

変分原理に基づく流体中の物体に働く抗力や形状に関する統一理解にむけて

小島 直泰 (東大院), 鈴木 宏二郎 (東大新領域)

Toward unified understanding on drag and shape of a body in fluid flow based on variational principle

KOJIMA Naoyasu, SUZUKI Kojiro (The University of Tokyo)

ABSTRACT

The variational principle of the Stokes equations for low Reynolds number flow, and its relation to the drag force acting on a body immersed in fluid are discussed. The steady Stokes equations are known to be derived by minimizing the integral of the dissipation over the whole flow domain under the constraint of the equation of continuity. Considering the uniform flow at the outer boundary and the no-slip condition on the body surface, it is shown that the minimization of the dissipation is equivalent to that of the drag force acting on the body. Consequently, the drag force in the Stokes flow is smaller than that acting in the flow governed by the Navier-Stokes equations. To check the validity of the above theory, the numerical simulation was conducted by varying the Reynolds numbers.

1. 緒言

多くの物理的な問題は変分原理を用いて記述される。すなわち、実現される運動はある作用積分の値を停留にする。例えば、定常電流の問題は（適切な境界条件の下で）ポテンシャル関数がジュール熱を最小にするようにして定まる（最小発熱の原理）こと、光学の分野では2点を結ぶ光が進む経路はその光学距離を最短にするというフェルマーの原理などが知られている¹⁾。

流体力学においても、変分原理を用いた記述について古くから研究が行われており、現在では磁気流体や2相流体を含む複雑な流れの変分原理も求められている^{2),3)}。これらは新たなものの見方を与えるだけでなく、新たな解析の手法を与えたり、新たな数値解法を作成する足がかりとなったりすることが知られている。

粘性、圧縮性を含む一般的な流れはラグランジアンを用いて変分原理による記述が可能であること⁴⁾、また簡単な流れでは物理的な解釈が可能であり、非粘性、非圧縮流れでは運動エネルギーを停留させ、慣性項を無視した Stokes 近似では散逸量を停留させることが知られている^{5),6)}。

本研究では、変分原理として物理量を停留させる形で流体力学を考えることを目指し、その第一歩として慣性項を無視した Stokes 方程式が抵抗の最小値を与えることを示す。

2. Stokes 方程式と散逸の最小

2.1 Stokes 方程式

Reynolds 数が小さい場合の近似として、Navier-Stokes 方程式の慣性項 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ を無視して線形な方程式を得る Stokes 近似が知られている。ここでは特に定常で外力がない場合を考える。そのとき、Stokes 近似の方程式 (Stokes

方程式) は

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = 0 \quad (1)$$

と表される。これと非圧縮流れの連続の式

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

および有界領域 Ω における境界条件

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \bar{\mathbf{v}} \quad (3)$$

を合わせたものが解くべき方程式となる。なお、上付きバー $(\bar{\cdot})$ は、その値が境界条件等として与えられたものであることを表す。ここで、以下の定理が知られている⁷⁾。

定理 1. 問題 (1),(2),(3) の解は高々一つである⁷⁾。

2.2 Stokes 方程式の変分原理的記述

Stokes 方程式 (1) は変分原理を用いて記述できることが知られている⁶⁾。

定理 2. 定常 Stokes 方程式 (1) は連続の式 (2)、境界条件 (3) の下で散逸

$$D \left[v_i, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, p \right] = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = \int_{\Omega} 2\mu v_{(i,j)} v^{(i,j)} dV \quad (4)$$

を停留させることで得られる⁶⁾。

ただし、

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (5)$$

$$e_{ij} = v_{(i,j)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

である。

さらに、次のことが成り立つ。

定理 3. 定理 2 において、定常 Stokes 方程式 (1) は散逸 (4) の最小値 \check{D} を達成する。

すなわち、定理 2 における停留とは単なる停留ではなく、最小値を与えるものである。このことは、(4) の第二変分は停留曲線上では、

$$\delta^2 D = \mu \delta^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dV \quad (7)$$

となり、これは正定値であることと、さらに定理 1 からこの停留解が一意であることから分かる。

3. Stokes 方程式と抵抗

2 章では Stokes 方程式と散逸の関係について述べたが、ここではその関係を用いて Stokes 方程式と流体中に置かれた物体に働く抵抗について考える。

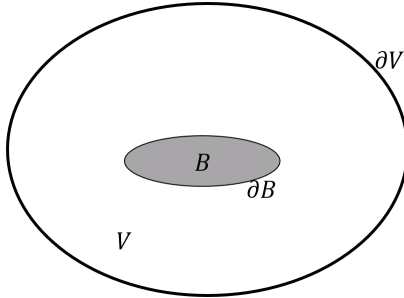


図 1 領域 V と物体 B

以下では領域は図 1 のように定め、そこでの境界条件を次のように与える。

$$v_i = 0 \quad \text{on } \partial B \quad (8)$$

$$v_i = \bar{v}_i \quad \text{on } \partial V \quad (9)$$

Berdichevsky⁶⁾ は、

$$u_i = \bar{v}_i \quad \text{on } \partial B \quad (10)$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \partial V \quad (11)$$

という境界条件を考え、散逸と抵抗を結び付けているが、このような境界条件では外力なし、散逸ありの閉じた系で外部を速度 0 で固定しており、定常解は一様に速度 0 の解になると考えられ、物体表面で 0 でない速度を得るためには物体を何らかの方法で動かすことが考えられるが、そのような場合はその座標系に対して定常な解は得られない。そのため、ここでは (8), (9) のような境界条件を考える。

このとき、流体応力は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (12)$$

であり、図 1 の物体 B に働く力 F_i は

$$F_i = \int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j dA \quad (13)$$

である。発散定理から、

$$D = \int_{V-B} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (14)$$

$$= \int_{\partial V - \partial B} \sigma_{ij} n_j v_i dA - \int_{V-B} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right) v_i dV \quad (15)$$

ここで、Stokes 方程式 (1) を途中で用いることにより

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right) v_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij}) \right) v_i \quad (16)$$

$$= \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} \right) v_i \quad (17)$$

$$= \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) v_i \quad (18)$$

$$= 0 \quad (19)$$

であり、境界条件 (8) から

$$\check{D} = \int_{\partial V - \partial B} \sigma_{ij} n_j v_i dA = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j v_i dA \quad (20)$$

また、同様にして

$$\int_{\partial V - \partial B} \sigma_{ij} n_j dA = \int_{V-B} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV = 0 \quad (21)$$

から

$$F_i = \int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j dA = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j dA \quad (22)$$

である。

散逸 (4) と物体 B に働く力 (13) を関連付けるためには、(20) と (22) をつなげることができれば良いが、これは境界条件に依存する。ここで、境界条件 (9) が ∂V (V は有限領域) での速度が一様に \bar{U}_i 、つまり

$$v_i = 0 \quad \text{on } \partial B \quad (23)$$

$$v_i = \bar{U}_i, \quad \bar{U}_i = \text{const.} \quad \text{on } \partial V \quad (24)$$

であれば、(20) は

$$\check{D} = \int_{\partial V - \partial B} \sigma_{ij} n_j \check{u}_i dA = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \check{u}_i dA \quad (25)$$

$$= \bar{U}_i \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j dA \quad (26)$$

$$= \bar{U}_i \int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j dA \quad (27)$$

$$= \bar{U}_i F_i \quad (28)$$

$$= \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{F} \quad (29)$$

$$= |\bar{\mathbf{U}}| \cdot \text{Drag} \quad (30)$$

となり、散逸の最小値を物体に働く抗力という形で表すことができる。

以上から、次のことが成り立つ。

定理 4. 境界条件 (23), (24) の下では, Stokes 方程式 (1) と連続の式 (2) の解 \mathbf{v}, p による散逸 D_{Stokes} は物体 B に働く抗力 $Drag$ と一様流速 $\bar{\mathbf{U}}$ を用いて次のように表すことができる.

$$D_{Stokes} = \int_{V-B} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = |\bar{\mathbf{U}}| \cdot Drag \quad (31)$$

4. Navier-Stokes 方程式と散逸と抵抗

定常, 非圧縮の Navier-Stokes 方程式

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (32)$$

と連続の式 (2) の境界条件 (8), (9) の下での解を v_{NS}, p_{NS} , そのときの散逸を D_{NS} とする.

$$D_{NS} = \int_{V-B} \sigma_{ij} \frac{\partial v_{NS_i}}{\partial x_j} dV \quad (33)$$

以下同様に, 添え字 NS は Navier-Stokes 方程式の解による量を表す.

このとき, 定理 3 より,

$$D_{NS} > \check{D} = D_{Stokes} \quad (34)$$

である.

以下では 3 章と同じように, Navier-Stokes 方程式の解に対して散逸 (33) と抗力 $Drag_{NS}$ の関係を考える.

$$\int_{V-B} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i dV \quad (35)$$

$$= \int_{V-B} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-p \delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) \right) v_i dV \quad (36)$$

$$= \int_{V-B} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) v_i dV \quad (37)$$

$$= \int_{V-B} \left(\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) v_i dV \quad (38)$$

$$= \int_{V-B} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j |\mathbf{v}|^2) dV \quad (39)$$

$$= \int_{\partial V - \partial B} \frac{1}{2} \rho v_j |\mathbf{v}|^2 n_j dA \quad (40)$$

$$= \int_{\partial V} \frac{1}{2} \rho v_j |\mathbf{v}|^2 n_j dA \quad (41)$$

となり, 3 章では 0 となった (18) が 0 ではなくなり, 運動エネルギーの総流出量のような形になる. (15), (41) および境界条件 (8), (9) より,

$$D_{NS} = \int_{\partial V} \sigma_{ij} \bar{v}_i n_j dA - \int_{\partial V} \frac{1}{2} \rho v_j |\mathbf{v}|^2 n_j dA \quad (42)$$

同じように,

$$\int_{\partial V - \partial B} \sigma_{ij} n_j dA = \int_{V-B} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \neq 0 \quad (43)$$

より,

$$F_{NS} = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j dA - \int_{V-B} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (44)$$

ここで, 3 章と同様に境界条件 (9) が ∂V (V は有限領域) での速度が一様に $\bar{\mathbf{U}}_i$, つまり (23), (24) とすると, (34), (42), (44) から

$$D_{NS} \quad (45)$$

$$= \bar{\mathbf{U}}_i \int_{V-B} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV + F_{NS_i} \bar{\mathbf{U}}_i - \int_{\partial V} \frac{1}{2} \rho v_j |\mathbf{v}|^2 n_j dA \quad (46)$$

$$> F_{iStokes} \bar{\mathbf{U}}_i = \check{D} \quad (47)$$

となる. ここで, (23), (24) より,

$$\bar{\mathbf{U}}_i \int_{V-B} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = \int_{V-B} \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v_i \bar{\mathbf{U}}_i) dV \quad (48)$$

$$= \int_{\partial V - \partial B} \rho (v_j v_i \bar{\mathbf{U}}_i) n_j dA \quad (49)$$

$$= \int_{\partial V} \rho \bar{\mathbf{U}}_j \bar{\mathbf{U}}_i^2 n_j dA \quad (50)$$

$$= \rho \bar{\mathbf{U}}_j \bar{\mathbf{U}}_i^2 \int_{\partial V} n_j dA \quad (51)$$

$$= 0 \quad (52)$$

$$\int_{\partial V} \frac{1}{2} \rho v_j |\mathbf{v}|^2 n_j dA = \frac{1}{2} \rho \bar{\mathbf{U}}_j \bar{\mathbf{U}}_i^2 \int_{\partial V} n_j dA = 0 \quad (53)$$

より, 境界条件 (23), (24) の下では,

$$D_{NS} = F_{NS_i} \bar{\mathbf{U}}_i = |\bar{\mathbf{U}}| \cdot Drag_{NS} > |\bar{\mathbf{U}}| \cdot Drag_{Stokes} = D_{Stokes} \quad (54)$$

となる.

この境界条件の下では, 散逸がない非粘性非圧縮流れでは抗力が働かないことも分かる.

以上から, 次のことが成り立つ.

定理 5. 境界条件 (23), (24) の下では, Stokes 方程式 (1) に従う流体による物体に働く抗力は, Navier-Stokes 方程式 (32) に従う流体によるものよりも小さい.

5. 数値計算による検証

Stokes 近似の解による力と Navier-Stokes 方程式による力について数値的に実験を行った.

Reynolds 数を変化させ, Stokes 方程式と Navier-Stokes 方程式の場合についてそれぞれ抵抗係数を求め, 比較を行った.

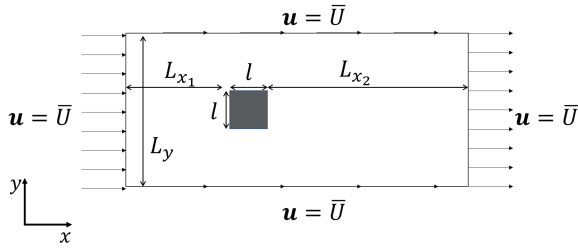


図2 計算の境界条件

表1 計算条件

L_{x_1}	$5l$
L_{x_2}	$14l$
L_y	$10l$
Δx	$0.1l$
Δy	$0.1l$

表2 計算手法

計算スキーム	SMAC 法 ⁸⁾
時間微分	粘性項：2次精度 Crank-Nicolson 法 対流項：2次精度 Adams-Bashforth 法
空間微分	粘性項：2次精度中心差分 対流項：コンシステントスキーム ⁹⁾
圧力方程式	SOR 法
計算格子	スタガード格子

図2において計算領域および計算条件を表1のように設定し、表2の計算手法を用いて無次元化された Stokes 方程式と Navier-Stokes 方程式

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (55)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (56)$$

の Reynolds 数 Re をパラメータとして解いた。代表長さには四角柱の一辺 l 、代表速度には一様流速 $|\bar{U}|$ を用いて無次元化を行った。

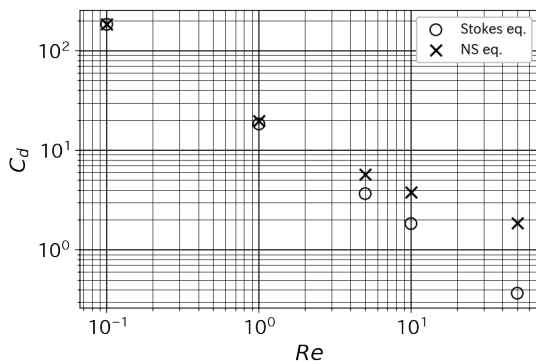


図3 レイノルズ数と抵抗係数

計算結果を図3に示す。 Re が小さいとき Navier-Stokes 方程式の解は Stokes 方程式の解に漸近し、さらにこれまでの議論の通り、Stokes 近似が抗力の最小値を与えるという傾向が見られる。

6. 結言

変分原理による Stokes 方程式の表式を用い、Stokes 方程式および Navier-Stokes 方程式により支配される流体中におかれた物体に働く抗力について考察を行った。

Stokes 方程式が連続の式の下で散逸量の積分を最小化することを確かめ、有限領域において、境界での速度が一樣であるという境界条件の下では Stokes 方程式、Navier-Stokes 方程式ともに散逸量の積分と抗力を結び付けることができることを示した。このことから、Stokes 方程式が与える抗力は Navier-Stokes 方程式が与える抗力よりも小さくなることが示された。

今後の課題としては、境界条件を変更したときにはどのようなことが成り立つのか、領域を無限遠まで広げたときに対しても良い扱いができるのか等について調べることが考えられる。

参考文献

- (1) 柴田正和. 変分法と変分原理. 森北出版, 2017.
- (2) Hyon, Y., Kwak, D. Y. and Liu, C. . Energetic variational approach in complex fluids: maximum dissipation principle, Discrete & Continuous Dynamical Systems-A. Vol. 26, No. 4, p. 1291, 2010.
- (3) Yahalom, A. Simplified variational principles for non-barotropic magnetohydrodynamics, Journal of Plasma Physics. Vol. 82, No. 2, 2016.
- (4) 深川宏樹. 流体力学における変分原理の改良. PhD thesis, 慶應義塾大学理工学研究科, 2012.
- (5) Finlayson, B. A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Chapter 8 Variational Principles in Fluid Mechanics, Mathematics in Science and Engineering Vol. 87, Elsevier. pp. 253 – 298, 1972.
- (6) Berdichevsky, V. Variational Principles of Continuum Mechanics: I. Fundamentals, Interaction of Mechanics and Mathematics, Springer Berlin Heidelberg. 2009.
- (7) Ladyzhenskaia, O. A. 著, 藤田宏, 竹下彬 訳. 非圧縮粘性流の数学的理論. 産業図書, 1979.
- (8) Amsden, A. A. and Harlow, F. H. The SMAC Method - A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows, Los Alamos Scientific Lab. Report, LA-4370. 1970.
- (9) 梶島岳夫. 対流項の差分形式とその保存性. 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 60, No. 574, pp. 2058–2063, 1994.