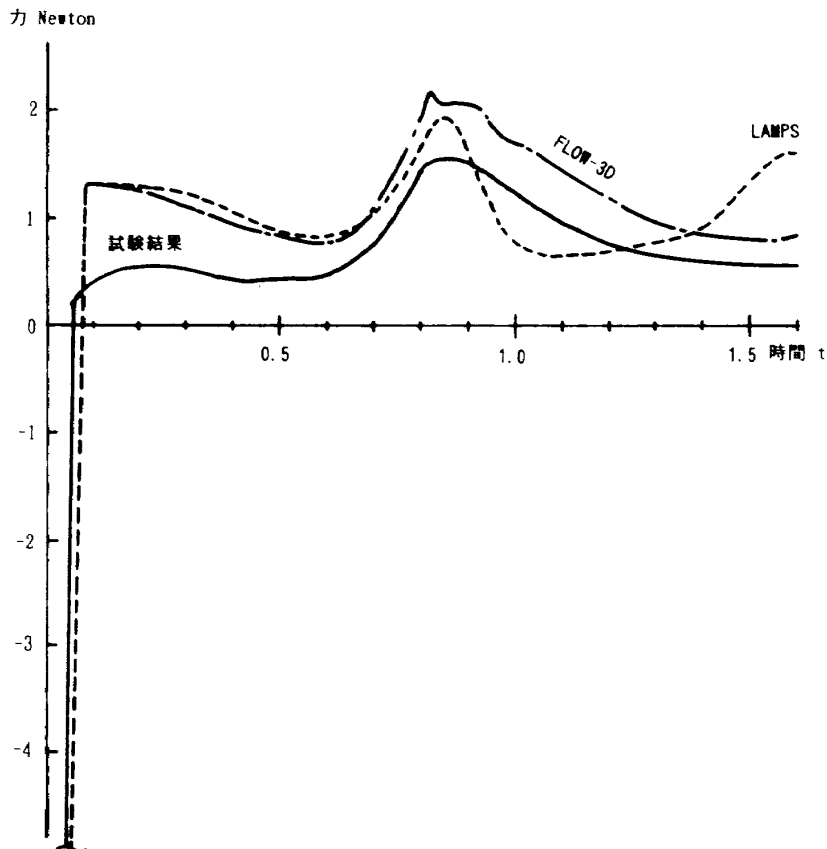


図 6(b) 試験番号 I-13 での液体による力 FZ_T の試験結果と計算との比較

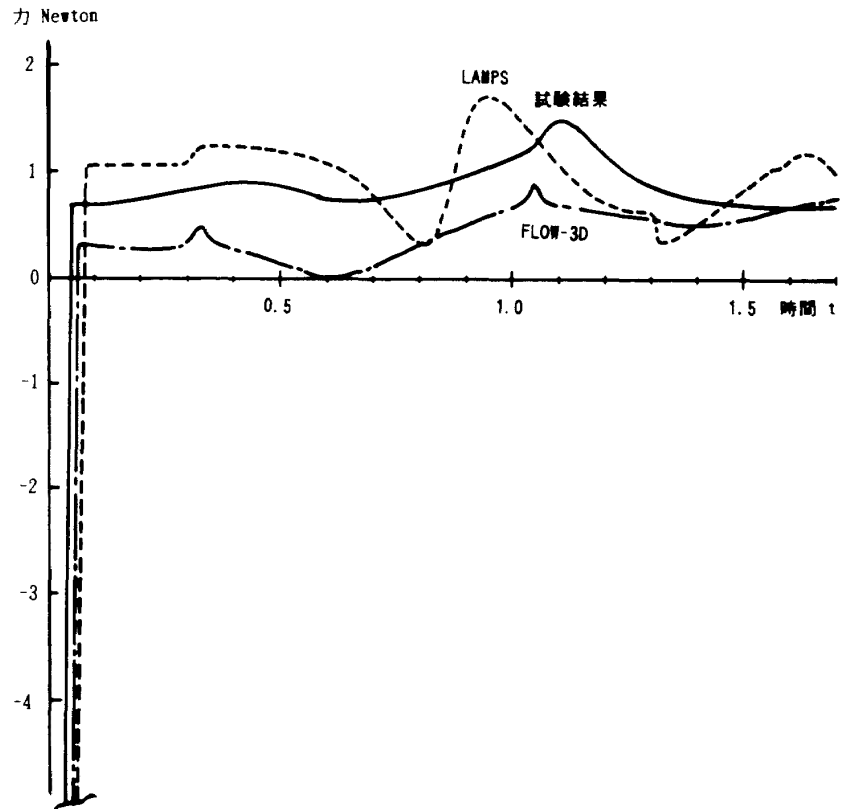


図7(a) 試験番号I-17での液体による力 F_{Y_T} の試験結果と計算との比較

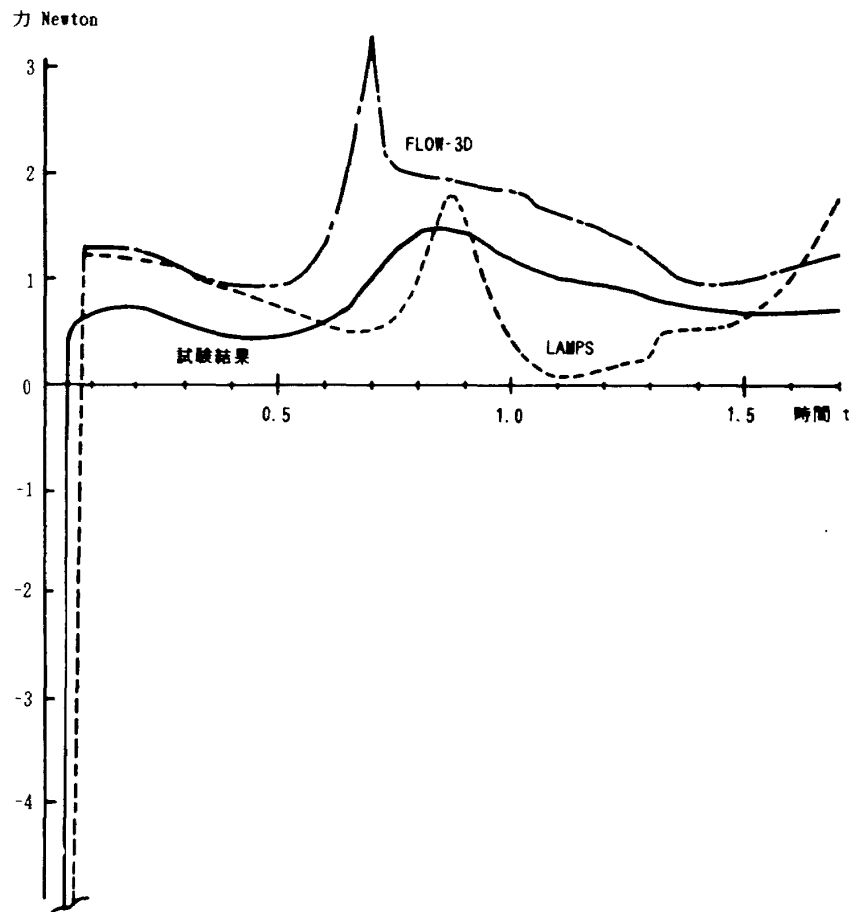


図7(b) 試験番号I-17での液体による力 F_{Z_T} の試験結果と計算との比較

液体の絵は試験映像からのスケッチ⁴⁾で、二重丸(◎)がオリジナル論文での減衰を入れたもので、試験結果を勘案してから改めて決められた減衰値である。この減衰の決め方は、重心位置で決められたのではなく、液体による力の絶対値と位相とを合わせるように決められているため、図4と図5での重心位置の一致度はそれほど良くはない。三角(▲)が3.3節で提案した減衰を入れたもので、試験結果を知らずに理論的に決定できる。重心位置の一致度は良好である。

また、参考として差分法(FLOW-3D, 差分メッシュ10×10×16)により計算した結果を図の下段に示す。FLOW-3Dによる計算結果はさすがに1.2秒くらいまでは試験結果と良くあっており、計算から得られる情報も多いが、オーバーシュートして平衡位置を中心にする振動になる時刻では自由表面形状が試験結果とは大きく異なってくる。重心位置に注目する限り、3.3節で提案した減衰を組み込んだLAMPSのアルゴリズムは実用的であることが判る。

次に図6と図7とに液体の運動によるタンクへの力 FY_T と FY_Z とを示す。実線が試験結果、点線が計算結果であり、ここでも参考としてFLOW-3Dによる計算結果を1点鎖線で示す。図より明らかなように、LAMPSによる結果には微妙に時間軸にずれのある部分もあるが、大胆なモデリングにより得られた結果としては実用上十分であ

り、FLOW-3Dによる結果と比べても遜色はない。

4.2 ETS-VのRCSタンクのスピナップ試験

本報告でのプログラムに拡張機能を加え、スピナも扱えるようにした(ただし、コリオリ力は考慮してない)ので、ETS-V(技術試験衛星V型)のRCS(Reaction Control System)タンクのスピナップ試験⁷⁾(図8)のシミュレーションをお

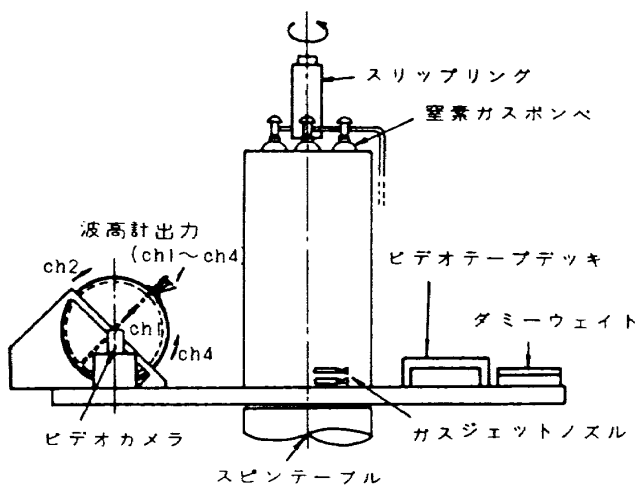


図8 ETS-Vのタンクのスピナップ試験のセッティング

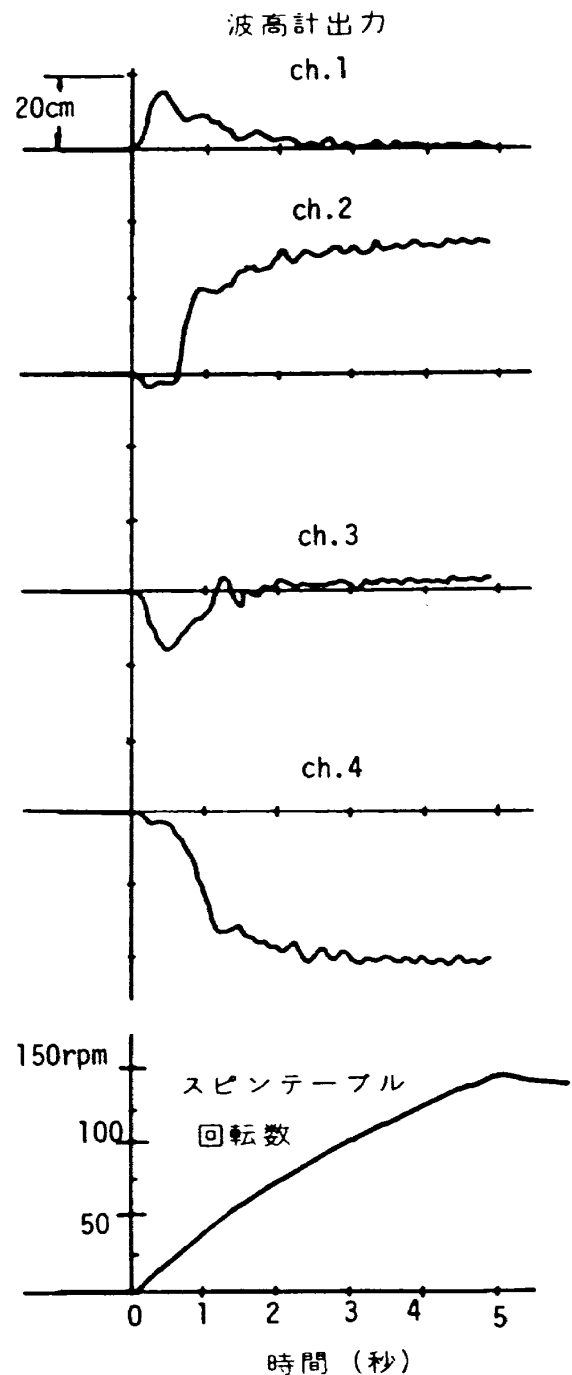


図9 充填率30%での波高計出力とスピナ回転数

こなう。RCS タンクはスピントーブルで 5 秒間で 150rpm までガスジェットで急速に回転をかけられる。このとき充填率 30% の球形タンク内の液体の波高計の計測出力を図 9 に、計算での液体重心のタンク中心からの回転角を図 10 に示す。波高計の取り付け位置は図 8 に示す通りで、ch.2 と ch.4 の出力が図 10 の計算に対応する。試験結果は波高計の出力であり、重心位置の計算結果との直接の比較はできないが、定性的に良く一致している。なお、この例題に関しては既に LAMPS と同等なモデリング手法⁷⁾で計算して試験結果を良くシミュレーションできることがわかっている。

5. あとがき

LAMPS のアルゴリズムに半理論的な減衰の導入を行った。落下試験やスピントーブル試験に適用し、重心位置ばかりか、液体によるタンクへの力の計算にも実用的な計算法となったことを確認した。

参 考 文 献

- 1) 小松敬治：宇宙における液体スロッシング，日本航空宇宙学会誌，34-392 (1986) pp.461-469.
- 2) 小松敬治，清水順一郎ほか：宇宙機における液体の動的挙動に関する研究，NAL-NASDA 共同研究成果報告書（第 1 報），(1989.1).
- 3) R. L. Berry and J. R. Tegart : Experimental Study of Transient Liquid Motion in Orbiting Spacecraft, NASA CR-144003 (1975).

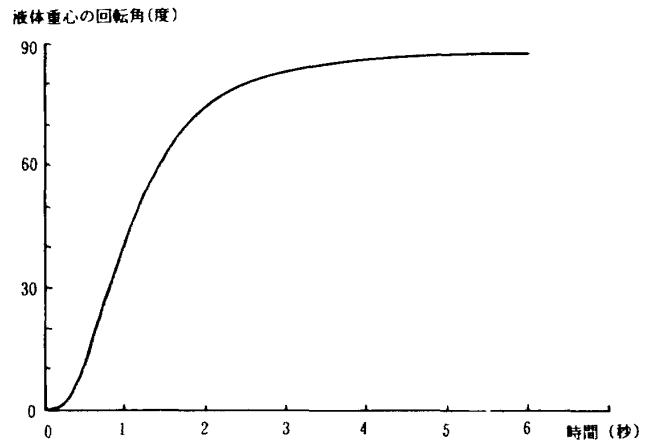


図 10 計算による液体重心の回転角
(図 9 の波高計 ch.2, ch.4 の出力に対応)

- 4) R. L. Berry and J. R. Tegart : Experimental Study of Transient Liquid Motion in Orbiting Spacecraft, NASA CR-144213 (1976).
- 5) H. Schlichting : Boundary Layer Theory, 7th ed., (1979), McGraw-Hill, pp.93-94.
- 6) H. F. Bauer : Bestimmung des effektiven Trägheits moments einer flüssigkeitsgefüllten Kugel bei harmonischer Rotations-schwingung, Z. Flugwiss. und Weltraum-forsch., 4-1 (1980), pp.48-51.
- 7) 小松敬治，小野修壽，清水順一郎，長島隆一，安澤眞一：衛星球形タンク内液体の動的挙動解明のための二つの試験，日本航空宇宙学会誌，35-400 (1987)，pp.266-269.
- 8) 小松敬治，清水順一郎ほか：宇宙機における液体の動的挙動に関する研究，NAL-NASDA 共同研究成果報告書（第 2 報），(1991.5).

航空宇宙技術研究所報告1095号

平成3年2月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 三興印刷
東京都新宿区西早稲田 2-1-18
