

直交格子上的の有限差分法による非一様波動方程式解法の精度検証

池田 友明 (JAXA 航空技術部門)

Accuracy Verification for the Inhomogeneous Wave Equation Discretized by a Finite Difference Scheme on Homogeneous Cartesian Grid

IKEDA Tomoaki (JAXA ATD)

ABSTRACT

The inhomogeneous wave equation (IWE) solver has been developed in JAXA in the framework of discretization on homogeneous Cartesian grid, to solve acoustic propagation with local convection effects, as well as acoustic interference with solid wall, such as reflection, diffraction, and scattering. In this study, the order of accuracy of the present IWE solver is investigated. First, the practical accuracy in the acoustic scattering on an isolated vortex is numerically evaluated as a verification study for the acoustic propagation in inhomogeneous flow. The resultant order of accuracy is close to 6, which coincides with the discretization error of convection terms. In addition, the accuracy of the immersed boundary method implemented in the present solver is assessed by using a one-dimensional wall reflection problem. The supposed accuracy of immersed boundary is second order at most, as second-order accurate schemes are used for the Neumann boundary condition, and linear interpolation is utilized to identify the wall location. However, the attained accuracy in the one-dimensional problem is third order. Moreover, in some specific cases, fifth-order accuracy is obtained. The third-order accuracy is also achieved in a two-dimensional problem with wall reflection.

1. 研究目的

近年の計算機能力の進化に伴い、航空機の騒音予測にはより高精度な Computational Aeroacoustics (CAA) 手法が提案されている。特に、流れと音の伝播を分離しそれぞれを評価する分離解法においては、空間を三次元的に離散化し、流れ場の局所的な移流速度分布、回折・反射・散乱等を考慮しつつ音の伝播を時間発展的に高次精度で解く Linearized Euler Equations (LEE) 法に代表される手法が注目されている^(1,2,3)。しかしながら、時間積分に Runge-Kutta 法などの陽的スキームがしばしば使われるため、時間刻み幅の制限が大きく計算コストが増大する主因となっている。

一方、同様に局所的な移流効果を考慮できる形で導出された非一様波動方程式解法は、LEE などと比べて低い計算コストで三次元場の騒音伝播を高解像度で解析可能な手法である。筆者は既報で、非一様波動方程式の直交格子上的の高次精度解法について提案し、任意物体形状表面での音の反射・遮蔽効果を解析するために埋込境界法を導入した^(4,5)。高次精度解法として高次のコンパクト差分法を採用し^(6,7)、埋込境界条件には、最低限 2 次精度を実現する離散化手法を採用する。

本稿では、高次コンパクト差分を用いた離散化手法及び 2 次精度埋込境界法の精度検証を行う。非一様な場での音響散乱解析などを通して、想定された次数での精度が得られていることを確認する。

2. 基礎方程式

本節では音響変動の伝播を解く非一様波動方程式を示す。流れ場は CFD 等により求められた時間平均場もしくは定常場が与えられるものとし、流れを伴う空間中を微小音響変動

が伝播する。音響変動に基づく速度ポテンシャルを ϕ とすると、非一様波動方程式は以下のように書ける⁽⁸⁾：

$$\left[\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \nabla) - \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{c^2} \frac{D}{Dt} \right) \right] \phi = S \quad (1)$$

ここで ρ は流れ場の密度、 c は局所音速、 $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$ は流線に沿った時間微分、 \vec{u} は流速、 S には音源を与える。ポテンシャル ϕ により、速度変動 \vec{u}' と圧力変動 p' は以下のように表される：

$$\vec{u}' = \nabla \phi, \quad p' = -\rho \frac{D\phi}{Dt} \quad (2)$$

Eq. (1) は流れ場が非回転且つ等エントロピーである時に与えられる波動方程式と同じ形であるが、それらの仮定を満たさない場合にも、流れ場の変動スケールが音波の波長並びに変動スケールより十分大きければ Eq. (1) は近似的に有効である。

波動方程式 Eq. (1) は、有限差分法により時間発展的に解かれる場合もあるが、ここでは周波数領域で解く事を考える。速度ポテンシャル ϕ と音源 S を時間に関してフーリエモードに分解する時、周波数 ω の寄与について

$$\phi(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \hat{\phi}(\vec{x}), \quad S(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \hat{S}(\vec{x})$$

と置くと

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -i\omega e^{-i\omega t} \hat{\phi}$$

より、以下の周波数領域波動方程式が求まる：

$$\left[\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \nabla) - \vec{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{c^2} \vec{u} \cdot \nabla \right) + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 + i\omega \left(\vec{u} \cdot \nabla \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} \vec{u} \cdot \nabla \right) \right] \hat{\phi} = \hat{S} \quad (3)$$

Eq. (3) は Helmholtz 方程式に、左辺第二項と第四項の移流効果が加わった楕円型方程式である。等間隔直交格子上で高次コンパクト差分法^(6,7)により離散化された Eq. (3) は、Erlangga らにより提案されている Shifted Laplace 法⁽⁹⁾により陰的に解く。以下では Eq. (3) を基礎方程式として解の精度について検討する。また表記の簡易化のために、フーリエモードを表す $\hat{\cdot}$ を省略する。

3. 非一様場中の計算精度

本節では、非一様場で高次精度を実現する方法について検討する。Eq. (3) は、非一様場において座標に依存する非定数係数を含むため、高次精度を保つためには特に二階微分項を離散化する際に注意を要する。 α, β を非定数係数として、一般に二階微分項は

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\beta \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \phi = \frac{\partial^2 (\alpha \beta \phi)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} [(\alpha \beta_{x_j} + \beta \alpha_{x_j}) \phi] - \frac{\partial}{\partial x_j} (\beta \alpha_{x_i} \phi) + (\beta \alpha_{x_i})_{x_j} \phi \quad (4)$$

と二階と一階の微分項に関して、微分演算子の中に従属変数を含めた非定数項を入れる形に変形できる。このように非定数係数も含めて微分演算子の中に入れることで、非一様場でも微分演算子の離散化精度を保つことができる。本研究では、二階微分項の離散化に 8 次精度コンパクト差分を、一階微分項には 6 次精度コンパクト差分を用いる⁽⁴⁾。このため、移流が存在する非均一場では、全体で 6 次精度となることが期待される。以下、その精度検証例を示す。

3.1. 検証例：静止渦による音響散乱

二次元場で原点を渦中心とする以下の孤立等エントロピー渦を背景流れ場として与える：

$$u_\theta = VR \exp\left(\frac{1-R^2}{2}\right) \\ p = p_\infty \left[1 - \frac{1}{2}(\gamma-1)(VR)^2 \exp(1-R^2)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (5)$$

ここで $R = \sqrt{x^2 + y^2}/r_v$ 、 r_v は渦の大きさを決めるパラメータ、 V は渦の周方向速度最大値であり、今 $r_v = 10, V = 0.3$ を与える。

渦上を伝播する音源には、 $(x, y) = (0, 20)$ を音源中心として以下の単極子音源を与える：

$$S = A \exp\left(-\ln(2) \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \cdot \cos(\omega t) \quad (6)$$

ここで r は音源中心からの距離であり、本検証例では $A = 10^{-4}, \sigma = 3.0, \omega = 0.5$ を用いる。周波数 $\omega = 0.5$ は、静止場での音波長が 12.6 に相当する。

計算領域は $[-500, +500] \times [-500, +500]$ の範囲で取る。この領域を $15,000 \times 15,000 = 2.3 \times 10^8$ の格子点数で解像した“最も細かい格子”上での解と比較して、より粗い格子の解との誤差を離散化誤差として見積もる。なお、最も細かい格子での 1 波長当りの格子点数 (PPW) は静止場でおおよそ 190 である。

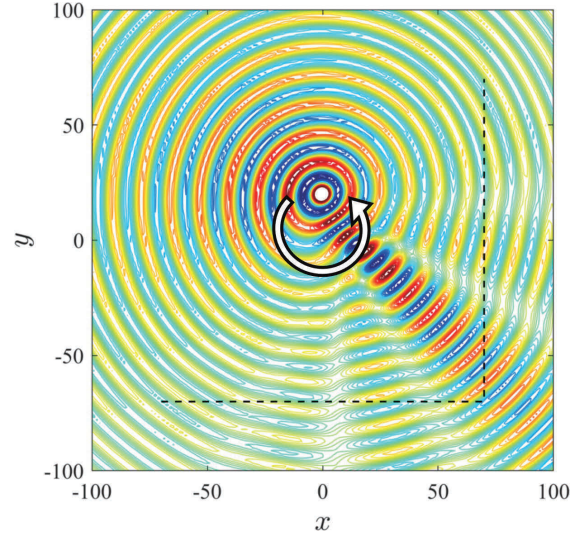


Fig. 1 Instantaneous view of acoustic scattering by an isolated vortex. Dashed lines at $x = 70$ and $y = -70$ denote monitoring locations for discretization error.

Fig. 1 に、格子解像度 9PPW での瞬時の圧力分布を示す。渦中心より上方にずれた位置からの音の放射に関して、特に右斜め下方向に移流による音圧の不均一が強く表れる。この瞬時の音圧を、 $x = +70 (-70 \leq y \leq +70)$ 及び $y = -70 (-70 \leq x \leq +70)$ に沿って最も細かい格子の解と比較する。

Fig. 2 に 3.7PPW から 13PPW の範囲での誤差比較を示す。PPW はいずれも解析空間中の最大値と最小値の平均である。Standard として標準的なコンパクト差分スキームを、さらに比較のために Tam らによって提案された最適化手法⁽¹⁰⁾による修正スキームを Optimized として示している。Standard の離散化誤差は対数グラフ上でほぼ直線的な傾向を示しており、傾きの平均値はおおよそ 5.6 である。格子の特に粗い箇所では傾きがやや減少する傾向が見られるが、ほぼ 6 次精度を実現出来ていると考えて良い。これに対して、Tam らによる Optimized スキームでは、格子の粗い範囲では Standard スキームよりも誤差が小さいものの、7.5PPW 辺りで Standard スキームとほぼ同等の誤差となり、さらに格子が細くなると Optimized スキームの優位性はなくなる。Optimized スキームの精度の次数は 4 であるが、今回検証した範囲の PPW においては誤差は非線形的な振る舞いを見せる。

4. 埋込境界条件

埋込境界で非透過固体壁を考慮する場合には、速度ポテンシャル ϕ に関して境界面上で以下の Neumann 条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (7)$$

を満たすように解く。非透過壁が Fig. 3 のように与えられるとすると、壁面を挟んで物体内部に ghost 点が存在する。この時 ghost 点 O とそれに隣り合う field 点 A とを繋ぐ格子エッジ \overline{OA} が壁面と交差する点 P 上で、境界条件 Eq. (7) を考慮する。

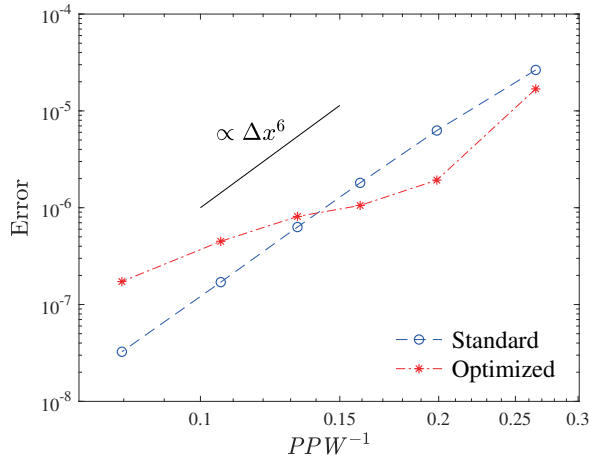


Fig. 2 Discretization error dependence on grid resolution in acoustic scattering by an isolated vortex. Standard and optimized compact schemes are compared.

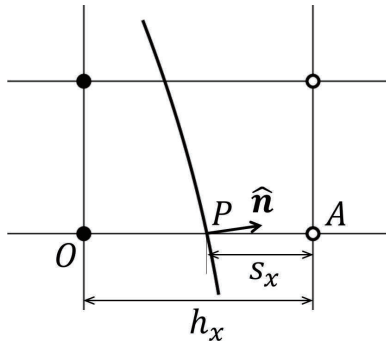


Fig. 3 A schematic view of immersed boundary on Cartesian grid. Filled circles are ghost nodes, while blank circles indicate the acoustic field to be solved.

$\partial/\partial n$ を離散化した差分演算子を δ_n と表すと、点 O, A それぞれで評価された $\delta_n \phi$ の線形補間により点 P 上での離散化された Neumann 条件式を以下のように与える:

$$\delta_n \phi_P = \frac{s_x}{h_x} \delta_n \phi_O + \left(1 - \frac{s_x}{h_x}\right) \delta_n \phi_A = 0 \quad (8)$$

この時エッジ方向の差分 δ_x には、点 O では点 A 側にステンシルが延びる片側前進差分を、点 A では点 O 側に 1 点バイアスをかけた前進差分を用いる。

4.1. 検証例：一次元壁面反射

検証例として $0 \leq x \leq 1$ で定義された以下の一次元 Helmholtz 方程式を解く：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right) \phi = 0 \quad (9)$$

境界条件：

$$\phi_x = 0 \text{ at } x = 0, \quad \phi = \cos(k) \text{ at } x = 1 \quad (10)$$

この問題の解析解は $\phi = \cos(kx)$ であるため、数値解と解析解の差を離散化誤差と定義できる。 $0 \leq x \leq 1$ を N 分割する時、 $k = 2\pi n$ として、一次元 Helmholtz 方程式は

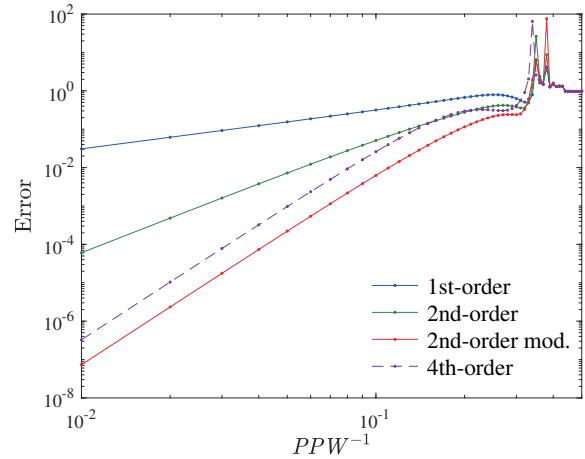


Fig. 4 Discretization error dependence on grid resolution in a one-dimensional wall reflection problem for $x_w = 0$.

$n = 1, 2, \dots, N/2$ の範囲で解を持つ。離散化誤差の PPW 依存性を調べるために、ここでは n を取り得る範囲で変化させ、誤差を評価する。

$x = 0$ での離散化された Neumann 条件について、まずは ghost 点と壁面が一致するケースについて検討する。壁面位置を表すパラメータ $x_w = 1 - s_x/h_x$ を定義すると、Fig. 3 及び Eq. (8) において $s_x/h_x = 1$ 、即ち $x_w = 0$ のケースである。この時、壁面での ϕ の勾配は片側差分により評価される。Fig. 4 では、各種片側差分スキームを用いた結果を比較している。1次精度スキームを使う時、誤差は Δx に比例し、誤差と PPW^{-1} の対数グラフにおいても低波数の範囲で傾き 1 を示す。しかしながら、3点 2次精度スキームを用いると、傾きは 3 となり実質 3次精度を示す。また、3点 2次精度スキームと 4点 3次精度スキームとの算術平均である修正 2次精度スキームを適用すると、傾きは 5 となり 5次精度を示す。これは Vatsa らの提案する⁽¹¹⁾ 4点で最適化された 2次精度片側差分である。参考のために 5点 4次精度スキームを適用しても同様に 5次精度が得られるが、誤差の絶対値は修正 2次精度スキームよりも大きい。

このように、想定される精度よりも実質高い次数の精度が得られる理由は、周波数領域で解かれる勾配ゼロの Neumann 条件にある。Neumann 条件を適用すると、得られる解は壁面に関して対称な偶関数となり、壁面で評価される ϕ_x は奇関数となる。離散化時に現れる偶数次の誤差は消えるため、誤差は全て奇数次となる。さらに、Vatsa らが提案する 4点修正 2次精度スキーム⁽¹¹⁾ は、3次の誤差項の係数が 0 であるため、5点 4次精度スキームと同様に 5次精度が実現する。

次に、壁面位置を $x_w = 0$ から 1 まで 0.25 きざみで変化させた場合の離散化誤差を調べる。Eq. (8) の $\delta_n \phi_O$ に上述の Vatsa が提案する 4点修正 2次精度スキームを、 $\delta_n \phi_A$ に同じくステンシル 4点の 3次精度スキームを用いる。本実装法だと一般には 3次精度が実現されるが、 $x_w = 0$ と同様に $x_w = 0.5$ でも局所的に 5次精度が実現されるのがわかる。こ

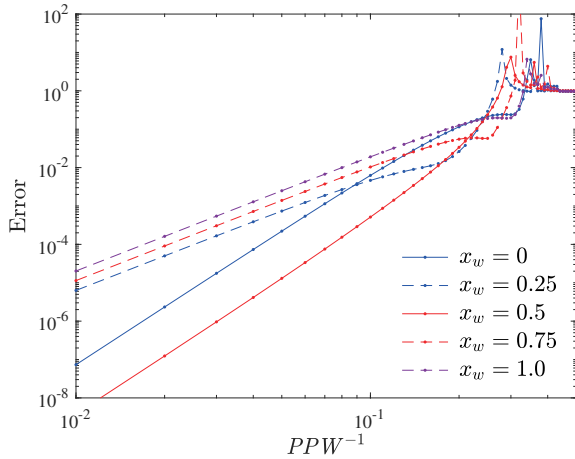


Fig. 5 Discretization error dependence on grid resolution in a one-dimensional wall reflection problem for $x_w = 0, 0.25, 0.5, 0.75,$ and 1.0 .

これは O 点で評価される 4 点修正 2 次精度スキームと、 A 点で評価される 4 点 3 次精度スキームの算術平均に関して、同様に 3 次の誤差項の係数が 0 となるためである。

一次元問題であれば壁面位置によって Neumann 条件を評価する 2 次精度スキームの係数を変化させ、常に 5 次精度を実現することも可能である。しかしながら多次元問題では OA 二点を繋ぐエッジ方向の微分に加えて、その垂直方向の微分も線形補間により評価する必要があり、総合的にさらに高精度を得るのは難しい。以下、上述の 4 点 2 次精度差分と 3 次精度差分による線形補間法を多次元問題に適用する場合について検討する。

4.2. 検証例：円柱による音響散乱

埋込境界法の多次元での適用例として二次元円柱による単極子音の散乱問題を解く^(1,4,5)。直径 D の円柱を原点周りに配置し、 $(x, y) = (4D, 0)$ の近傍に Eq. (6) の単極子音源を与える。ここで $A = 1, \sigma = 0.2D, \omega = 8\pi$ とする。直径 D が音波 4 波長分に相当する。本検証例題には解析解が存在するため、数値解との誤差を離散化誤差として評価できる。誤差は原点からの距離 $r = 10D$ の位置での音圧 rms 値で評価する。数値計算の解析空間は $[-10D, 10D] \times [-10D, 10D]$ とし、外側にバッファ層と無反射境界条件を設定する。Fig. 6 に $r = 10D$ での音圧 rms 値の解析解と数値解の比較を示す。本結果では格子解像度として一辺 $20D$ の解析空間に 400 点を与えている。これは、5PPW に相当する。解析解と数値解は非常に良く一致していると言える。

前節で用いた ghost 点を利用する埋込境界法に加えて、ghost 点を用いない埋込境界法⁽⁵⁾ および境界面を階段状に評価する方法に関して、離散化誤差の PPW 依存性を Fig. 7 に示す。ghost 点を用いる埋込境界条件では、今調べている範囲において、対数グラフ上で傾き 3.0 が得られている。ghost 点を用いない場合にも、誤差の絶対値は前者よりも数倍程度大きいものの、傾きは 2.7 程度で、どちらもほぼ 3 次精度が実

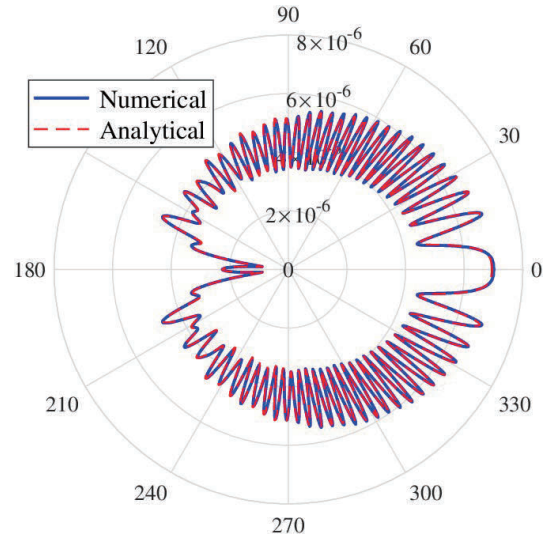


Fig. 6 The polar diagram of rms acoustic pressure of two-dimensional acoustic scattering on the circular cylinder, sampled at $r = 10D$. Numerical and analytical results are compared.

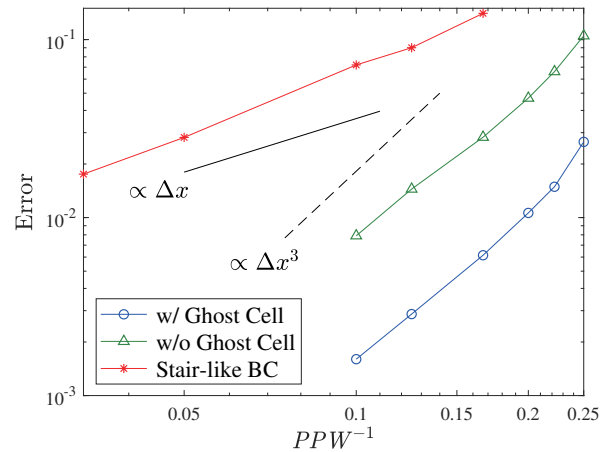


Fig. 7 Grid resolution dependence of discretization error for acoustic scattering on the circular cylinder.

現できている。それらと比較して、格子エッジに沿った階段状の境界表現では、傾き 1.3 となりほぼ 1 次精度であることがわかる。以上より、本研究での埋込境界法に関して、定式化は 2 次精度であるが実質 3 次精度を示す実装方法が実現できていると言える。

5. まとめ

本研究では、局所的な移流効果を考慮でき、高精度な騒音伝播解析を可能とする非一樣波動方程式の直交格子解法の計算精度について検討を行った。非一樣場での音の伝播は、非定数係数を持つ二階偏微分方程式を解く必要がある。まず高精度差分法を適用するにあたって、非一樣場でも精度を低下させない定式化を提案した。実際に孤立渦中によって音波が散乱される例を用いて、離散化誤差の格子解像度依存性を見積もったところ、移流項の離散化精度である 6 次精度が達成されていることが確認できた。また、最適化スキームを導

入すると、粗い格子においてはより誤差を小さくできるが、実用的な格子解像度の範囲では標準スキームと比べて必ずしも精度が向上しないことがわかった。さらに、埋込境界法定式化に関しても精度検証を行った。一次元壁面反射問題に形式的に2次精度となる離散化手法を適用したところ、一般に3次精度、場合によって5次精度が得られた。これは傾きゼロのNeumann条件から ϕ_x に奇関数であることが要求されるため、2次や4次の偶関数の振舞いを受け持つ誤差項が消えるためである。二次元円柱による音響散乱問題においても同様に3次精度が達成されることが確認できた。このように、本直交格子非一様波動方程式において、埋込境界法による非透過壁の音響散乱再現精度は3次であることがわかった。

参考文献

- (1) C. K. Tam and J. C. Hardin. *Second Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*. NASA Conference Publication 3352, 1997.
- (2) 雨宮和久, 他 3 名. 線形オイラー方程式による高揚力装置周りの放射音解析. 第 18 回 数値流体力学シンポジウム, B1-4, 2004.
- (3) Y. Fukushima, T. Misaka, S. Obayashi, S. Jeong, D. Sasaki, and K. Nakahashi. CFD-CAA coupled computation of fan noise propagation from engine nacelle based on Cartesian mesh method. *AIAA Paper 2013-2020*, 2013.
- (4) 池田友明. 非一様波動方程式の直交格子解法. 第 50 回 流体力学講演会/第 36 回 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム, 3D07, 2018.
- (5) 池田友明. 非一様音響波動方程式による騒音伝播解析. 第 51 回 流体力学講演会/第 37 回 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム, 2D09, 2019.
- (6) S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, Vol. 103, No. 1, pp. 16–42, 1992.
- (7) I. Harari and E. Turkel. Accurate finite difference methods for time-harmonic wave propagation. *J. Comput. Phys.*, Vol. 119, pp. 252–270, 1995.
- (8) A. D. Pierce. Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 87, No. 6, pp. 2292–2299, 1990.
- (9) Y. A. Erlangga, C. Vuik, and C. W. Oosterlee. On a class of preconditioners for solving the Helmholtz equation. *Appl. Numer. Math.*, Vol. 50, pp. 409–425, 2004.
- (10) C. K. W. Tam and J. C. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.*, Vol. 107, No. 2, pp. 262–281, 1993.
- (11) V. N. Vatsa, M. H. Carpenter, and D. P. Lockard. Re-evaluation of an optimized second order backward difference (BDF2OPT) scheme for unsteady flow applications. *AIAA Paper 2010-122*, 2010.