

# 旋回流における乱流拡散抑制機構のレイノルズ平均モデリング

吉澤 徹 (JAXA、客員)、阿部浩幸、藤原仁志、溝渕泰寛、松尾裕一 (JAXA)

## Reynolds-Averaged Modeling of Turbulent-Diffusion Suppression Mechanism in a Swirling Flow

by

Akira Yoshizawa, Hiroyuki Abe, Hitoshi Fujiwara, Yasuhiro Mizobuchi, Yuichi Matsuo (JAXA)

### ABSTRACT

A Reynolds-averaged modeling is made of the turbulent-diffusion suppression mechanism in a swirling pipe flow. The combined effect of mean vorticity and streamwise structure variation is incorporated into the characteristic time scale, on the basis of which the turbulent-viscosity model for the Reynolds stress is constructed. The model is incorporated into the two-equation modeling. Through the computational test, it is shown that some primary characteristics of a swirling pipe flow may be reproduced within the framework of the isotropic turbulent-viscosity representation. This finding indicates that the newly-introduced effect is a promising candidate for the mechanism of the radial turbulent-transport suppression of axial and circumferential momenta.

#### 1. はじめに

直円管内旋回流では、周方向平均速度が中心軸付近の強制渦的回転と中間領域での自由渦的回転からなり、軸方向平均速度の最大速度位置は中心軸からずれ、旋回流強度の増加とともに逆流が発生する (文献 1 と文献 2)。その結果、平均速度勾配は非旋回流に比べて大きく増加する。乱流拡散の概念では、平均速度勾配の増加は拡散を強め、空間的に突出した構造を消失させる。しかし、直円管内旋回流では上述の軸流の特性が下流方向に持続する。この事実は旋回が存在下では乱流拡散が著しく抑制されることを物語っている。

直円管内旋回流の特性をレイノルズ平均モデリング、とくに代数型モデリングで解析することは困難であると考えられている。例えば、標準  $K-\epsilon$  モデルを用いると軸流の特性は急速に消失する。このようなモデルを用いるのであれば、乱流粘性率に現れるモデル定数を通常の数パーセントにする必要があることが小林と依田 (文献 3) によって指摘されている。このことは、通常の乱流粘性表現を平均歪みテンソルや平均渦度テンソルに関する非線形項で補う代数型モデリングでは直円管内旋回流の解析はむずかしいことを意味し、モデリング研究の現状と符合している。

本研究では、等方的な乱流粘性表現においても乱流の特性時間に旋回流の特性を組み込むことによって平均流の主たる挙動が再現できることを示す。この研究の本質は、乱流中に含まれる種々の特性時間の系統的な統合 (文献 4) にもとづいて乱流粘性率のモデリングを

行うことにある。

#### 2. 基礎方程式

アンサンブル (レイノルズ) 平均を用いて、速度  $\mathbf{u}$ 、単位質量あたりの圧力  $p$ 、渦度  $\boldsymbol{\omega}$  を

$$(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{U}, P, \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{u}', p', \boldsymbol{\omega}')$$

と分解する。密度一定の流体では、平均速度方程式は

$$\frac{DU_i}{Dt} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) U_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-R_{ij}) + \nu \nabla^2 U_i$$

$$R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$$

となる。レイノルズ応力  $R_{ij}$  と乱流エネルギー  $K$  は

$$K = \langle \mathbf{u}'^2 \rangle / 2 = R_{\ell\ell} / 2$$

の関係にあり、トレイスレス部分を

$$B_{ij} = [R_{ij}]_{tr} = R_{ij} - \frac{1}{3} R_{\ell\ell} \delta_{ij} = R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij}$$

と書く。

レイノルズ応力のもっとも簡潔なモデルである乱流粘性表現は平均速度歪みテンソル

$$S_{ij} = \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

を用いて

$$B_{ij} = -\nu_T S_{ij}$$

となる。乱流粘性率  $\nu_T$  を 1 時刻かつ 1 点物理量で表わす限り、特性時間  $\tau$  を用いた

$$\nu_T \propto K \tau$$

がもっとも一般的な数学的表現であることが統計理論より示される（例えば、文献5）。

### 3. 旋回流を特徴づける時間スケールと特性時間の統合 乱流を特徴づける周知の時間スケールとして

$$\tau_E = K/\varepsilon, \quad \tau_S = 1/\sqrt{S_{ij}^2}, \quad \tau_\Omega = 1/\sqrt{\Omega_{ij}^2} = 1/\sqrt{2\Omega^2}$$

が挙げられる。ここで  $\Omega_{ij}$  は平均渦度テンソル

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

である。特性時間  $\tau$  として  $\tau_E$  を用いると、標準  $K-\varepsilon$  モデルにおける乱流粘性率が得られる。

直円管内旋回流の特徴は旋回に加えて、平均流の構造が下流に向けて変化することである。平均渦度時間スケール  $\tau_\Omega$  によって回転効果を表わすことができるが、これに加えて下流への変化を同時に表わす時間スケールを構成する必要がある。旋回流の渦構造を特徴づける量は平均渦度  $\Omega$  であるので、下流方向への平均流の構造変化を表わす時間スケールとして

$$\tau_L = 1/\left((D\Omega/Dt)^2\right)^{1/4}$$

を導入する。これと  $\tau_\Omega$  とを合成し、旋回流を特徴づける時間スケールとして

$$\tau_{\Omega L} = \tau_\Omega(\tau_L/\tau_E)^2$$

を導入する。 $\tau_L/\tau_E$  の組み合わせは、 $\tau_L \gg \tau_E$  の場合は合成された時間スケール  $\tau_{\Omega L}$  が単独の  $\tau_\Omega$  に比べて重要でなくなることを意味している。また、 $\tau_{\Omega L}$  における冪指数2は、結果として生じる表式が解析的になるという統計理論からの要請（文献4）を満たすためである。

上述の時間スケールを

$$\frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{\tau_E^2} + C_S \frac{1}{\tau_S^2} + \frac{C_\Omega}{2} \frac{1}{\tau_{\Omega L}^2}$$

により統合する。 $C_S$  などはモデル定数である。この時間統合において冪指数2を採用したこと、また  $\tau_\Omega$  単独の寄与を無視したのは、統計理論からの示唆による。この結果、特性時間スケール  $\tau$  は

$$\tau = (K/\varepsilon)/A$$

となる。時間補正因子  $A$  は

$$A = \sqrt{1 + C_S \left((K/\varepsilon)S_{ij}\right)^2 + C_\Omega \left((K/\varepsilon)\Omega\right)^2 \left((K/\varepsilon)^2 D\Omega/Dt\right)^2}$$

で定義される。

統合された時間スケール  $\tau$  を用いると、乱流粘性率  $\nu_T$  は  $C_\nu$  をモデル定数として

$$\nu_T = C_\nu (K^2/\varepsilon) A$$

を得る。

乱流量は

$$\frac{DK}{Dt} = -R_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \left( -R_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right)$$

より決定される。

本研究では、モデル定数として

$$C_\nu = 0.12, \quad C_S = 0.015, \quad C_\Omega = 0.30$$

$$\sigma_K = 1.4, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.5, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9, \quad \sigma_\varepsilon = 1.4$$

を採用する。本モデルは

$$\nu_T \rightarrow \nu_{TE} = C_{\nu E} K^2/\nu, \quad C_{\nu E} = 0.09$$

の置き換えによって、標準  $K-\varepsilon$  モデルに帰着される。

### 4. 境界条件と計算法

本モデルが旋回流における乱流拡散抑制機構を表現し得るか否かを検証するために、村上ら（文献1）の観測データを参照して、入口 ( $x=0$ ) の平均速度分布を与える（観測では入口から半径54倍の位置に対応する）。ただし、数値計算の簡単さのため管壁付近での分布は観測値よりなだらかなものを採用し、レイノルズ数は  $2 \times 10^4$  とした（観測では  $10^5$ ）。これに対応するスワール数は

$$S = 2 \int_0^1 U_\theta U_x r^2 dr / (R^3 U_m^2) = 0.85$$

（ $R$  は円管半径、 $U_m$  は断面平均速度である）。村上らの観測（文献1）では乱流量の計測値が与えられていない。このため入口で用いられた平均速度分布と同じ速度分布があると仮定した円管流の乱流量を標準  $K-\varepsilon$  モデルから求め、これを  $K$  と  $\varepsilon$  の入口条件とした。この設定による人為的影響は入口直後ではとくに大きいと予想される。

乱流量を含めた旋回流の観測では、鬼頭（文献2）の興味深い研究がある。この研究は強い旋回効果による軸方向流の反転に主たる関心があるため、村上ら（文献1）に比べて平均流速分布にややばらつきがある。旋回流のレイノルズ平均モデリング研究の第1段階である本研究では、乱流量の計測はないが、軸流の反転がなく、ばらつきの少ない平均流をもつ村上ら（文献1）を比較データとして参照する。

計算領域の出口 ( $x=18R$ ) では自由流出条件を採用し、中心軸 ( $r=0$ ) と管壁 ( $r=R$ ) ではそれぞれ軸対称性と滑りなし条件を課す。後者の適用に際しては、安倍らの補正（文献6）

$$C_\nu \rightarrow C_\nu \left( 1 - \exp\left(-\frac{s^*}{14}\right) \right)^2 \left( 1 + \frac{5}{R_i^{3/4}} \exp\left(-\left(\frac{R_i}{200}\right)^2\right) \right)$$

$$C_{\epsilon 2} \rightarrow C_{\epsilon 2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{s^*}{3.1}\right) \right)^2 \left( 1 - 0.3 \exp\left(-\left(\frac{R_t}{6.5}\right)^2\right) \right)$$

を採用する。ここで

$$s^* = \frac{u_\epsilon s}{\nu}, \quad R_t = \frac{K^2 / \epsilon}{\nu}, \quad u_\epsilon = (\nu \epsilon)^{1/4}$$

( $s$  は壁面からの距離である)。計算結果は  $x=14R$  において村上ら (文献 1) の観測データと比較する。

グリッド	スタガード
座標系	円筒座標 (2次元軸対称)
カップリング アルゴリズム	SMAC法
空間的離散化 NS方程式	Quick (対流項) 2次精度中心 (その他)
空間的離散化 K, $\epsilon$ 方程式	1次精度風上 (対流項) 2次精度中心 (その他)
時間進行	1次精度 Euler 陽解法 (NS方程式) 1次精度 Euler 陰解法 (K, $\epsilon$ 方程式)
出口境界条件	自由流出

計算手法は上表のようにまとめられる。とくに、乱流粘性率に現れる  $D\Omega/Dt$  効果は数値的不安定性を引き起こしやすいため、乱流方程式中の移流項に対しては 1 次の風上差分を採用する。

$x$  および  $r$  方向の格子数は  $N_x = 288$  と  $N_r = 224$  である。 $N_x = 144$  と  $N_r = 224$  の場合の計算も行ったが、その差は小さいことが確認されている。

### 5. 検証結果

はじめに、標準  $K-\epsilon$  モデルを適用すると旋回流の特性が急激に失われることを確認する。図 1 と図 2 は、同モデルによる周方向速度 ( $U_\theta$ ) と軸方向速度 ( $U_x$ ) をそれぞれ与えている。

図中の  $\circ$  と  $\triangle$  印は村上ら (文献 1) の観測結果であり、実線は前者をもとに採用された入口での平均流速分布である。通常の等方的乱流粘性モデルは円管内旋回流では機能しないという周知の結果が再現されている。

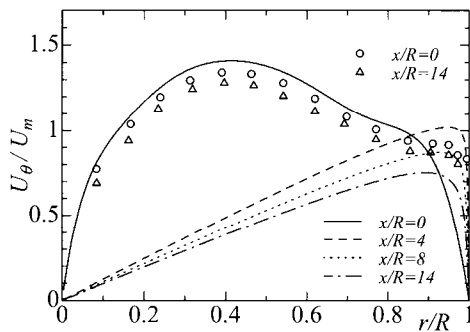


Fig. 1. Circumferential velocity by the standard  $K-\epsilon$  model.

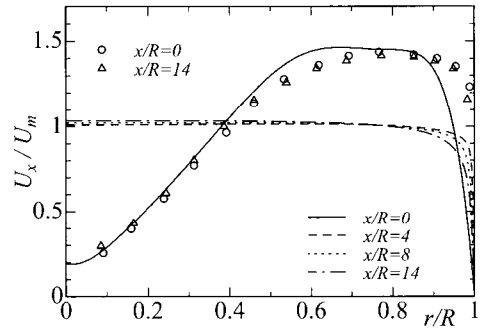


Fig. 2. Axial velocity by the standard  $K-\epsilon$  model.

乱流粘性モデルを用いて円管内旋回流の主たる特性を再現するためには、レイノルズ応力のシェア成分中で  $U_\theta$  と  $U_x$  に直結するモデル定数を通常の大さの数のパーセントにする必要があることが小林と依田 (文献 3) に指摘されている。§ 1 で言及したように、この結果より等方的な乱流粘性モデルでは円管内旋回流は扱えないと考えられている。

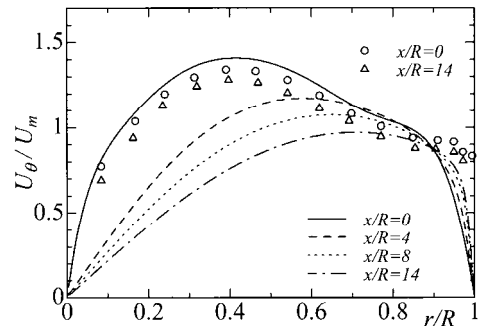


Fig. 3. Circumferential velocity by the standard  $K-\epsilon$  model with  $C_{vE}$  replaced with  $0.005C_{vE}$ .

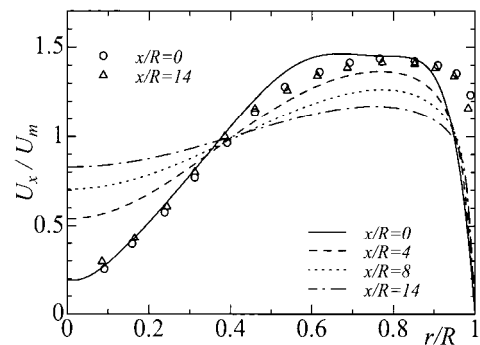


Fig. 4. Axial velocity by the standard  $K-\epsilon$  model with the model with  $C_{vE}$  replaced with  $0.005C_{vE}$ .

これに対して、乱流粘性率中のモデル定数を一律に減らすことによっても標準  $K-\epsilon$  モデルの結果をかなり改善できることを示そう。例えば、標準  $K-\epsilon$  モデルの

乱流粘性率中の定数  $C_{\nu E}$  に対して

$$C_{\nu E} \rightarrow 0.005 C_{\nu E}$$

の置き換えを行う。その結果は図3と図4に与えられ、図1と図2の状況がかなり改善されていることが分かる。

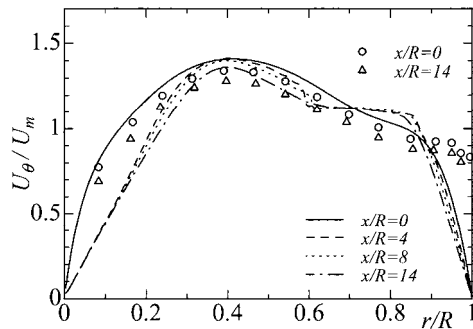


Fig. 5. Circumferential velocity by the present model.

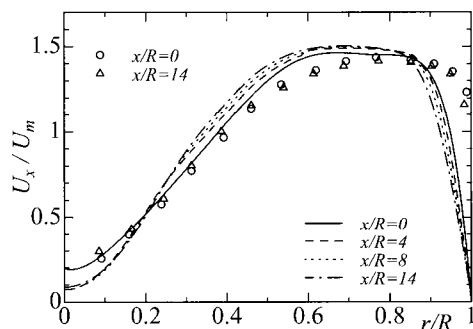


Fig. 6. Axial velocity by the present model.

上の知見より、等方的乱流粘性表現を用いても係数が適切に表現できれば旋回流の主たる構造が再現できると予想される。§4で提案された旋回流の特性を組み込んだ本モデルの結果は、図5と図6に与えられる。図5に見るように、 $r=0.7R$ 付近で観測結果からの多少のずれはあるが、直円管内旋回流の主たる構造の一

つである、軸付近の強制渦的回転と中間領域の自由渦的回転の合成分布が明確に維持されている。軸方向速度も同様に維持されており、下流への移行過程の傾向も観測結果と整合している。

以上の結果から、本研究で導入された旋回効果を有する時間スケールは旋回流における乱流輸送抑制を記述するに適した量と言える。

## 6. 結論

本論文では、直円管内旋回流のレイノルズ平均モデリングを研究した。同流れの主たる構造は従来の代数型モデリングでは再現できないとされてきたが、特性時間の適切な選択を行うことによって等方的乱流粘性近似というもっとも簡潔な枠組みにおいて再現可能であることが示された。本研究の詳細は、更なる検証例を加えて公表する予定である。

## 謝辞

本研究の一部は、著者の一人(吉澤)と西島勝一氏(元東京大学生産技術研究所 技術官)および横井喜充博士(東京大学生産技術研究所)との長期間(1990年~2004年)にわたる共同研究にもとづいており、吉澤は両氏に深甚なる謝意を表す。

## 参考文献

1. M. Murakami, O. Kitoh, Y. Katayama, and Y. Iida, Bull. JSME 19-138, 118 (1976).
2. O. Kitoh, J. Fluid Mech. 2256, 445 (1991).
3. T. Kobayashi and M. Yoda, JSME Int. J. 30, 6 (1987).
4. A. Yoshizawa, S. Nisizima, Y. Shimomura, H. Kobayashi, Y. Matsuo, H. Abe, and H. Fujiwara, Phys. Fluids 18, 035109 (2006),
5. A. Yoshizawa, H. Fujiwara, H. Abe, and Y. Matsuo, Phys. Fluids 21, 015107 (2009).
6. K. Abe, T. Kondoh, and Y. Nagano, Int. J. Heat and Fluid Flow 18, 266 (1997).