

A03 航空機軽量化のための直交異方性角パイプの座屈解析

○水上 諒 (神奈川大・院), 喜多村 竜太, 高野 敦 (神奈川大)

Ryo Mizukami, Atsushi Takano, Ryuta Kitamura (Kanagawa University)

1. 研究背景

火星探査航空機プロジェクト^{[1][2]}では, JAXA と国内大学が連携して世界初の地球外惑星大気圏内飛行探査を目指している. 航空機探査が可能となれば, 探査車のように火星の複雑な地形に左右されず, また人工衛星では撮影が困難な場所 (溪谷の断面など) を探査できる. そのプロジェクトの一環として地球での高高度飛行試験を行うための機体の翼を設計した際, 前桁は角パイプで設計した. また火星は大気密度が小さく機体の得る揚力が小さくなることから, 機体の軽量化が求められる. そのため桁材は CFRP 製の角パイプにて製作することとした.

このような翼の設計において, 直交異方性角パイプの座屈を計算する簡便な式がなかったため, 等方性材料の式に当てはめて計算を行っていた. そこで, 異方性の影響を計算に反映するため, 空力荷重による翼のねじりと曲げを想定し, 直交異方性角パイプで構成される片持ち梁の座屈についての数値解析を行い, またこの数値解析により得られた解を多項式近似で表し, 設計に用いることが可能な数表として与えようとした.

2. ねじりトルクを受ける片持ち梁

前述の通り, 翼の桁に用いる角パイプを想定し, 図1に示すような一端を固定した片持ちの角パイプ梁についての解析を行う.

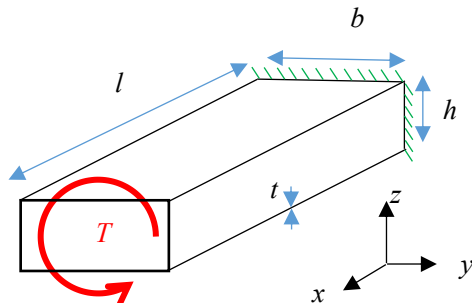


図1 ねじりトルクを受ける片持ち角パイプ梁

角パイプは縦板2枚, 横板2枚の4枚の板で構成されているものとして考える. 4枚の平板で構成される角パイプの歪みエネルギーの式は式(1)で表わせる^[3].

$$\begin{aligned}
 U = & 2 \times \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^b \left\{ D_{xx} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2(2D_{ss} + D_{yy}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\
 & + 4D_{xs} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + 4D_{ys} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + D_{yy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \left. \right\} dS \\
 & + 2 \times \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^h \left\{ D_{xx} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2(2D_{ss} + D_{zz}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right. \\
 & + 4D_{xs} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + 4D_{zs} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + D_{zz} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 \left. \right\} dS
 \end{aligned} \quad (1)$$

角パイプのねじり時のせん断座屈応力を求めるには縦板と横板の両方の面外変形を考慮する必要がある^[4]. 横板の面外 (z 軸方向) 変位を w , 縦板の面外 (y 軸方向) 変位を v としエネルギー法によってせん断座屈応力を求める. 関数を B_{mn} , H_{mn} とすると, 縦板横板ともに4辺単純支持と考えると座屈時の面外変位は以下で表される

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi z}{h} \quad (3)$$

また縦板横板の面外変位は連成し, 端辺での互いのなす角が変形後も変化しないと仮定すると式(2), (3)より共用の関数 Φ_{mn} を用いて B_{mn} と H_{mn} は以下の式(4)で表される.

$$\frac{B_{mn}}{b} = \frac{H_{mn}}{h} = \frac{\Phi_{mn}}{\sqrt{bh}} \quad (4)$$

この関係より, 式(2), (3)の w , v は以下のように書き換えられる.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{b}{h}} \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{h}{b}} \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi z}{b} \quad (6)$$

式(5), (6)を式(1)へ代入し, 積分すると式(7)となる.

$$\begin{aligned}
U = & 2 \times \frac{\pi^4}{8b^2hl^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}^2 \{ b^4 D_{xx} m^4 + \\
& 2b^2 (2D_{ss} + D_{xy}) m^2 n^2 + D_{yy} n^4 \} \\
& + 2 \times \frac{\pi^4}{8bh^2l^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}^2 \{ h^4 D_{xx} m^4 + \\
& 2h^2 (2D_{ss} + D_{xz}) m^2 n^2 + D_{zz} n^4 \}
\end{aligned} \quad (7)$$

さらにねじりトルクによる仕事 W_s は

$$\begin{aligned}
W_s = & 8t\tau_{cr} \frac{b}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{mnij\Phi_{mn}\Phi_{ij}}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)} \\
& + 8t\tau_{cr} \frac{h}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{mnij\Phi_{mn}\Phi_{ij}}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)}
\end{aligned} \quad (8)$$

と表せる⁴⁾。ただしここでの総和記号は i については $i+m$ が奇数のみの和を、 j については $j+n$ が奇数のみの和をとる。

また、エネルギー停留の原理から

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_{mn}} (U - W_s) = 0 \quad (9)$$

が成り立つので、式(9)に式(7),(8)を代入し、整理すると式(10)が得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi^4}{32\tau_{cr}tbh} \left\{ \left(\frac{b}{l} \right)^3 \left[D_{xx} m^2 + 2(2D_{ss} + D_{xy}) \left(\frac{l}{b} \right)^2 n^2 + D_{yy} \left(\frac{l}{b} \right)^4 m^4 \right] \right. \\
& \left. + \left(\frac{h}{l} \right)^3 \left[D_{xx} m^2 + 2(2D_{ss} + D_{xz}) \left(\frac{l}{h} \right)^2 n^2 + D_{zz} \left(\frac{l}{h} \right)^4 m^4 \right] \right\} \Phi_{mn} \\
& - mm \frac{1}{b} \frac{1}{h} \left[\left(\frac{l}{b} \right)^2 + \left(\frac{l}{h} \right)^2 \right] \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{ij\Phi_{ij}}{(i^2 - m^2)(j^2 - n^2)} = 0
\end{aligned} \quad (10)$$

式(10)の解は $\Phi_{mn} \neq 0$ すなわち Φ_{mn} の係数行列式が 0 となる場合に与えられる。式(10)より導かれる係数行列式は $m+n$ について奇数のみのものと、 $m+n$ について偶数のみのものに分れる。 $a \times b$ の平板の場合 $a/b=0.5 \sim 2$ においては偶数のみのもののほうが低い座屈応力を与える⁵⁾。そこでより低い座屈応力を与えると考えられる $m+n$ が偶数のみのものについて数値計算を行った。式(10)を解くと、せん断座屈応力 τ_{cr} が求まる。式(10)に式(11)を代入し解くと、せん断座屈係数 k_s が求まる⁶⁾。

$$\begin{aligned}
\tau_{cr} = & k_s \frac{\pi^2 D_e}{tl^2} \\
= & k_s \frac{\pi^2 \sqrt{D_{xx} \times D_{yy} + D_{xy} + 2D_{ss}}}{tl^2} \quad (11)
\end{aligned}$$

図2に示すように、数値計算において、20項で $l=1000$ [mm]程度まで FEM に近い解析値が得られたため、以降20項で数値計算を行った。

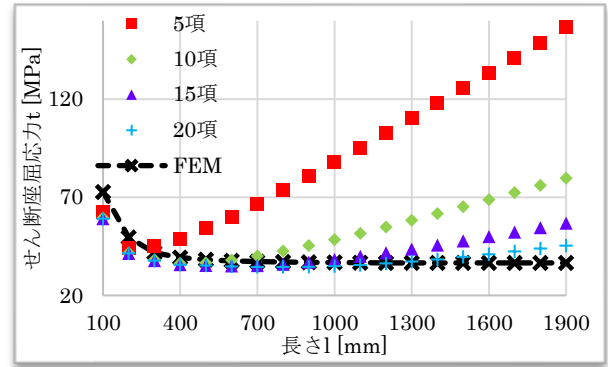


図2 項数による座屈応力の変化($h=100, b=100$)

3. ねじりトルクによる座屈の多項式近似

角パイプを構成する平板を32層積層として表1のように $\pm 45^\circ$ 積層から4層ずつ $0/90^\circ$ 積層に変え数値解析を行った。

表1 積層構成

積層の枚数		0/90 積層の割合
0/90	± 45	r
0	32	0
4	28	0.125
8	24	0.25
12	20	0.375
16	16	0.5
20	12	0.625
24	8	0.75
28	4	0.875
32	0	1

積層の枚数のみを考慮するため積層数は十分多く、厚さ方向に均一とみなせると仮定し曲げ剛性 $E_{ij} \frac{t^3}{12} = D_{ij}$ として計算を行った。

この積層における0/90積層の割合 r 、長さ高さ比 l/h 、長さ幅 l/b の多項式で座屈応力係数 k_s を表す。回帰分析を行い式(12)から係数を a_{nij} 求めようとした。

$$k_s' = \sum_{n=1}^k \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{nij} \left(\frac{l}{h} \right)^{h-1} \left(\frac{l}{b} \right)^{i-1} r^{j-1} \quad (12)$$

しかし、式(12)による近似では係数 a_{nij} が多くなければよい近似値が得られず、図3に示すように係数14項で最大誤差23.3%となった。

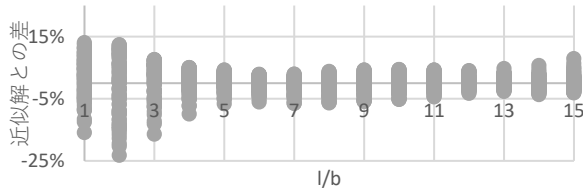


図3 式(12)による多項式近似 (係数14項)

座屈応力係数 k_s を横軸を長さ幅比 l/b , 長さ高さ比 l/h , 0/90 積層の割合 r でプロットしたグラフを図4~6に示す.

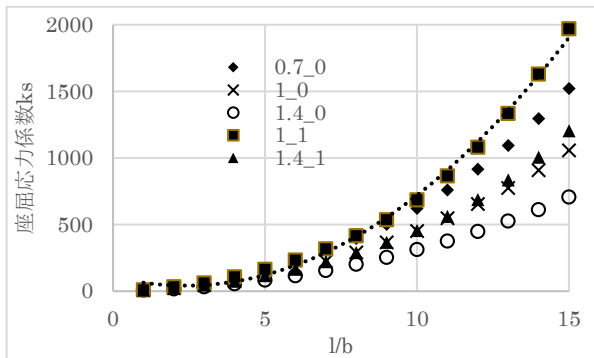


図4 k_s - l/b グラフ (h/b_r ごと)

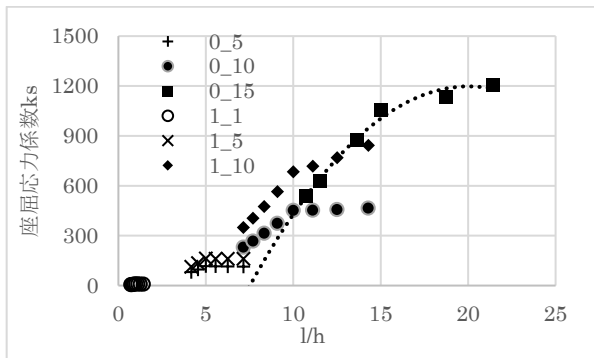


図5 k_s - l/h グラフ (r_l/b ごと)

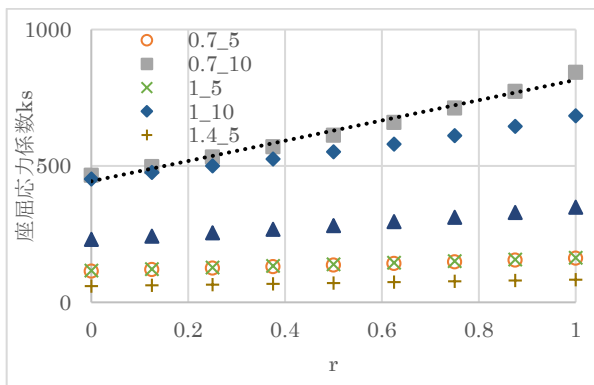


図6 k_s - r グラフ ($h/b_l/b$ ごと)

図4~6より, 座屈応力係数 k_s は l/b , l/h の2次関数, および r の1次関数の積で表わせると考え,

$$K'_s = (B_1 + B_2 \frac{l}{b} + B_3 (\frac{l}{b})^2)(H_1 + H_2 \frac{l}{h} + H_3 (\frac{l}{h})^2) (R_1 + R_2 r) \quad (13)$$

のように定義した. この近似式 k'_s の k_s との差の絶対値を最小化した得られた近似式の係数は表2で表わせる. 図7に示すように両者の差は最大で16.4%となり, 式(12)の近似式よりも最大誤差も係数の数も小さくすることが出来た.

表2 近似式係数

B_1	3.15	H_1	4.71
B_2	20.7	H_2	5.00
B_3	1.29×10^{-1}	H_3	1.07×10^{-1}
R_1	3.22×10^{-2}		
R_2	1.54×10^{-2}		

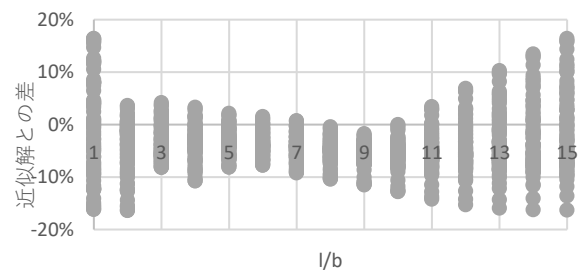


図7 式13による多項式近似 (係数8項)

4. 曲げモーメントを受ける片持ち梁

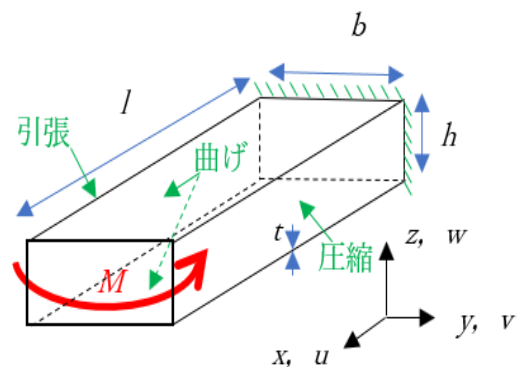


図8 曲げモーメントを受ける片持ち梁

平板の曲げ歪みエネルギー U と上下面の曲げによる仕事 W_B , 右側面の圧縮による仕事 W_C から座屈荷重 σ_B を求める. 従来の研究では角パイプの上下面と右側面

の3面のみが座屈することから3面のエネルギーのみ計算で考慮していた⁴⁾。しかしエネルギーとしては4面すべてが影響を与えるであろうと考え、角パイプの上下面と右側面の3面のエネルギー考慮する場合と角パイプの上下面と両側面が4面のエネルギー考慮する場合、そのどちらがより正確に座屈を表せているかFEMと比較することとした。

変位は以下の式(14), (15)で表される。

$$w = \sin \frac{m\pi x}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{b}{h}} \Phi_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (14)$$

$$v = \sin \frac{m\pi x}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{h}{b}} \Phi_n \sin \frac{n\pi y}{h} \quad (15)$$

4枚の板の曲げ歪みエネルギー U は式(7)であり、3枚の板の曲げ歪みエネルギー U は式(7)の第2項を1/2したものである。

上下面の曲げによる仕事 W_B および右側面の圧縮による仕事 W_C は式(16), (17)で表される。

$$W_B = 4m^2 \frac{b^2}{hl} \sigma_B t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_j \Phi_n \Phi_j \frac{j}{(n^2 - j^2)} \quad (16)$$

$$W_C = \frac{\pi^2 b^2}{8 hl} m^2 \sigma_B t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_j \Phi_n^2 \quad (17)$$

以上の式にエネルギー停留の原理を適応する。

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_n} (U - W_B - W_C) = 0 \quad (9)$$

n を変化させ得られた Φ_n の係数行列式が0となるように解く。また m は座屈応力が最小となる値をとるまた座屈荷重 σ_B は長さ l に左右されないため、 h/b を変化させ解析する。なお、数値計算において、図9に示すように、5項以上では結果に顕著な差異は認められなかった。以降5項での数値計算を行った。

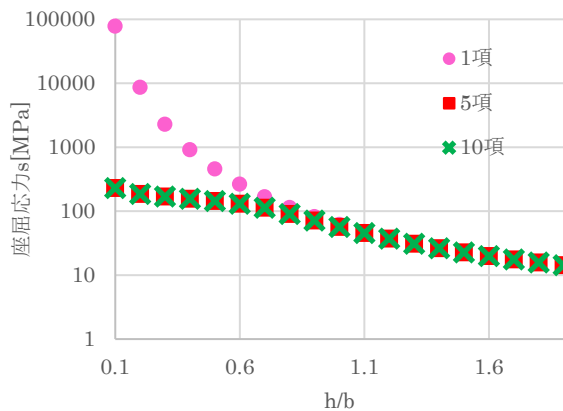


図9 項数による座屈応力の変化

図10に示すように、解析結果としては3枚分の歪みエネルギーで計算した場合はFEMの3倍、4枚分の歪みエネルギーで計算した場合はFEMの2倍程度大きくどちらもよい解とは言えない。

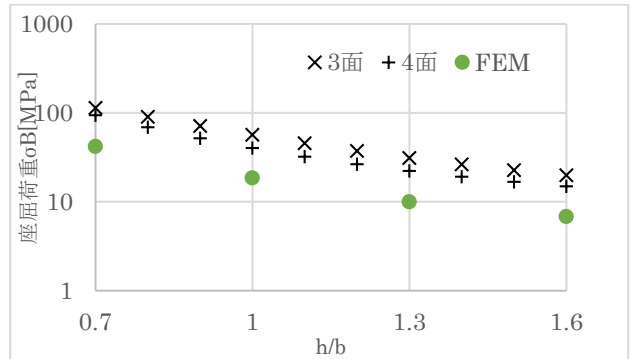


図10 座屈荷重の比較

図11のFEMのモデルを確認すると圧縮荷重を受ける右側面に変位が集中しているため圧縮座屈が支配的であると考える。そこで式(18)による平板1枚の圧縮座屈の計算との比較を行った。

$$\sigma_{cr} = \left(\frac{mh}{l} + \frac{l}{mh} \right)^2 \frac{\pi^2 D_e}{tl^2} \quad (18)$$

図12に示すように、FEMと比較すると平板1枚の圧縮座屈荷重は低くなり、安全側であるため平板の圧縮座屈の計算の式を角パイプの計算に用いることが可能である。

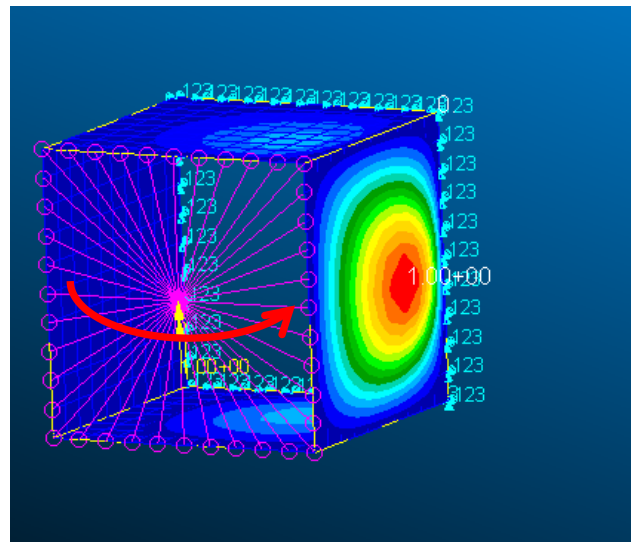


図11 曲げモーメントを受けるFEMモデル (端部単純支持)

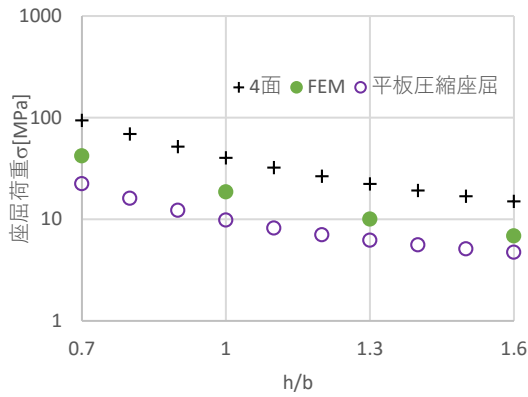


図12 平板と角パイプの座屈比較

5. 結論

ねじりトルクによる座屈の解析結果について最大で16.4%の誤差はあるものの、座屈応力係数 k_s は l/b 、 l/h の2次関数、および r の1次関数の積からなる数式で表すことができた。また曲げモーメントによる座屈の解析はエネルギー法を用いずとも簡単な平板の圧縮座屈の計算式を利用することが可能であることを確認した。

参考文献

- [1] 大山聖, 永井大樹, 得竹浩, 藤田昂志, 安養寺正之, 豊田裕之, 宮澤優, 米本浩一, 岡本正人, 野々村拓, 元田敏和, 竹内伸介, 鎌田幸男, 大槻真嗣, 浅井圭介, 藤井孝藏, 火星飛行機の高高度飛行試験(MABE-1)の概要, 1A15, 日本航空宇宙学会年会講演会, 東京都, 4月13日, 2017.
- [2] 水上諒, 大山聖, 竹内伸介, 高野敦, 火星探査航空機主翼の設計製作と剛性試験, 日本航空宇宙学会年会講演会, 東京都, 4月18日, 2019
- [3] 水上諒, 高野敦, 直交異方性角パイプの座屈解析, 日本航空宇宙学会構造強度に関する講演会, 東長野県, 8月7日, 2019
- [4] 古巢克也, 薄板で構成された箱型断面梁の座屈に関する研究, 3月, 2016
- [5] 小林繁夫, 航空機構造力学, プレアデス出版, 2014
- [6] 高野敦, 鶴巻晃, 直交異方性曲面板の剪断座屈強度, スカイスポーツシンポジウム講演集 10, pp. 59-64, 2004