壁乱流のオーバラップ層

西岡通男（京大工）

Overlap layer in wall turbulence

Michio Nishioka

Graduate School of Eng. Kyoto University

ABSTRACT

By taking into account the non-parallel flow effect a system of differential equations is derived which describes the velocity profile for the wall-law defect-law overlap region as well as the outer layer velocity and length scales. For the general solution two kinds of velocity profiles are obtained in combination with the solutions for the outer layer scales. One is a log-law type, the other being a power-law type. These solutions represent the necessary condition for the existence of the overlap region. This paper discusses recent experimental results for zero-pressure-gradient turbulent boundary layer in the light of the present solutions and shows that the observed velocity profile follows the log-law solution for R_θ above 20000.

Key Words: turbulent boundary layer, law of the wall, velocity defect law, overlap region, logarithmic profile

1. まえがき

乱流境界層の平均速度分布については，壁法則に従う内層と速度欠損則に従う外層の分布が重なる共通領域（オーバラップ領域）の存在を仮定し，対数分布を導いた Milikan[1] の解析が周知である．彼の解析はチャンネル内の平行流が対象であったが，その平行流解析が乱流境界層に適用されてきた．乱流境界層は厚さが下流に増す非平行流で平行流ではない．非平行流のオーバラップ領域に関する解析は従来から皆無であった．そこで本研究では，非平行流オーバラップ領域（層）の解析を試みた．

動機の一つは，零圧力勾配の乱流境界層平均速度分布に関する激しい論争を知り，その問題点を理解したいと考えたことである．その論争点であるが，まず，Österlund et al.[2] が対数法則分布に従うと判断する彼らの実験データについて Barenblatt et al.[3]は冪分布に従うと反論し，加えてそれ以前にすでに George and Castillo[4] は外層速度分布の相似性の考察をもとに外層速度スケールには（摩擦速度ではなく）主流速度を採用するべきとしてオーバラップ層を解析し，冪分布を得ていて，対数と冪の対立が未解決のまま今日まで続いている．そこで筆者は非平行流のオーバラップ層に関する解析から，速度分布の実験結果を精査する視点を得たいと考えた．結論を言うと，この解析から，期待通り，速度分布について新しい知見・視点が得られた．

もう一つの動機は，Prandtl による壁法則と Karman による速度欠損則という 1930 年代に提案された経験則の妥当性を検証する新しい切り口を見出したいと考えたことである（この点を詳述する余裕はないが，本稿からある程度読み取れる）．

2. 非平行流のオーバラップ層の解析

２次元平板乱流境界層を考える．主流速度を U_∞，流れ方向と壁に垂直方向の座標を (x, y) とする．壁法則に従う内層の速度 U_i は次式で表わされる：

$$U_i(x,y) = u_\tau f(y^+), \quad y^+ = yu_\tau/\nu \tag{1}$$

ここで u_τ は摩擦速度，ν は動粘性を表す．速度欠損則に従う外層の速度 U_o は次式を満たす：

$$U_o(x,y) = U_\infty - \hat{u}W(y/\hat{\delta}) = U_\infty - \hat{u}W(\eta), \quad \eta = y/\hat{\delta} \tag{2}$$

ここで $\hat{u}$，$\hat{\delta}$ はそれぞれ外層の速度スケール，長さスケールである．これらの外層スケールは解析の解として決まる．これが本解析の重要な点であり，平行流を扱った Milikan[1] の解析とは大きく異なる．

オーバラップ層においては,当然,

$$U_i(x,y) = U_o(x,y) \tag{3}$$

が成り立つとする．さらに壁法則分布(1)で記述した運動量方程式と速度欠損則分布(2)で記述した運動量方程式が等値になるための微分係数にかかわる条件を課すと，非平行流オーバラップ層の接続条件が決まり，それらから次式が導出される．

$$\frac{d\ln(u_\tau/\hat{u})}{dx} f + \frac{d\ln(\hat{\delta}u_\tau)}{dx} y^+ \dot{f} = -\frac{d\ln(\hat{u}/U_\infty)}{dx}\frac{U_\infty}{u_\tau} \tag{4}$$

ここで $\dot{f} = df/dy^+$ である．関数 f がこの式から決定されるためには，各係数の比が x に無関係な定数でなくてはならない．この考察によって(4)から速度分布 f に関する次の微分方程式系が導かれる．

$$y^+\dot{f} - k_1 f = k_0 \tag{5}$$

$$k_1 = -\frac{d\ln(u_\tau/\hat{u})/dx}{d\ln(\hat{\delta}u_\tau)/dx} = -\frac{d\ln(u_\tau/\hat{u})}{d\ln(\hat{\delta}u_\tau)} \tag{6}$$

$$k_0 = \frac{-d\ln(\hat{u}/U_\infty)/dx}{d\ln(\hat{\delta}u_\tau)/dx}\frac{U_\infty}{u_\tau} = -\frac{d\ln(\hat{u}/U_\infty)}{d\ln(\hat{\delta}u_\tau)}\frac{U_\infty}{u_\tau} \tag{7}$$

ここで k_1, k_0 は先述のことから勿論定数でなければならない．その場合に限り，微分方程式(5)から速度分布 f が決まる．

すなわち，$k_1 = 0$ の場合は $1/k_0$ をカルマン定数 κ とする周知の対数分布

$$f = k_0 \ln y^+ + B = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + B \tag{8}$$

が得られ，また，$k_1 \neq 0$ の場合には，k_1 を指数とする次の冪乗分布を得る．

$$f = -\frac{k_0}{k_1} + C(y^+)^{k_1} \tag{9}$$

ただし，B, C は積分定数である． Oberlack[5]は式変換の対称性に着目しLie群手法をN-S方程式に適用して平面的平行流（壁乱流）の平均速度分布に関する微分方程式を導いている．微分方程式(5)はその Oberlack の微分方程式に属し，オーバラップ層では両者は一致し，勿論解(8)，(9)も一致する．文献 3)，4)が主張する冪分布は(9)で $k_0 = 0$ とした場合に対応するが，$k_0 = 0$ の根拠はこれらの論文には示されていない．

次に，微分方程式(6), (7)から外層速度スケールについて次の解を得る（ただし，c_u は積分定数）．

$$\hat{u} = c_u\left(k_0 u_\tau + k_1 U_\infty\right) \tag{10}$$

同様に，外層長さスケールについて，壁面摩擦則の形をした解が次のように得られている：

$$\hat{\delta} = \frac{c_{\delta 0}}{u_\tau}\left(\frac{U_\infty}{u_\tau}\right)^{1/k_1} \quad ; k_1 \neq 0 \text{ and } k_0 = 0 \tag{11}$$

$$\hat{\delta} = \frac{c_{\delta 1}}{u_\tau}\left(1 + \frac{k_1}{k_0}\frac{U_\infty}{u_\tau}\right)^{1/k_1} \quad ; k_1 \neq 0 \text{ and } k_0 \neq 0 \tag{12}$$

$$\hat{\delta} = \frac{c_{\delta 2}}{u_\tau}\exp\left(\frac{1}{k_0}\frac{U_\infty}{u_\tau}\right) \quad ; k_1 = 0 \text{ and } k_0 \neq 0 \tag{13}$$

ここで $c_{\delta 0}$，$c_{\delta 1}$，$c_{\delta 2}$ は積分定数を表す．(11)は文献 4)の壁面摩擦則と，また(13)は Rotta s kin friction la w[6]と，それぞれ関数形が一致する．さらに，k_1 がゼロに近づく極限において(12)は(13)の関数形に一致する．

これらの解はオーバラップ領域が存在するとして得られたので，それが存在するための必要条件を表す．それゆえ，どの解が実現するか大変興味深い．壁面摩擦応力を実測した実験について，$(y^+)^{k_1}$ を横軸に，$U^+(=U/u_\tau)$を縦軸にとって平均速度の実験点を図示する．すなわち k_1 の値を種々に変えて，(9)が示す$(y^+)^{k_1}$ と U^+の直線関係が成り立つか否か調べ，成り立つ場合には k_1 と k_0/k_1 の値を求めるのである．この調査を Österlund[2] の学位論文の実験データ（運動量厚さ θ に基づくレイノルズ数 R_θ が 2532～27320 の範囲の実験）について行ったところ，$(y^+)^{k_1}$ と U^+の直線関係は k_1 の値が 0.001, 0.0001 と小さくなればなるほど顕著になり，厳密な直線域が広がることがわかった．一方，文献 3)，4)の著者たちは，同じデータに対し，$k_0 = 0$，$k_1 = 0.12$ 程度の値を与えているが，この場合，$(y^+)^{k_1}$ と U^+の関係は曲率をもち，直線的ではない．これは $k_0 = 0$ の冪分布の優位性を否定する結果である．

k_1 が零に近づき $(y^+)^{k_1} = \exp(k_1 \ln y^+) = 1 + k_1 \ln y^+$ が成り立つ場合 $C = k_0(1+\gamma k_1)/k_1$ と置き，γ を用いると，(9)の k_1 が零の極限形として対数分布を得る：

$$f = k_0 \ln y^+ + \gamma k_0(1 + k_1 \ln y^+) = k_0 \ln y^+ + \gamma k_0 \tag{14}$$

また(8)と(14)から(κ, B)と(k_0, γ)の関係式を得る：

$$\kappa = 1/k_0 \tag{15}$$

$$B = \gamma k_0 = \gamma/\kappa \tag{16}$$

表 1 Österlund の実験における(κ, B)と(k_0, γ)

R_θ	$\kappa = 1/K_0$	γ	B
10000	0.411	1.97	4.79
20000～27320	0.379	1.54	4.06

Österlund の実験データ（表 1 参照）および文献 7 の実験（$R_\theta = 2.2\times10^4$ to 2.1×10^5）から判断すると，(κ, B)および(k_0, γ)の値は R_θが 2×10^4 よりも大きくなると一定値に達し，本解析で導かれたオーバラップ層の対数解が実現しているものと解釈できる．

なお，本研究の解析の結果は，壁法則と速度欠損則の妥当性が保障される限りにおいて，圧力勾配がゼロでない場合にも適用することができる．

木田教授（京大工）から本研究に関し有益な助言を賜った．ここに深い感謝の意を表します．

参考文献

1) Millikan, C.B. 1939 A critical discussion of turbulent flow in c hannels a nd c ircular t ubes. P roc. F ifth International Congress on A pplied M echanics (Cambridge, Mass. 1938) pp.386-392, Wiley, New York.

2) Österlund, J.M., Johansson, A.V. a nd N agib, H.M. 2000 Comment on "A note on t he intermediate region in turbulent boundary layers." Phys. Fluids **12**, 2360-2363.

3) Barenblatt, G.I., Chorin, A.J. and Prostokishin, V.M. 2000 A note on the intermediate region in turbulent boundary layers. Phys. Fluids **12**, 2159-2161.

4) George, W.K. and Castillo, L. 1997 Zero-pressure-gradient turbulent boundary layer. Appl. Mech. Rev. **50**, 689-729.

5) Oberlack, M. 2001 A uni fied a pproach f or s ymmetries i n pl ane parallel turbulent shear flows. J. Fluid Mech. **427**, 299-328.

6) Nishioka, M. 2009 R otta skin friction law and Schoenherr formula. Fluid Dyn. Res. 41, 045509 (9pp).

7) Winter, K.G. a nd G audet, L. 1970 A eronautical R esearch Council R. & M. No. 3712.