

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1097

超音速に於けるくさび形物体まわりの流れの  
解法改善について

野 溝 国 生

1991年2月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 超音速に於けるくさび形物体まわりの流れの 解法改善について\*

野 溝 国 生\*<sup>1</sup>

## An Improved Method for Simulating Supersonic Flow Past A Wedge Shaped Body\*

Kunio NOMIZO\*<sup>1</sup>

### ABSTRACT

Several reports have obtained numerical solutions for supersonic flow past blunt nosed body, and in every case the method adopted can be described as an inverse marching process.

This method was applied to a wedge shaped body, thus requiring an elliptical type equation to be solved.

To facilitate the solution process, the pressure and density terms are eliminated from the equation so that it is composed solely of velocity terms. An initial application is discussed which constructs the solution starting from shock waves, the Taylor maccoll solution, with satisfactory results being obtained.

**Keywords:** Supersonic flow wedge shaped body

### 概 要

過去20数年にわたり, Briggs, Butler, Ferri が極超音速に於ける bluff-bodyを通過する数値解法に於て満足すべき解を得ている。それらのいずれの場合に於ても逆解法を用いている。

本稿の目的は, この逆解法をくさび形に対して応用することである。そしてこれは楕円型微分方程式となる。従来の方法は速度項以外の項まで微分方程式の中に入っているために計算が複雑であるが, 本報告の方法は速度項のみに変数が限定されるが故に, 計算が簡単になるはずである。

本報告に於ては, 第1段階として, Taylor, Maccoll の解を仮定しこれを変形して正解を得た。解法は衝撃波から剛体面に向かって進む逆解法を用いた。

### 1. ま え が き

過去20数年にわたり, Briggs<sup>1)</sup>, Butler<sup>2)</sup>, Ferri<sup>3,4)</sup>が極超音速に於ける bluff-bodyを通過する

数値解法に於て満足すべき解を得ている。それらの場合に於ても逆解法を用いている。

本稿の目的は, この逆解法をくさび形物体に対して応用することである。そしてこれは楕円型微

\* 平成2年6月8日受付(received 8 June 1990)

\*1 宇宙研究グループ(Space Technology Research Group)

分方程式となる。従来の方法は速度項以外の項まで微分方程式の中に入っているために計算が複雑であるが、本報告の方法は速度項のみに変数が限定されるが故に、計算が簡単になるはずである。

又今迄の論文に於ては Ferri<sup>3,4)</sup> の指摘したとおり物体表面に存在する解の特異性に関する議論が十分でない。錐状流の解析に関する一方法として、所謂、truncation methodがある。これは物体表面に沿う方向の変数で流れ場の諸物理量を冪級数展開し、その係数で作られる方程式系を連立常微分方程式として、解く方法である。しかし、この方法によって得られた係数方程式系は、逐次近似の形式を保存していないため、方程式系を上位の有限項で打ち切った場合、系が閉じていないという本質的な欠点を有する。このため実際上の計算では、解の級数展開の高次の係数が小さく無視出来るという少々無理な仮定の導入を余儀なくされている。この欠点を若干改善するために、新井、辛島らは物体近傍に於ける錐状流の解の特異性の性質を明らかにするため、inverse method<sup>1, 2,3,4)</sup>と direct method とを併用した方法を提案した。

即ち、衝撃波の近傍では錐状流の基礎方程式を差分微分方程式に変換し、衝撃波より出発して内側に向って積分を実行し、一方物体の近傍に於ては、物体に直角な方向の変数によって解を冪級数展開し、両者を適当な中間点に於て解析的に接続するという方法である。この方法によれば、物体近傍の解の級数展開の係数で作られる係数方程式系に関しては、逐次近似の形式が保存されるため truncation method で示されるような係数方程式系が閉じないという欠点は改良される。しかしこのような方法は正しい解の収束方法ではない。

本報告に於ては、第1段階として、近似的に Taylor, Maccoll<sup>5)</sup> の解を仮定しこれを変形して正解を得た。解法は衝撃波から剛体面に向って進む逆解法を用いた。

## 2. 記 号

$C$  : 音速

$C_0$  : 速度が0の時の音速

$C_p$  : 圧力係数

$K$  : 比熱比

$M$  : マッハ数

$P$  : 圧力

$r$  : 半径方向座標

$V_{\max} : C_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}}$

$V_r$  : 半径方向速度

$V_\omega$  :  $\omega$  方向速度

$V_\varphi$  :  $\varphi$  方向速度

$u$  :  $x$  方向速度

$v$  :  $y$  方向速度

$w$  :  $z$  方向速度

$\beta_0 : \sqrt{M_\infty^2 - 1}$

$\rho$  : 密度

$\phi$  : ポテンシャル

## 3. 基礎式

流体は非粘性、熱伝導なし、完全気体、等エントロピー、定常とすれば、図1に示す極座標に対し、基礎式は、次のようになる。又、今回の報告の場合、定常なので時間  $t$  の微分を含む項は考えない。質量保存則は次式で示される<sup>9)</sup>。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial(\rho \cdot V_\omega \sin \omega)}{\partial \omega} + \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \varphi} = 0.0 \quad (1)$$

図2には2次元方向のみに図をかいてあるが、超音速で、錐体の表面が直線の場合には、文献<sup>5)</sup>によると図2より  $r$  方向については諸量が  $r$  上のどの点をとってみても一定であるので、諸量の  $r$  方向の微分はすべて0となる。よって

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} = 0.0, \quad \frac{\partial P}{\partial r} = 0.0$$

となる。

又  $r$  方向については運動量保存則は<sup>9)</sup>

$$V_\omega \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \omega} - (V_\varphi^2 + V_\omega^2) + \frac{V_\varphi}{\sin \omega} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} = 0 \quad (2)$$

又  $\omega$  方向については運動量保存則は文献より<sup>9)</sup>

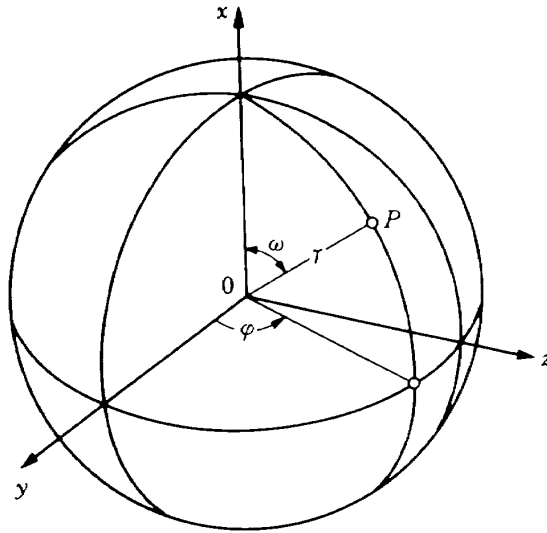
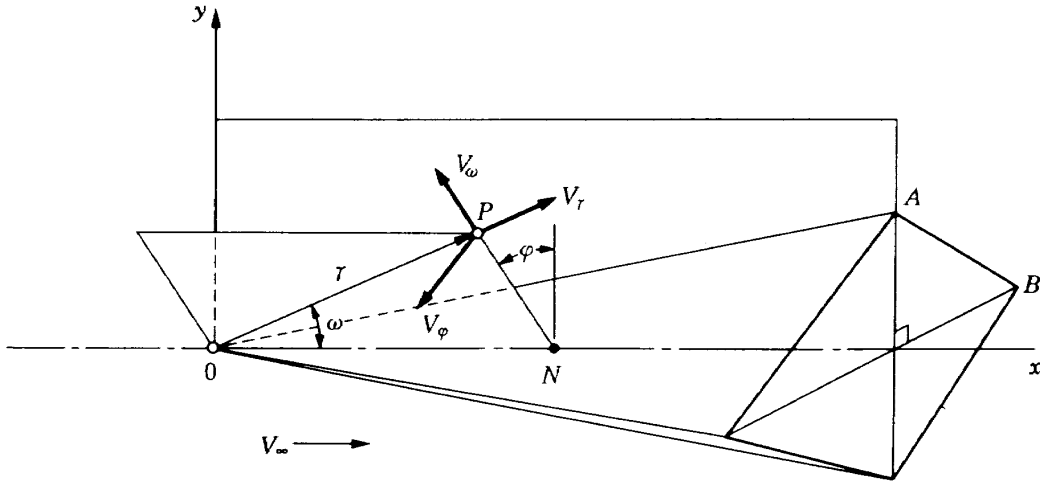


図1 座標系

$$\frac{\partial V_\omega}{\partial r} = 0.0$$

$$V_\omega \frac{\partial V_\omega}{\partial \omega} + \frac{V_\phi}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial V_\omega}{\partial \phi} + V_r \cdot V_\omega - V_\phi^2 \cot \omega = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \omega} \quad (3)$$

\$\phi\$方向については、文献より<sup>9)</sup> \$\frac{\partial V\_\phi}{\partial r} = 0.0\$

$$V_\omega \frac{\partial V_\phi}{\partial \omega} + \frac{V_\phi}{\sin \omega} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + V_r \cdot V_\phi + V_\omega V_\phi \cot \omega = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial P}{\partial \phi} \quad (4)$$

エネルギー保存則は<sup>9)</sup>

$$P = \rho \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{2} (V_{\max}^2 - V_r^2 - V_\omega^2 - V_\phi^2) \quad (5)$$

は次のようになる。

$$2.0 \rho V_r + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \omega} V_\omega + \rho \frac{\partial V_\omega}{\partial \omega} \right) + \rho V_\omega (\cos(\omega) / \sin(\omega)) \cdot \frac{1.0}{\sin(\omega)} \left( \rho \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \rho}{\partial \phi} V_\phi \right) = 0.0 \quad (6)$$

(5)式を\$\omega\$について偏微分すると

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \frac{k-1}{k} \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \omega} (V_{\max}^2 - V_r^2 - V_\omega^2 - V_\phi^2) + 2 \left( -V_r \frac{\partial V_r}{\partial \omega} - V_\omega \frac{\partial V_\omega}{\partial \omega} - V_\phi \frac{\partial V_\phi}{\partial \omega} \right) \right) \quad (7)$$

(3)式と(7)式より

$$V_\omega \frac{\partial V_\omega}{\partial \omega} + \frac{V_\phi}{\sin \omega} \cdot \frac{\partial V_\omega}{\partial \phi} + V_r V_\omega - V_\phi^2 \cot \omega$$

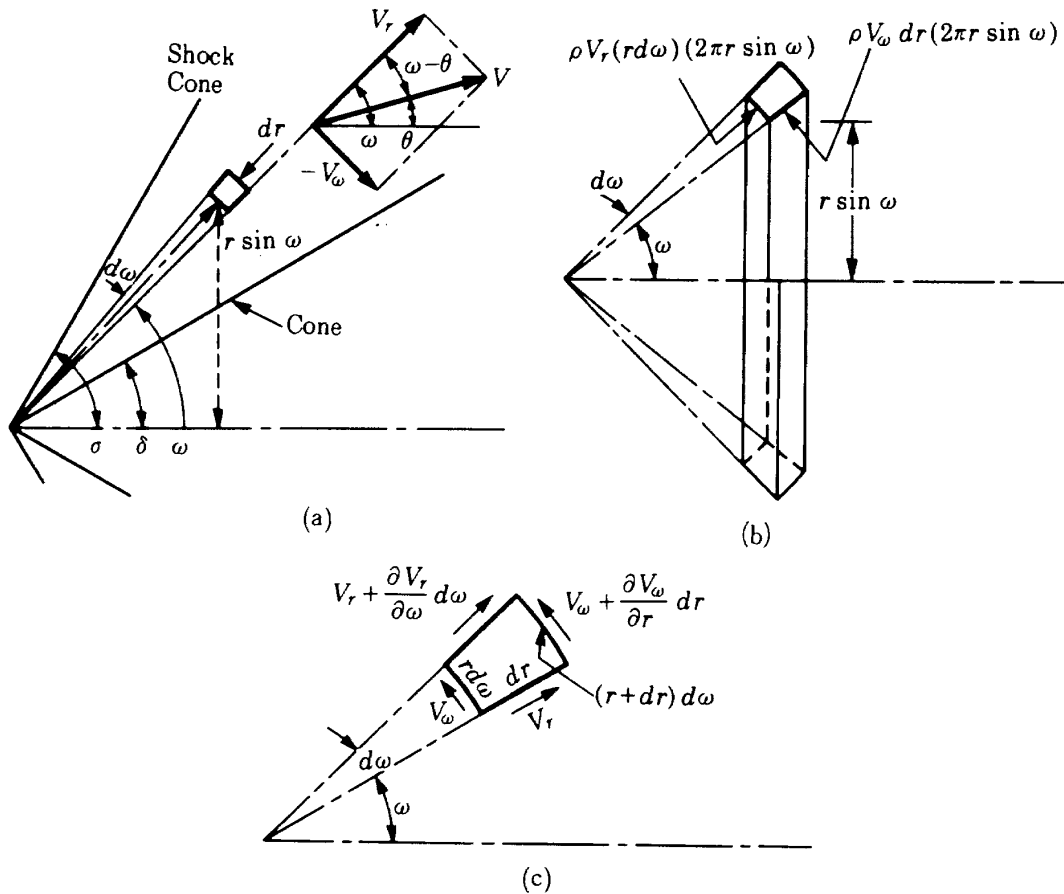


図2 衝撃波の形状

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot 2 \left( -V_r \frac{\partial V_r}{\partial \omega} - V_\omega \frac{\partial V_\omega}{\partial \omega} \right. \\
 & \left. - V_\varphi \frac{\partial V_\varphi}{\partial \omega} \right) = -\frac{1}{2} \frac{k-1}{k} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \omega} (V_{\max}^2 \right. \\
 & \left. - V_r^2 - V_\omega^2 - V_\varphi^2) \right)
 \end{aligned}$$

上式に於て

$$\begin{aligned}
 VWVR &= V_\omega \frac{\partial V_\omega}{\partial \omega} + \frac{V_\varphi}{\sin \omega} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_r \cdot V_\omega \\
 & - V_\varphi^2 \cot \omega - \frac{k-1}{k} \left( V_r \frac{\partial V_r}{\partial \omega} + V_\omega \frac{\partial V_\omega}{\partial \omega} \right. \\
 & \left. + V_\varphi \frac{\partial V_\varphi}{\partial \omega} \right) \quad (8)
 \end{aligned}$$

と定義し、又  $V_{MAXV}$  を

$$V_{MAXV} = -\frac{1}{2} \frac{k-1}{k} (V_{\max}^2 - V_r^2 - V_\omega^2 - V_\varphi^2)$$

と定義すると

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \omega} = VWVR / V_{MAXV} \quad (9)$$

又(5)式を  $\varphi$  について偏微分すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} \frac{k-1}{k} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} (V_{\max}^2 - V_r^2 - V_\omega^2 - V_\varphi^2) \right. \\
 & \left. + 2 \left( -V_r \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - V_\omega \frac{\partial V_\omega}{\partial \varphi} - V_\varphi \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right) \quad (10)
 \end{aligned}$$

(4), (10)から  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi}$  を消去すると、

$$\begin{aligned}
 \sin(\omega) \left( V_\omega \frac{\partial V_\varphi}{\partial \omega} + \frac{V_\varphi}{\sin \omega} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_r V_\varphi + V_\omega \right. \\
 \left. + V_\omega V_\varphi \cot \omega \right) &= -\frac{1}{2} \frac{k-1}{k} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} (V_{\max}^2 \right. \\
 & \left. - V_r^2 - V_\omega^2 - V_\varphi^2) \right) - 2 \left( -V_r \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right. \\
 & \left. - V_\omega \frac{\partial V_\omega}{\partial \varphi} - V_\varphi \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right)
 \end{aligned}$$

$SVWVR$  を次のように定義すると上式は(11)式の如く表わせる。

$$SVWVR = \sin \omega \left( V_\omega \frac{\partial V_\varphi}{\partial \omega} + \frac{V_\varphi}{\sin \omega} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_r V_\varphi \right)$$

$$+V_{\omega} V_{\varphi} \cot \omega) - 2 \left( V_r \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + V_{\omega} \frac{\partial V_{\omega}}{\partial \varphi} + V_{\varphi} \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = SVWVR/VMAXV \quad (11)$$

(9), (11)を(6)に代入して  $\rho$  を消去すれば

$$2.0 \cdot V_r + (VWVR/VMAXV) \cdot V_{\omega} + \frac{\partial V_{\omega}}{\partial \omega} + V_{\omega} \cdot \cos(\omega)/\sin(\omega) + 1.0/\sin(\omega) \cdot \left( \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi} + SVWVR/VMAXV \cdot V_{\varphi} \right) = 0 \quad (12)$$

(12)はすべて  $V$  より成り立っている。解析に必要なのは(12), (12)である。他の式はすべて  $P, \rho$  の消去につかわれた。

衝撃波面について

マッハ数  $M_1$ , 圧力  $P_1$ , 密度  $\rho_1$ , 温度  $T_1$ , エントロピー  $S_1$  の超音速流が, ある流れの場  $A$  点で衝撃波を発生し, 上記の物理量が,  $M_2, P_2, \rho_2, T_2, S_2$  に変化したと考えよう。図3に示す  $t$  は衝撃波面,  $V_n$  は速度の  $t$  に対する直角成分,  $\epsilon$  は  $V_{10}$  の  $t$  のなす角,  $\delta$  は斜め衝撃波後の変位速度  $V_{20}$  と  $V_{10}$  のなす角,  $\beta$  は  $V_{20}$  と  $t$  のなす角とする。速度, 圧力, 密度間には次の式が成立する。

$$V_1^2 = V_{n1}^2 + V_{t1}^2 + V_{st1}^2 = M_1^2 k \cdot P_1 / \rho_1 \quad (13)$$

$$V_2^2 = V_{n2}^2 + V_{t2}^2 + V_{st2}^2 = M_2^2 k \cdot P_2 / \rho_2 \quad (14)$$

$$V_{n1} = V_{10} \sin \epsilon, \quad V_{n2} = V_{20} \sin \beta \quad (15)$$

$$V_{t1} = V_{10} \cos \epsilon, \quad V_{t2} = V_{20} \cos \beta \quad (16)$$

連続の式より, 斜め衝撃波を横切る流量は,

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} \quad (17)$$

斜め衝撃波に直角および接線方向の運動量変化

式は

$$P_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = P_2 + \rho_2 V_{n2}^2 \quad (18)$$

$$\rho_1 V_{n1} V_{t1} = \rho_2 V_{n2} V_{t2} \quad (19)$$

$$\rho_1 V_{n1} V_{st1} = \rho_2 V_{n2} V_{st2} \quad (20)$$

斜め衝撃波前後の流れの全エネルギーは等しいから

$$\frac{k}{k-1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{k}{k-1} \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} V_2^2 \quad (21)$$

式(17)と式(19)および(20)より, (22), (23)式が導かれる。

$$V_{t1} = V_{t2} \quad (22)$$

$$V_{st1} = V_{st2} \quad (23)$$

式(16)と式(22)より(24)式が導かれる。

$$V_{20} / V_{10} = \cos \epsilon / \cos \beta \quad (24)$$

は式(13), (14), (22), (23)より

$$\frac{2k}{k-1} \frac{P_1}{\rho_1} + V_{n1}^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{P_2}{\rho_2} + V_{n2}^2 \quad (25)$$

また, 図3より

$$\rho_1^2 V_{n1}^2 = \rho_1^2 V_{10}^2 \sin^2 \epsilon = \rho_1^2 V_1^2 \cos^2 \epsilon \cdot \sin^2 \epsilon$$

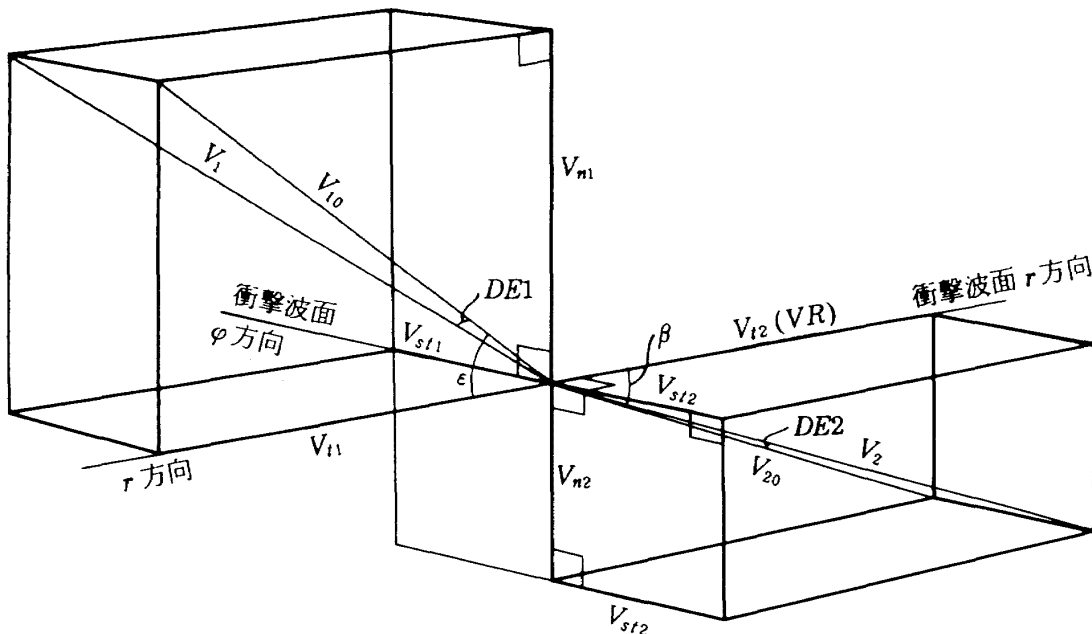


図3 衝撃波面

$$= \rho_1 M_1^2 k P_1 \sin^2 \epsilon \cdot \cos^2 DE1 \quad (26)$$

$$\rho_2^2 V_{n2}^2 = \rho_2^2 V_{20}^2 \sin^2 \beta = \rho_2^2 V_2^2 \cos^2 DE2 \cdot \sin^2 \beta$$

$$= \rho_2 M_2^2 k P_2 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 DE2 \quad (27)$$

式(17)と式(26), (27)より

$$\begin{aligned} \rho_1 P_1 M_1^2 \sin^2 \epsilon \cdot \cos^2 DE1 \\ = \rho_2 P_2 M_2^2 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 DE2 \end{aligned} \quad (28)$$

式(18)と式(26), (27)より

$$\begin{aligned} P_1 (1 + k M_1^2 \sin^2 \epsilon \cdot \cos^2 DE1) \\ = P_2 (1 + k M_2^2 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 DE2) \end{aligned} \quad (29)$$

式(25), (26), (27)式より

$$\begin{aligned} P_1 / \rho_1 (2/k - 1 + M_1^2 \sin^2 \epsilon \cdot \cos^2 DE1) \\ = P_2 / \rho_2 (2/k - 1 + M_2^2 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 DE2) \end{aligned} \quad (30)$$

式(28), (29), (30)より  $P_1/P_2, \rho_2/\rho_1$  を消去すると,

$$C = \frac{k+1}{2k} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned} \left( M_1^2 \sin^2 \epsilon \cdot \cos^2 DE1 - \frac{k-1}{2k} \right) \\ \left( M_2^2 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 DE2 - \frac{k-1}{2k} \right) = C^2 \end{aligned} \quad (31)$$

式(31)より

$$\begin{aligned} M_2^2 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 DE2 \\ = C^2 / (M_1^2 \sin^2 \epsilon \cdot \cos^2 DE1 - (k-1)/2k) \\ + \frac{k-1}{2k} \end{aligned} \quad (32)$$

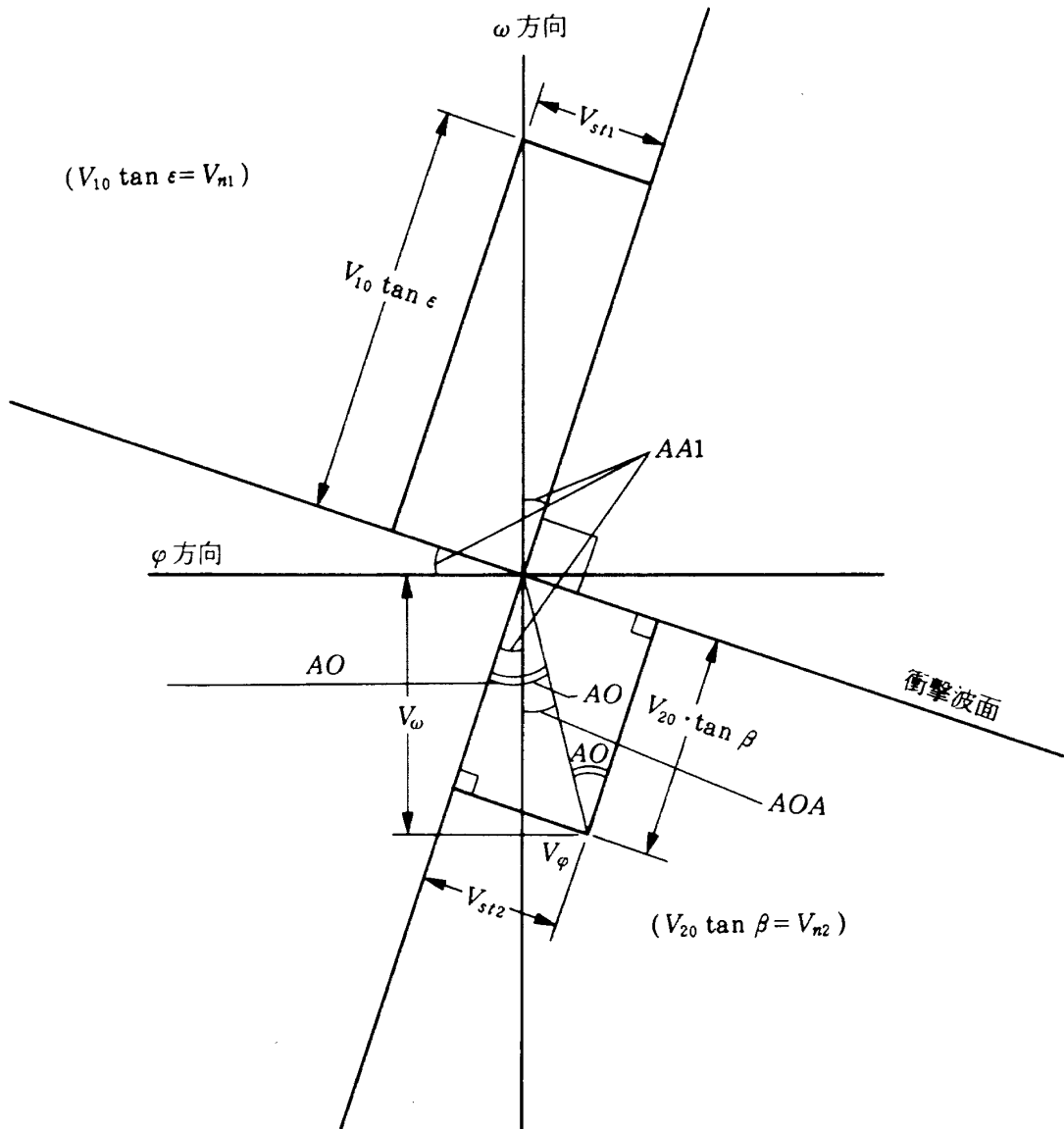


図4 衝撃波面に於ける横方向成分(φ方向)

式(29), (30)より

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1+k \cdot M_2^2 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 DE2}{\frac{2}{k-1} + M_2^2 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 DE2} \times \frac{\frac{2}{k-1} + M_1^2 \sin^2 \epsilon \cdot \cos^2 DE1}{1+k M_1^2 \sin^2 \epsilon \cdot \cos^2 DE1} \quad (33)$$

式(33)に、 $M_2^2 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 DE2$ を式(32)で $\epsilon$ ,  $DE1$ の値におきかえて式(33)に代入すれば $\rho_1/\rho_2$ は $\epsilon$ ,  $DE1$ によって表わされる。

また、式(15), (17), (24)より次式が導かれる。

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_{n2}}{V_{n1}} = \frac{\tan \beta}{\tan \epsilon} \quad (34)$$

$\epsilon$ ,  $DE1$ はわかっているので $\beta$ が計算できる(図4参照)。衝撃波面より上側の値はすべてわかっているので、 $AA1$ ,  $V_{i0}$ ,  $V_{st1}$ 等はすべてわかっている。式(23)より $V_{st1} = V_{st2}$ であり、

$$V_{st1} = V_{i0} \cdot \tan \epsilon \cdot \tan(AA1),$$

$$V_{st2} = V_{20} \cdot \tan \beta \cdot \tan A_0$$

よって

$$V_{i0} \cdot \tan \epsilon \cdot \tan(AA1) = V_{20} \cdot \tan \beta \cdot \tan A_0 \quad (35)$$

又式(24)より

$$V_{20}/V_{i0} = \cos \epsilon / \cos \beta$$

以上により式(35)から $A_0$ が定まる。

$$A_0A = A_0 - AA1 \quad (36)$$

$$V_\varphi = V_\omega \cdot \tan(A_0A) \quad (37)$$

式(24)より

$$V_{20} = V_{i0} \cdot \cos \epsilon / \cos \beta$$

式(15)より

$$V_{n2} = V_{20} \sin \beta$$

$V_\omega$ ,  $V_r$ は図3, 図4より求められる。

$$V_\omega = (V_{20} \cdot \tan \beta / \cos(A_0)) \cdot \cos(A_0A) \quad (38)$$

図4より

$$V_r = V_{n2} / \tan \beta \quad (39)$$

$$V_\varphi = (V_{20} \cdot \tan \beta / \cos A_0) \cdot \sin(A_0A) \quad (40)$$

図5に全体的な衝撃波形状を示す。

#### 4. 計算方法

この解法は逆解法によるものであるから、まず衝撃波の形状を仮定し、その衝撃波から物体表面に向かって逆解法で解くものとする。衝撃波の場所に於ける諸量は、Rankine-Hugoniotと同様な方法によって定められる。

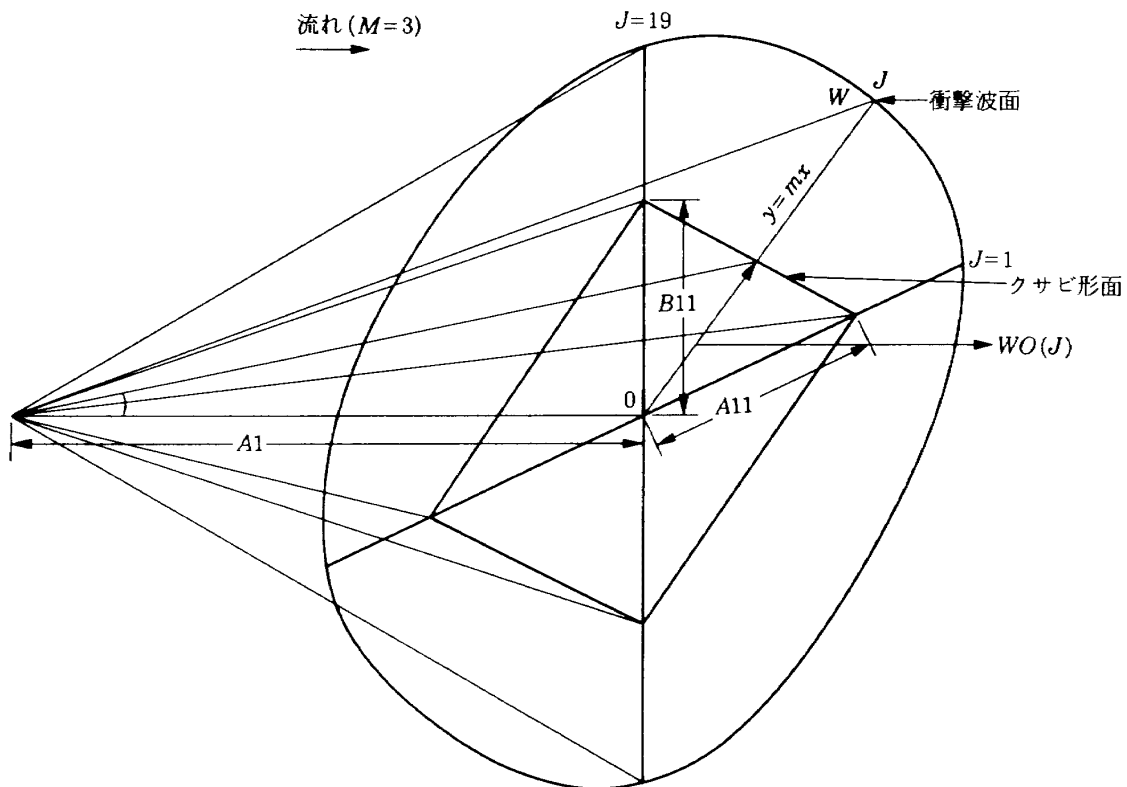


図5 衝撃波面とクサビ形との関係



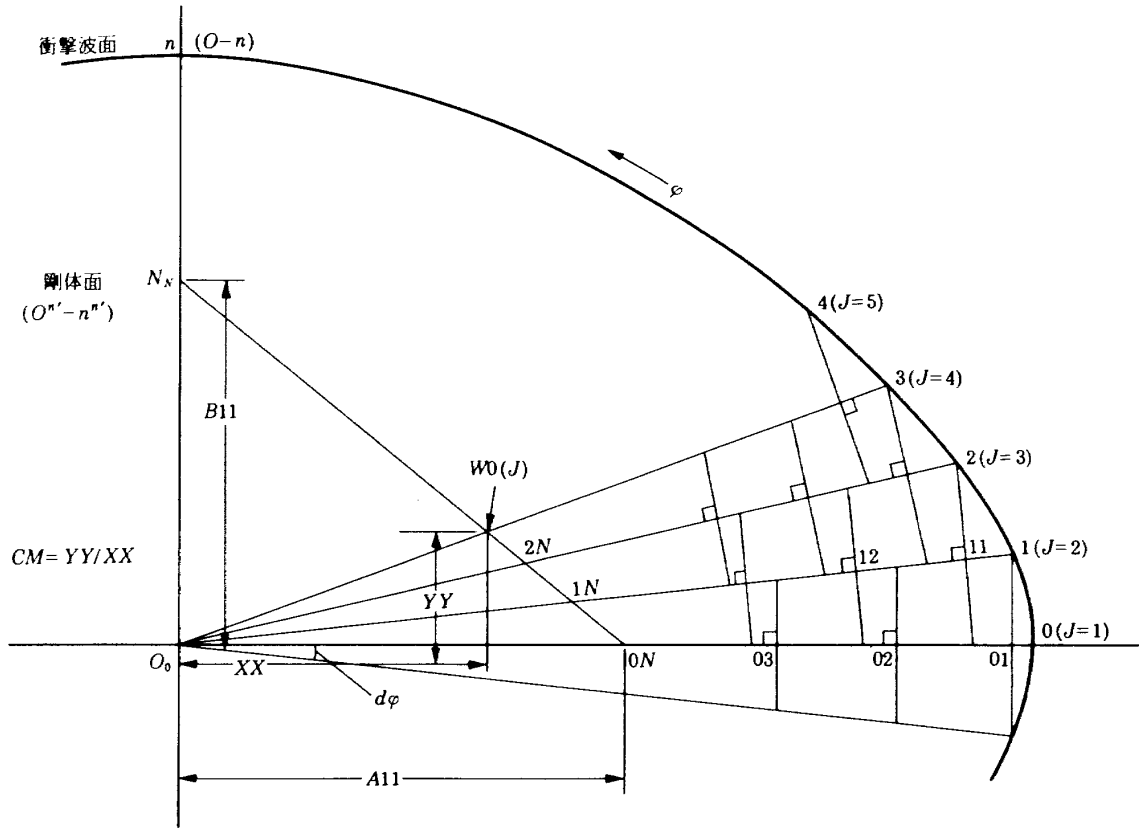


図6 逆解法に於けるメッシュのきり方

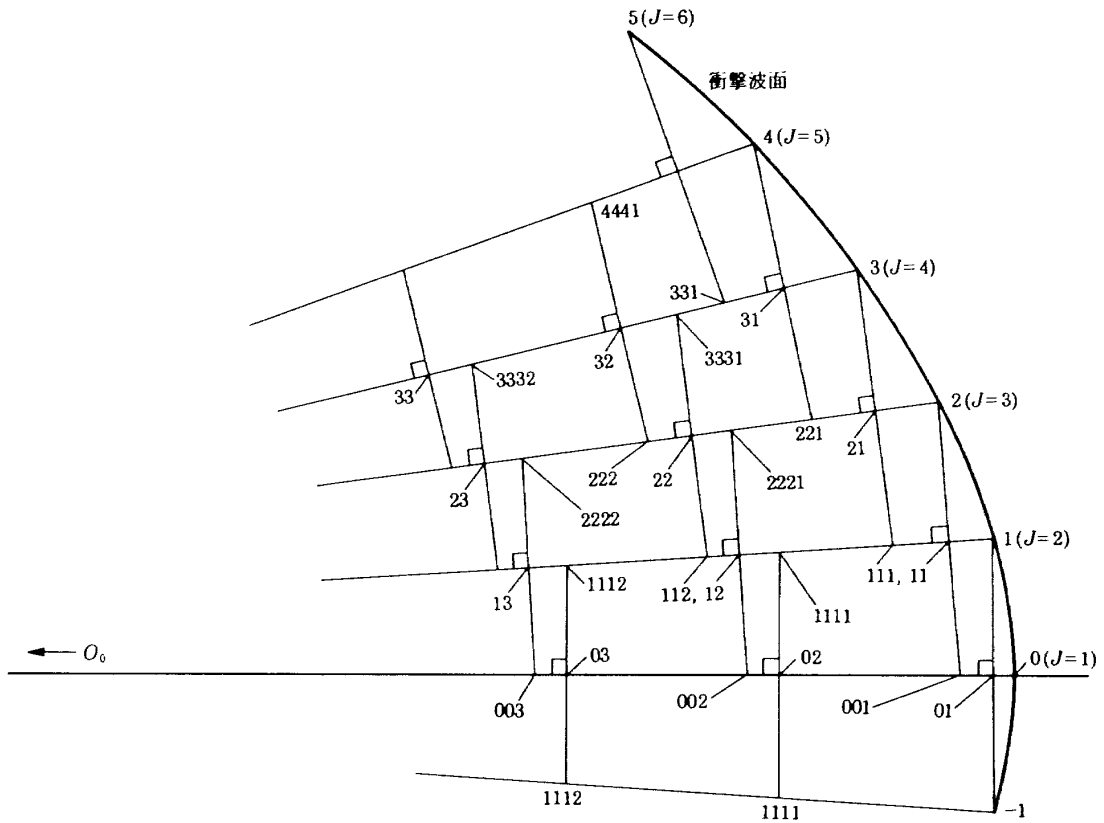


図7 逆解法に於けるメッシュのきり方

図6に於て01-0<sub>0</sub>間を本稿に於ては30等分し、その一区間を01 02とする。同様に11-0<sub>0</sub>間を30等分し、その一区間を11 12とする。又dφについてはdφ=π/36とした。よって0, n間を18等分するわけである。

中心にあるくさび形物体のものについて解析することにする。又衝撃波はくさび形物体の頂点に付着した錐状形で、その断面形状は近似的に長円を仮定する。

まず初期条件の計算はくさび形物体の一番長い部分から開始するものとする。つまり図1のBの部分から開始する。メッシュの切り方は例えば図6に於て0, 1, 2, 3, n面は衝撃波, ON, NN面は物体面とする。

まず0-0<sub>0</sub>をはさんで-1, 1は対称である。0<sub>0</sub>点から外側に向う方向がω方向に直角な方向がφ方向である。0-n上に於けるV<sub>r</sub>, V<sub>ω</sub>, V<sub>φ</sub>はRankine-Hugoniotの方法により求められる(38), (39), (40式参照)。

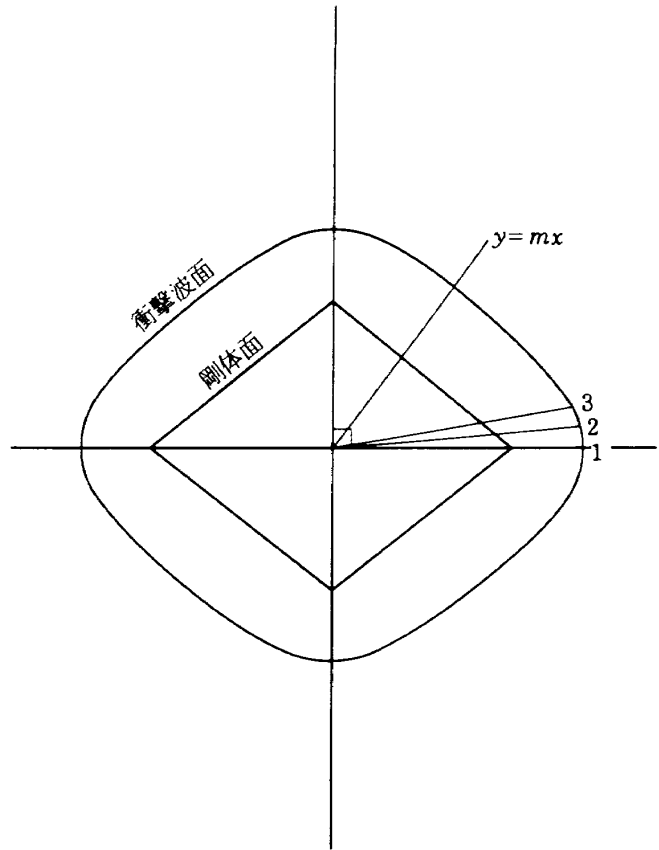


図8 衝撃波面とくさび形との関係

4.1 0-0<sub>0</sub>線上に於ける諸量の求め方

図6より明らかな如く、0-0<sub>0</sub>を中心として諸量は対称的であるので、

$$V_\phi = 0 \text{ (0-0}_0\text{線上に於て)}$$

である。又、V<sub>φ</sub>=0であるならば(2)より

$$V_\omega \frac{\partial V_r}{\partial \omega} - V_\omega^2 = 0$$

V<sub>ω</sub> ≠ 0, よって  $\frac{\partial V_r}{\partial \omega} = V_\omega$ となる。図6の0の点に於けるV<sub>ω</sub>は(38)式より求められる。この場合、図4に於てAA1, A0が0の場合に相当する。

よってωが微小量dωだけ変化した時のV<sub>r</sub>の変化量drは全微分として次の如くなる。

$$dV_r = \frac{\partial V_r}{\partial \omega} \cdot d\omega = V_\omega d\omega$$

よって01に於けるV<sub>r</sub>の値は0のV<sub>r</sub>の値にdV<sub>r</sub>の値を加えたものとして求められる。

又、0-02間距離は微小量であると仮定しているので、02に於けるV<sub>r</sub>の値も(2)式を使って同様に求められる。

0に於ける  $\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$  は、0-01の距離が非常に小さ

いので、01に於ける  $\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$  と同じ値をとるものとし、1に於けるV<sub>φ</sub>の値をV<sub>φ1</sub>とし、-1に於けるV<sub>φ</sub>の値をV<sub>φ-1</sub>とすれば01点に於ける  $\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$  は中央差分をとり

$$\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = (V_{\phi 1} - V_{\phi -1}) / (\pi/18)$$

として求められる。

この  $\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$  を0点に於ても使う。

次に(12)式について考える。0-0<sub>0</sub>間ではV<sub>φ</sub>=0であり、V<sub>φ</sub>=0であれば(2)式より  $\frac{\partial V_r}{\partial \omega} = V_\omega$ となる。

これらの関係を(12)に入れ  $\frac{\partial V_\omega}{\partial \omega}$  について解くと、

$$\frac{\partial V_\omega}{\partial \omega} = f(V_r, V_\omega, \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}, \frac{\partial V_r}{\partial \omega}) \text{ (f: 関数)}$$

の形になる (V<sub>φ</sub>=0)。

よって例えば、0-01の長さをd001とし、0に於けるV<sub>ω</sub>の値をV<sub>ω0</sub>とすれば01に於けるV<sub>ω</sub>の値V<sub>ω01</sub>は

$$V_{\omega 01} = V_{\omega 0} + f\left(V_r, V_{\omega}, \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi}, \frac{\partial V_r}{\partial \omega}\right) \cdot d001$$

同様にして002の長さを $d002$ とし、02に於ける $V_{\omega}$ の値 $V_{\omega 02}$ は

$$V_{\omega 02} = V_{\omega 0} + f\left(V_r, V_{\omega}, \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi}, \frac{\partial V_r}{\partial \omega}\right) \cdot d002$$

となる。

以上でみた如く、 $0-0_0$ 上での格子点での $V_r$ ,  $V_{\omega}$ ,  $V_{\varphi}$  ( $=0$ )の値を求める為には、求める格子点の一つ前の点での $V_r$ ,  $V_{\omega}$ の値のほか $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi}$ の値も必要である。 $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi}$ の値を挙分法で求めるために、 $1-0_0$ 線上の $V_r$ ,  $V_{\omega}$ ,  $V_{\varphi}$ を求める必要がある。

#### 4.2 1-0<sub>0</sub> 線上に於ける諸量の求め方

直線 $1-0_0$ に対し点2から垂線を引き、垂線と $1-0_0$ と交わる点を11、 $0-0_0$ と交わる点を001とする(図7)。001点の諸量は0と02点での諸量がすでに求まっているので内挿法によって求める。次に2点と001点の諸量から中央差分により11点の $\frac{\partial V_r}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial V_{\omega}}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi}$ は求めることが出来る。

すると(12)には $\frac{\partial V_r}{\partial \omega}$ ,  $\frac{\partial V_{\omega}}{\partial \omega}$ ,  $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega}$ の3つの未知数が含まれることになるが $\frac{\partial V_r}{\partial \omega}$ は(2)より求まり、残る未知数は、 $\frac{\partial V_{\omega}}{\partial \omega}$ ,  $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega}$ である。2つの未知数を含む場合は、不定方程式とないて一般には解けないので、最初は一方を仮定し、iterationの方法によって収束させることにする。

幸にして $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega}$ は一般に衝撃波の場所に於ては、ほとんど0に等しいことが、他の論文で示されている<sup>8)</sup>ので、最初はまず0にとり、くりかえしの後、正しい $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega}$ の値に収束させるようにする。

##### 4.2.1 $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega}$ をiterationにより求める方法(図6参照)

(1)  $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega} = 0$ を仮定する。

(2)  $\frac{\partial V_r}{\partial \omega}$ は(2)式より $\frac{\partial V_r}{\partial \omega} = (V_{\omega} + V_{\varphi}^2)/V_{\omega}$   
 $-\frac{V_{\varphi}}{V_{\omega} \sin \omega} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}$ として求まる。

(3) (2)を $\frac{\partial V_{\omega}}{\partial \omega}$ について解くと

$$\frac{\partial V_{\omega}}{\partial \omega} = f_2\left(V_r, V_{\omega}, V_{\varphi}, \frac{\partial V_r}{\partial \omega}, \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega}, \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}, \frac{\partial V_{\omega}}{\partial \varphi}, \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega}\right)$$

(4) 1点に於ける諸量を基に11点に於ける $V_r$ ,  $V_{\omega}$ ,  $V_{\varphi}$ を求める。その方法は別に記す。

(5) 式(2)を $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega}$ について解き、11点に於ける諸量を代入し、 $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega}$ の値を求める。

(6) (2)~(5)を繰返し、 $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega}$ の値を収束させる。(ほとんど0である)

##### 4.2.2 11点に於ける $V_r$ , $V_{\omega}$ , $V_{\varphi}$ の求め方

1点に於ける速度成分を $V_{r1}$ ,  $V_{\omega 1}$ ,  $V_{\varphi 1}$ とする。これらの値は(38), (39), (40)より求まる。1点に於ける $\frac{\partial V_r}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial V_{\omega}}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi}$ の値は点2と001の値を使って中央差分として既に求めた11点での値で代用する。また、 $1-11$ 間の長さを $d111$ とする。最初は、 $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \omega} = 0$ を仮定するので、11点での $V_{\varphi}$ は1点での値と同じである。1点での $\frac{\partial V_r}{\partial \omega}$ は(2)より

$$\left(\frac{\partial V_r}{\partial \omega}\right)_1 = (V_{\omega 1} + V_{\varphi 1}^2)/V_{\omega 1} - V_{\varphi 1}/(V_{\omega 1} \cdot \sin \omega) \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}$$

となるので、11点での $r$ 方向の速度成分 $V_{r11}$ は

$$V_{r11} = V_{r1} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial \omega}\right)_1 \cdot d111$$

で与えられる。

1点での $\frac{\partial V_{\omega}}{\partial \omega}$ は(2)式を $\frac{\partial V_{\omega}}{\partial \omega}$ について解くと、

$$\frac{\partial V_\omega}{\partial \omega} = f_2 (V_r, V_\omega, V_\phi, \frac{\partial V_r}{\partial \omega}, \frac{\partial V_\phi}{\partial \omega}, \frac{\partial V_r}{\partial \phi}, \frac{\partial V_\omega}{\partial \phi}, \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi})$$

の形で表示される。1点でのそれぞれの値を代入し、その値を  $(\frac{\partial V_\omega}{\partial \omega})_1$  とすると、11点での  $\omega$  方向の速度成分  $V_{\omega 11}$  は

$$V_{\omega 11} = V_{\omega 1} + (\frac{\partial V_\omega}{\partial \omega})_1 \cdot d111$$

で与えられる。もし必要があれば前述した如く、iteration をすることで、 $\frac{\partial V_\phi}{\partial \omega}$  の精度を上げ、11点での  $V_r, V_\omega, V_\phi$  の値を求める。

さらに、1-12間の距離も微量であるので、12点での速度成分は1点での諸量を基に同様に計算出来る。

今までの方法を整理すると(図6, 図7参照)。

- (a)  $J=1$  の場合については、1, 0-1 より 01, 001, 02 の諸量が求まる。
- (b)  $J=2$  の場合については、2, 1, 001 より, 11, 111, 1111, 12 の諸量が求まる。
- (c)  $J=3$  の場合については、3, 2, 111 より, 21, 221, 2221, 22 の諸量が求まる。
- (d)  $J=4$  の場合については、4, 3, 221 より, 31, 331, 3331, 32 の諸量が求まる。

同様にして  $J=19$  ( $n$  点に相当) までくりかえす。

第2段階は

- (a)  $J=1$  の場合については、1111, 02より002, 03の諸量が求まる。
- (b)  $J=2$  の場合については、2221, 12, 002より 112, 1112, 13の諸量が求まる。
- (c)  $J=3$  の場合については、3331, 22, 112より 222, 2222, 23の諸量が求まる。
- (d)  $J=4$  の場合については、4441, 32, 222より 3332, 33の諸量が求まる。

同様にして  $J=19$  までくりかえす。

以上の操作を図6の  $ONNN$  線までくりかえす。

以上は衝撃波から剛体面までを逆解法によって解く一般的な方法である。くさび形は図9に示す如く、 $A, B, C, D$  点の特異点である。したがって、

$SA, SB, SC, SD$  領域の衝撃波の解法を特異点にかぎって考えなくてはならず、その考え方と近似方法その1を以下に示す。つまり初期条件として与える衝撃波の形状を定める方法である。

近似方法 その1

くさび形を図9の如く  $A, B, C, D$  とし、衝撃波の形状を図10の如く仮定すると、特異点は領域  $S$  である。この  $A, B, C, D$  点のために特別な方法をとらなくてはならない。

第1段階 特異点に於ける基本的な考え方

最初に  $\phi$  方向速度がないものと仮定すると、くさび形を通過する超音速流は Taylor-Macoll の解となる。これを以下に述べる方法で変形して正解を得ることにする。解法は衝撃波から剛体面に向かって解き進む逆解法を用いることにする。

図11より明らかな如く、剛体面  $AB$  と、 $O$  から  $\omega$  方向に立てた線との交点  $C$  に於て、直線  $OD$  線に、 $C$  点に於て立てた重線と、 $AB$  面との角度を

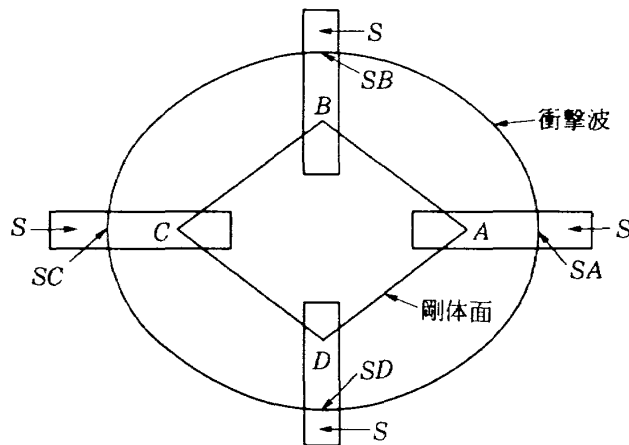


図9 衝撃波と特異点の関係

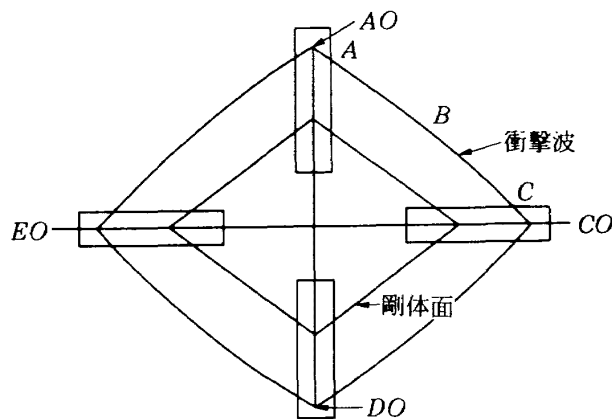


図10 Taylor maccoll の解と特異点の関係

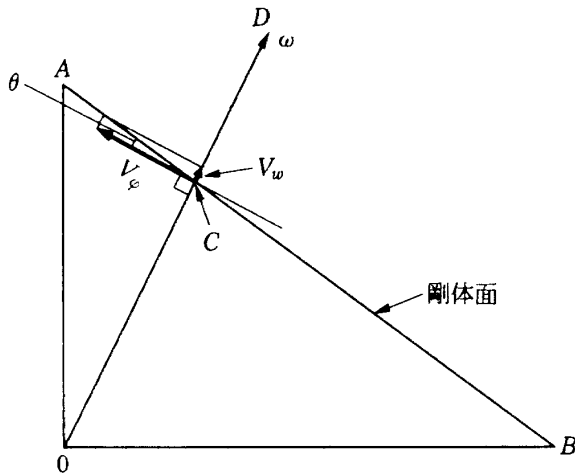


図11 クサビ形物体の表面に於ける  $V_z, V_w, \theta$  の関係

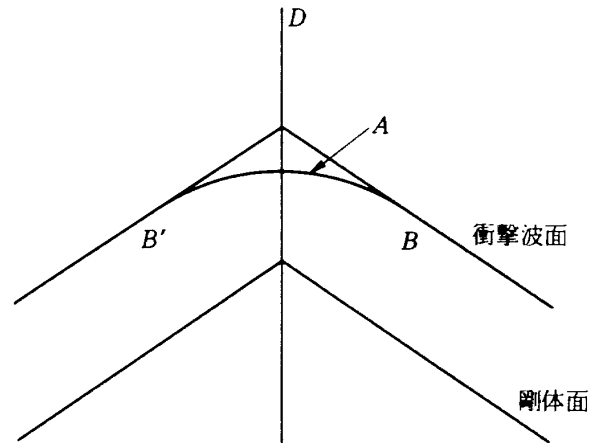


図12 クサビ形物体の表面に於ける 衝撃波面の連続 (1)

$\theta$  とする。

$$\tan \theta = V_w / V_\varphi \quad (41)$$

この関係を C 点で満たすように衝撃波の形を調節する。

そして  $\frac{dV_w}{d\omega}$  の絶対値が大きい程 (この場合マイナスである)  $V_w$  の絶対値は早く小さくなるからしたがって(41)式を満足する点は衝撃波の方向に近づくことになる。換言すればより低い衝撃波の位置でも  $dV_w/d\omega$  の絶対値が大きければ早く、剛体面の(41)式の関係式を満足する点に近づく。勿論、 $V_\varphi$  方向の速度が 0 の時は  $V_w$  も又 0 の点である。

この特長を生かしつつ Taylor-Maccoll の解を少しづつ変形して正解に到達させるわけである。

又(42)式を整理してみると

$$\frac{dV_w}{d\omega} = a \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + b \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + c \frac{dV_w}{d\varphi} + d \quad (42)$$

の形になる。a, b, c の内容を整理してみるとわかる事であるが、 $b = K_1 V_\varphi$ ,  $c = K_2 V_\varphi$  の形で  $V_\varphi$  を含むのである。a では  $V_\varphi$  を含んでいても、このような形では含まない。ところが  $V_\varphi$  の項は一般に、 $V_w, V_r$  等に比して小さな量であるために、b, c は a に比して小さく、b, c にほとんど省略してよい程度の値である。

よって  $a \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$  の項を最優先的に考えてよいのであり、事実、計算によってその事が確認された。

$\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$  の値が大きい程、流体は横にひろがる形となるので、衝撃波面から剛体面に向かって計算した場合、早く(41)の関係式を満足する点に到達するわけである。 $\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$  は大体に於て、衝撃波の曲率と解釈してよい。この曲率が大きくなれば  $dV_\varphi/d\varphi$  は大となる。したがって、この曲率を適当に選ぶことによって(41)を満たす点を剛体面に一致させることが出来るはずであり、又事実出来る。

図10については  $A0-C0, C0-D0, D0-E0, E0-A0$  は  $V_\varphi = 0$  と仮定した時の Taylor-Maccoll の解より得られる。衝撃波の形状であり、剛体面はクサビ形物体面であり、 $A0-D0, C0-E0$  に関してすべて対称的である。

当然のことであるが、図10では  $dV_\varphi/d\varphi$  は特異点では無限大となる (Taylor-Maccoll 解のままでは修正を加えない場合)。したがってこのような事は物理的にない。よって図12A のようななめらかな曲線によって衝撃波の形を近似する必要がある。オイラーの基礎式にはポテンシャルの 2 次微分までしか入ってこないの、衝撃波の形状の 2 次微分まで考えればよく、2 次微分までが連続していればよい。よって曲線 A も例えば、B, B' なる点に於て連続な場合、2 次微分までが連続であればよい。

3 次微分以上は不連続でもかまわない。クサビ

形のように微係数が不連続を伴う場合、3次微分は不連続としなければ解は求まらない。

第2段階

今衝撃波の中心からの高さを  $W$  で表わし、 $B'O B$  間は  $W$  を  $\varphi$  に関する4次曲線で近似し、 $A'B'$ 、 $AB$  間は  $\varphi$  に関する2次曲線で近似した。そして  $W$  の値  $W$  の  $\varphi$  に関する1次微分、2次微分が  $B'B$  点に於て等しくなければならない。

例えば、剛体面の中心線  $D$  をはさんで、 $W$  の  $\varphi$  に関する2次微分を  $W_{\varphi\varphi}$  とすれば ( $B'B$  曲線)

$$W_{\varphi\varphi} = a(\varphi - b)^2 + CMM \quad (43)$$

と書くことが出来る。これは  $\varphi = b$  に於て ( $B$  点に於て)

$$W_{\varphi\varphi} = CMM$$

これが、 $AB$  曲線 ( $\varphi$  に関する2次曲線) の  $B$  点に於ける。  $\varphi$  に関する2次微分に等しくなければならない。これが第一条件である (2次曲線と4次曲線の  $\varphi$  に関する2次微分の関係)。

次に  $D$  線に対して (43) と対称的な曲線は、

$$W_{\varphi\varphi} = a(\varphi + b)^2 + CMM \quad (44)$$

このように図13の  $S$  領域を2次微分として考えると、経験的に良好な結果が得られた。  $V_{\varphi}$  はほぼ

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} \text{ に比例し}$$

$$V_{\varphi} \propto \frac{\partial W}{\partial \varphi} \quad (45)$$

$$\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi} \text{ は } \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \text{ に比例する。}$$

$$\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi} \propto \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \quad (46)$$

$W_{\varphi\varphi} = a(\varphi - b)^2 + c$  を積分すれば、その積分値は、ほぼ  $V_{\varphi}$  に比例する。(43)より

$$W_{\varphi} = \frac{a}{3}(\varphi - b)^3 + CMM \cdot \varphi + C \quad (47)$$

第2の条件は、 $\varphi = 0$  に於て、 $V_{\varphi} = 0$  でなければならないから(47)式に於て  $\varphi = 0$  とすれば

$$\frac{a}{3}(-b)^3 + C = 0 \quad (48)$$

$$W_{\varphi} = \frac{a}{3}(\varphi - b)^3 + CMM \cdot \varphi + \frac{a}{3}b^3 \quad (49)$$

第3の条件は、 $B$  点に於て2次曲線と4次曲線

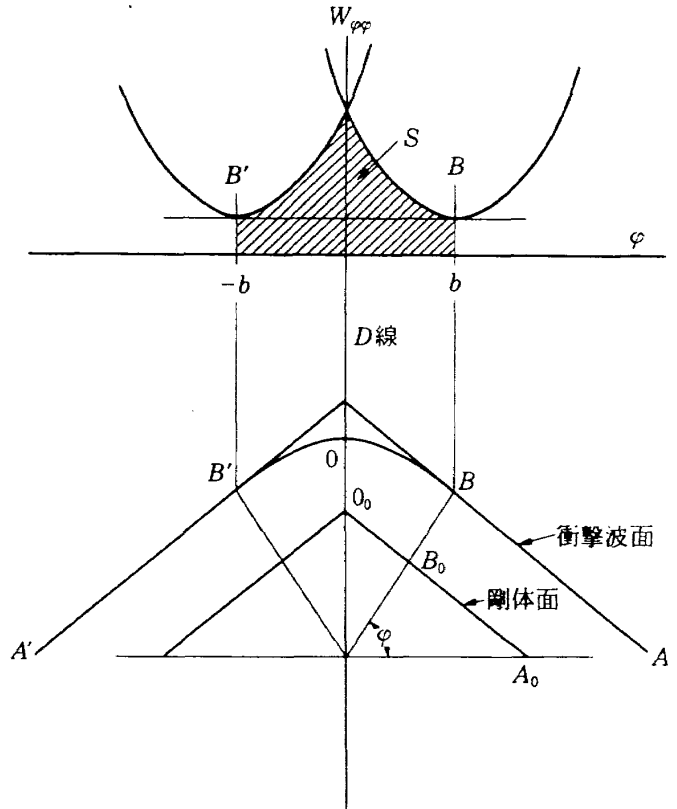


図13 クサビ形表面に於ける衝撃波面の連続(2)

の勾配が  $\varphi = b$  に於て等しいことである。  $B$  点に於て2次曲線の勾配を  $CM$  とすれば

$$\begin{aligned} (CM = W_{\varphi}) \\ = CMMb + \frac{a}{3}b^3 = CM \end{aligned} \quad (50)$$

となる。(49)式を  $\varphi$  について積分すると衝撃波の位置を示す式となる。

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{4} \frac{a}{3} (\varphi - b)^4 + \frac{1}{2} CMM \cdot \varphi^2 \\ + \frac{a}{3} b^3 \varphi + C20 \end{aligned} \quad (51)$$

$C20$  は積分定数である。第4の条件は、 $B$  点に於て2次曲線の場合の値に一致しなければならないことで、この値を  $CL1$  とすれば(51)式で  $\varphi = b$  としたとき  $W$  が  $CL1$  に等しくなることになり

$$\frac{1}{2} CMM \cdot b^2 + \frac{a}{3} b^4 + C20 = CL1 \quad (52)$$

よって、未知数  $a$ 、 $CMM$ 、 $C20$  はすべて  $b$  の関数となる。よって  $b$  を適当に変化させて  $B_0$  点に於て、(41)をほぼ満足するようにすればよく、事実、それは成功した。誤差は2~3%程度にする事が可能であった。

衝撃波の位置の設定については、図13、 $B_0$ に於て(4)を満足させるように  $b$  を iteration の方法で定める。勿論  $0_0 - B_0$ ,  $B_0 - A_0$  上では誤差は2~3%はある。それは後に修正する。 $b$  が定めれば  $a$ ,  $CMM$ ,  $C20$  は  $b$  の関数であるので、未知数はすべて定まる。よって(52)は定まり衝撃波の形状は定まる。

近似方法 その2

前節近似方法その1で述べたものに更に修正を加えるものとする。

- 1) 衝撃波の位置を前節で述べた位置に設定する。
- 2) 衝撃波の位置から剛体面まで計算を行い、誤差  $ED(N, J)$  を出す。

$ED(N, J)$  のうち、 $N$  は逆解法を行った回数を示し、 $J$  は座標を示す(図6参照)。そして逆解法を行っていった場合(4)の条件を満足する座標を  $R(N, J)$  とする。又剛体面を  $W0(J)$  とし、

$$ED(N, J) = W0(J) - R(N, J) \quad (53)$$

となる。この値を最小にもっていけばよいわけである。そのためには衝撃波の形を変形して、(53)を最小にするわけである。衝撃波の変動分を  $DW$  とし、

$$\frac{\partial^2 DW}{\partial \phi^2} = DDA(J) \quad (J \text{ に於ける値}) \quad (54)$$

とする。この値を各  $J$  点について変えつつ(53)の絶対値が最小となることを目指すわけであり、この方法で事実成功した。

$DDA(J)$  は  $\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}$  の変動分であるから、その影響は、図15に於て、 $C$  側に及ぶ、 $\frac{\partial^2 DW}{\partial \phi^2}$  は加速度分に相当するから、 $\frac{\partial DW}{\partial \phi}$  は速度分に相当し、 $DW$  は位置に相当する。その位置は  $AC$  方向のものである。

よって、 $B0$  方向のずれは  $DW$  に  $\sin \theta$  をかけなければならない。つまり  $DW \cdot \sin \theta$  分だけ衝撃波の形が変わるわけで、これが  $A$  から  $C$  へと修正を行ってゆくうちにたえず積分されてゆくわけである。

又前述の如く、 $DDA(J) = \frac{\partial^2 DW}{\partial \phi^2}$  の値を、図に示す  $J=1 \dots 19$  上の点に於て加減し、(53)に示した  $ED(N, J)$  の値の絶対値を最小にするようにもってゆくわけである(図15参照)。

そうすれば当然境界値問題であるからして、 $DEF$  上の点に誤差を生ずるが、その値はかなり小さい事が経験的にも解明された。理論的にもそのようになるのは(53)式に述べたとおりである。又このような操作を  $C$  点までつづけてゆくと、当然  $\frac{\partial W}{\partial \phi}$  が、つまり速度分が0でなくなる。それは  $J=1$  の衝撃波の位置を操作することによって、0に出来る、この動きは常に線型的であるので、容易である。

具体例

錐状流であるために物体は半無限体を仮定する。前述の如く、 $x$  軸、 $y$  軸の  $90^\circ$  の間を18等分し、その線上で計算することにする。そして、図5に於て、 $y = mx$  と衝撃波面との交点を  $W$  とし、 $m$  は1から19までの整数値をとる  $90^\circ$  を18等分すれ

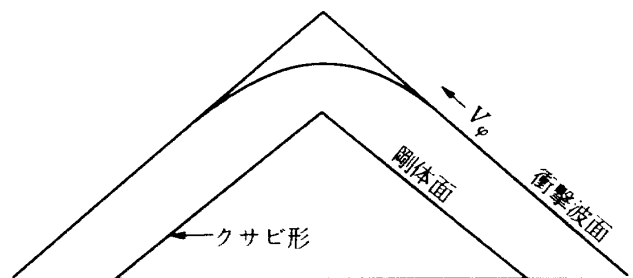


図14  $V_\phi$  と衝撃波面の関係

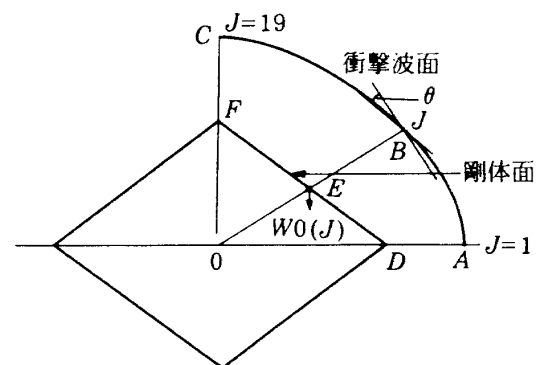


図15  $W0(J)$  と、 $J$  の関係

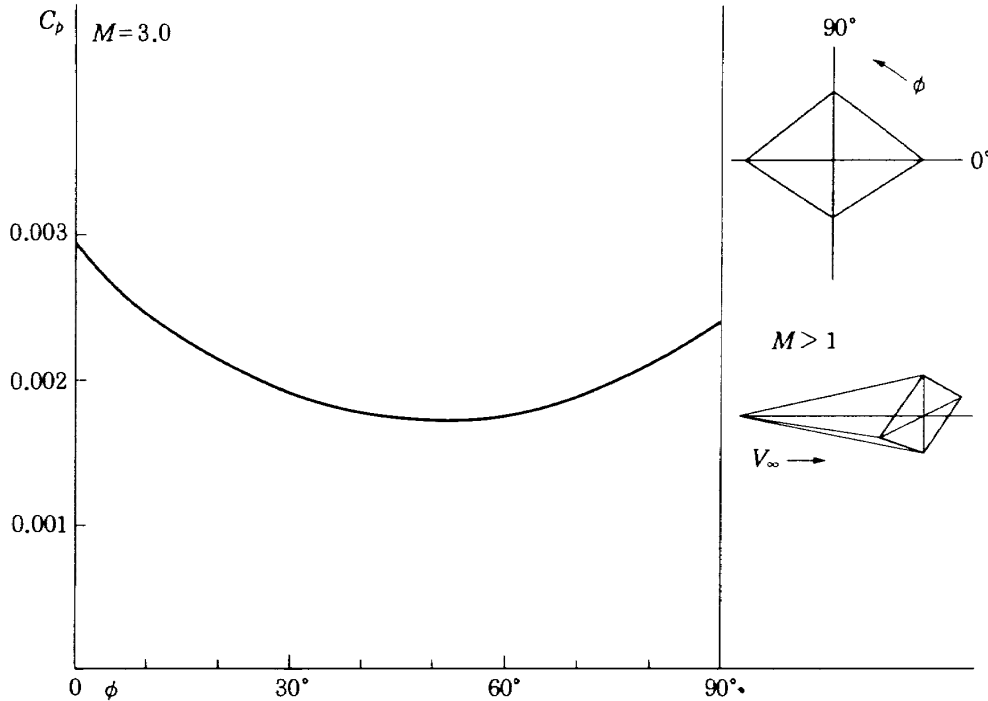


図16 物体表面の圧力分布（圧力係数）

ば1区間は5°であり、 $m$ が1から19まで変化することは、角度が0°から90°までとることを意味する（5°づつとびとびの値をとる）（図8参照）。

次にくさび形の形状を次の如く定める（図8参照  $J$ は場所を示す）。

$$CM = \tan(J-1) ((\pi/2.0/18.0)) (= YY/XX)$$

（ $J$ 点に於ける勾配を示す）

$$A11 = 2.0 \cdot \tan(0.116)$$

$$B11 = 2.0 \cdot \tan(0.100)$$

（図6参照）。

$$CCB = B11/A11$$

$$XX = (CB11 + CCB \cdot A11)$$

$$/(CM + CCB)^2$$

$$YY = CM^2 \cdot XX$$

$$W0(J) = ATAN((SQRT(XX + YY)/2.0))$$

と定め、又マッハ数は3.0の場合について計算した。そのくさび形物体上の圧力係数の結果を図16に示す。

### 結 論

1. 本研究では計算を単純化するために、従来の研究では必ず入ってくる。圧力項、密度項を消去した式を提案した。それによって近似性が向上するはずである。

2. 衝撃波をまずTaylor-Maccollの場合について計算し、境界条件を考慮しつつ修正し、ほぼ満足出来る解が得られた。

### 参 考 文 献

- 1) Briggs, B. P. 1959 : Calculation of Supersonic flow past bodies shaped like elliptic cones, NACA, Rep, No.D-24.
- 2) Butler, D. S, 1960 : The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations in three independent variables, Proc, Roy. Soc, A, 255, 232.
- 3) Ferri A, 1951 : Supersonic flow around circular cones at angles of attack, NACA Rep, No.1045.
- 4) Ferri A, 1959 : Review of Recent developments in hypersonic flow, Adv, Aero. Sci 2, 744.
- 5) Shapiro. A. R : The Dynamics and Thermodynamics of Compressible fluid flow. pp.654.
- 6) Stocker, P. M. and Manger, F. E. : J. Fluid, Mech 13, 383 (1962).



- 7) Tamaki, F, Hinada, M. and Kurosaki, M : 回年会講演集, p.59 (1972).  
ISAS, Rep, No.469 (1971). 9) 近藤次郎：“高速空気力学”，コロナ社, pp.  
Kurosaki, M : ISAS, Rep, No.498 (1973). 128.
- 8) 本田 睦, 杉山 弘 : 日本航空宇宙学会第 3

---

## 航空宇宙技術研究所報告1097号

平成3年2月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1  
電話三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川2-27-12

---

