

低速流れにおける前処理付き陰解法と低散逸流束関数の性能比較

北村圭一, 藤本圭一郎, 嶋英志
JAXA/JEDI

Z.J. Wang
Iowa State University

Performance Assessment of Low-Dissipation Euler Fluxes and Preconditioned Implicit Schemes in Low-Speed Flows

by
Keiichi Kitamura, Keiichiro Fujimoto, Eiji Shima, and Z.J. Wang

ABSTRACT

In low speed flow computations, compressible finite-volume solvers are known to A) fail to converge in an acceptable time and B) reach to unphysical solutions. These problems can be cured by A) preconditioning on the time-derivative term, and B) control of numerical dissipation, respectively. There have been many proposed methods thus far for A) and B) separately, but it is unclear which combination is “best” in low speed flows. We carried out a comparative study of well-known or recently-developed A) preconditioned implicit schemes coupled with B) low-dissipation Euler fluxes in the framework of steady flows. Then, accurate, efficient, and robust methods are suggested for low speed computations.

1. はじめに

近年の数値流体力学(CFD)においては、圧縮性の効果が小さいマッハ数が0.1以下の流れにおいても、圧縮性の解法が用いられるようになってきている。これは、

- ・ 既存の圧縮性コードをわずかに修正するだけで、低速流れが解ける。

という便利さを持つためであり、こうする事で

- ・ 低マッハ数～高マッハ数が共存する流れ解析 (例：ロケットエンジン内キャビテーション[1])
- ・ 低速における音響場解析[2]

など工学的に重要な解析へ適用できる可能性がある。

ただし、このような計算においては、解法を適切に選ばないと、A)収束性が劣化したり、B)解に大きな誤差が生じたりする事が知られている。これらの問題はそれぞれA)時間積分に関する前処理[3,4]およびB)数値粘性の制御[5-8]で回避可能であり、これまでに様々な手法が提案されている(文献[9]が詳しい)。しかし、A)とB)それぞれの中からどのような手法を組み合わせれば、効率良く、精度の高い計算を行う事ができるのかは、取り扱う問題や手法同士の相性に依存するため、これを数学的に示す事は困難である。

そこで本研究では、A)、B)について代表的な、または最新の、いくつかの手法を用いて低速流れの数値計算を行い、収束性や精度を比較する。ただし、本研究では対象を定常問題に限る。これらの数値実験により、低速流

れの定常解を早く精度良く得られる方法を提案する。

2. 数値計算法

解析コードは、現在JAXA/JEDIで開発している任意多面体対応の非構造格子圧縮性流体解析コード(LS-FLOW)である。LS-FLOWは再構築および時間発展法にいくつかのオプションを有するが、本研究において使用した数値計算法を第1表にまとめる。空間精度は2次となる。

第1表 数値計算法

支配方程式	圧縮性Navier-Stokes方程式	
空間離散化	有限体積法	
再構築	勾配	Green-Gauss法[10,11]*
	非粘性項	(第2表に示す流束関数)
	粘性項	Wangの方法[12]
時間発展	(第2表に示す陰解法)	

第2表 流束関数と陰解法

	ベース	低マッハ数への改良版
流束関数	Roe[13]	A-Roe[8]
	AUSM+[14]	AUSM ⁺ -up[5]
	SHUS[15]	SLAU[7]
陰解法	LU-SGS[16]	pLU-SGS[3] BLU-SGS[17]

* Green-Gauss法は、ハンギング・ノードのある直交格子には適用困難である反面、本研究で用いるような物体壁に沿う格子には適している[10,11].

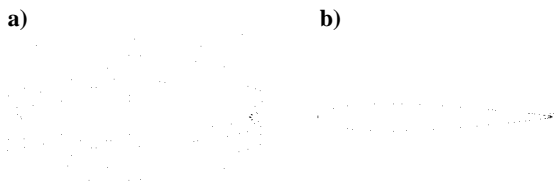
更に、流束関数と陰解法については第2表にまとめる。頁数の制約上、各々の手法の定式化については、各文献に譲る。ここで、

- ・ 低散逸流束関数には、いずれも(一様流マッハ数 M_∞ 以外に)「カットオフ・マッハ数 M_{cutoff} 」を必要としないものを選んだ(注:SLAU[7]では, M_∞ も不要)。
- ・ A-Roe (All-Speed-Roe) [8]には圧力安定項が含まれるが、各係数は $c_2 = 0.05$, $\rho^* u^* = \rho_\infty u_\infty$ とした。
- ・ ここでは、一般的な「前処理行列を用いたLU-SGS[3]」の事をpLU-SGSと呼ぶ。
- ・ 前処理行列で用いる係数には任意性があるが、ここでは $K=1.0$, $M_{\text{cutoff}} = M_\infty$ とした。従って、前処理係数 $\varepsilon = \min(1, \max(M^2, M_\infty^2))$ となる[8,9]。
- ・ BLU-SGS (Block LU-SGS)[17]は、LU-SGSにおける対角行列のスカラー近似を行わない「広義の前処理付き陰解法[18]」である。

今後特に断らない限り、内部反復は1回(=無し)、もしくは3回とし、クーラン数は安定性とコストの観点から $CFL=20$ とした。また、本研究で扱うような定常計算では、しばしば局所時間刻み法が使われるが、ここでは用いていない。更に、計算対象とする流れ場の条件(後述)から、制限関数および乱流モデルは用いていない。

3. 計算対象と計算条件

本研究における計算対象はNACA0012翼であり、以下の計算格子を作成した(第1図)。



第1図 計算格子: a) 非粘性計算用, b) 粘性計算用。

- ・ 2次元O型格子
 - ・ 周方向に201点, 壁垂直方向に31点(非粘性計算)または51点(粘性計算)
 - ・ 最小格子幅(粘性計算): $\delta=1.0e-3$ (コード長は1)
 - ・ 遠方境界: 物体からコード長の50倍の位置
- 続いて計算条件を第3表に示す。迎角は0度である。

第3表 計算条件

ケース	条件	
0) 粘性	検証	$M_\infty=0.5, Re_\infty=5,000$ [18,20]
1) 非粘性	低速	$M_\infty=0.001 \sim 0.1$
2) 粘性		$M_\infty=0.01, Re_\infty=2,000$ [2,21]

ちなみに粘性計算には全ケースで共通の計算格子を用いているが、壁垂直方向の最小格子幅は $\delta=1.0e-3 < 0.1/\sqrt{\text{Re}}$ であり、本研究で行ういずれの条件におい

ても境界層に対し十分な解像度を持つ[19]。

4. 計算結果と考察 — 内部反復無し

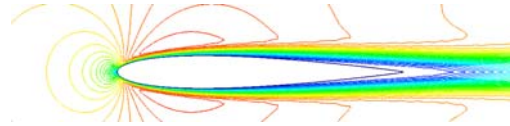
各条件における計算結果を第4表にまとめた。ここで、記号はそれぞれ以下を示す。

- : 計算が正常な解(例えば第4図b, 後述)に収束[†]。
- △: 非物理的な解(例えば第4図a, 後述)に収束, もしくは解が振動。
- ×: 計算が発散。

4-1) ケース0 ($M_\infty=0.5$ における検証計算)

このケースは多くの研究例でベンチマーク的に用いられている[18,20]。計算結果例を第2図に示す(LU-SGSとSLAUを使用)。第3図には抵抗係数 C_D の履歴を示す。

a) 等マッハ数線図 ($0 < M < 0.59$)



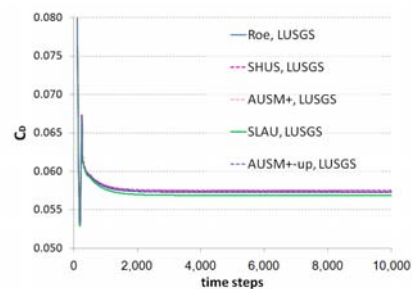
b) 剥離領域 (等速度線図 $-0.01 < u < 0$; 後縁付近の拡大図)



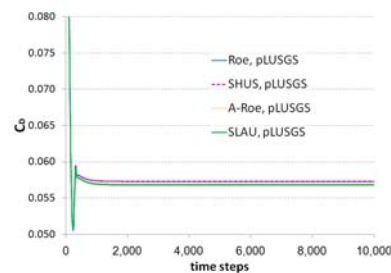
第2図 ケース0の計算結果例(LU-SGS/SLAU)。

このケースでは、後縁の剥離領域(第2図b中の逆流領域)の開始点について参照値(コード長の80~89%)が存在する。第4表中で“○”の結果が得られているいずれのケースでも、剥離位置はこの範囲に入っており、流れ場の可視化結果もほぼ同一である。従って、これらについては妥当な計算が行われたと言える。他に特

a) LU-SGS



b) pLU-SGS



第3図 ケース0 ($M_\infty=0.5$, 粘性計算)の抵抗履歴。

[†] 厳密ではないが、ここでは「密度のL2ノルムが初期の4桁以

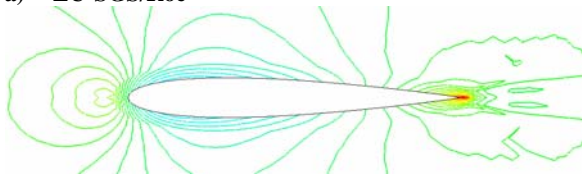
第4表 様々な陰解法・流束関数の組合せによる計算結果（内部反復無し，CFL=20）のまとめ（○：正常な解に収束，△：非物理的な解に収束もしくは振動，×：発散）。

		ケース0) (検証)	ケース1)			ケース2)
陰解法	流束関数	$M_\infty=0.5$	$M_\infty=0.1$	$M_\infty=0.01$	$M_\infty=0.001$	$M_\infty=0.01$
		$Re_\infty=5,000$	$Re_\infty=\infty$ (非粘性)			$Re_\infty=2,000$
LU-SGS	Roe	○	△	△	△	△
	A-Roe	△	△	×	×	×
	AUSM+	○	△	△	△	△
	AUSM ⁺ -up	○	×	×	×	×
	SHUS	○	△	△	△	△
	SLAU	○	△	△	△	△
pLU-SGS	Roe	○	×	×	×	×
	A-Roe	△	×	×	×	○
	AUSM+	×	×	×	×	×
	AUSM ⁺ -up	×	○	○	○	○
	SHUS	○	×	×	×	×
	SLAU	○	○	○	○	○

筆すべき点を以下に挙げる。

- LU-SGSを用いた場合，A-Roe以外の流束関数との組合せにおいて正しい解が得られている。
- LU-SGS/A-Roeは収束解が得られず解が振動してしまっているが，剥離位置は上記の範囲内である。
- 前処理行列による収束性の向上は特に見られず（第3図），むしろいくつかのケースで計算が発散してしまった。理由として，i) pLU-SGS/AUSM+の組合せによる不安定（後述）や，ii) pLU-SGSからLU-SGSへの切り替えとAUSM⁺-upの低速・高速モードの切り替えの相性の悪さなどが考えられる。

a) LU-SGS/Roe



b) pLU-SGS/SLAU



第 4 図 ケース 1 ($M_\infty=0.01$, 非粘性計算)の結果例(-1 < C_p < 1).

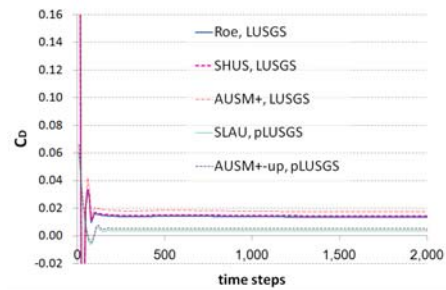
4-2) ケース1（低マッハ数における非粘性計算）

ここではマッハ数をパラメタに， $M_\infty=0.001, 0.01, 0.1$ の各ケースについて非粘性計算を行い，手法による解や収束性の違いを調べた。計算結果例を第4図に示す

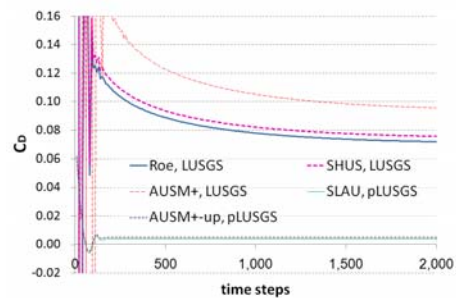
上低下した状態を「収束」と呼ぶ事にする。

(LU-SGS/RoeおよびpLU-SGS/SLAUを使用)。また，第5図には抵抗係数 C_D [‡]の履歴を示す。

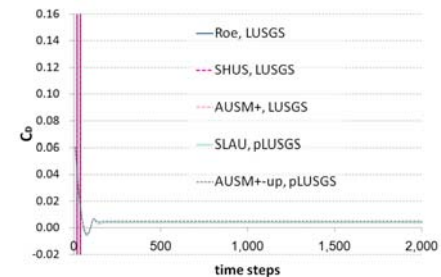
a) $M_\infty=0.1$



b) $M_\infty=0.01$



c) $M_\infty=0.001$



第 5 図 ケース 1 ($M_\infty=0.01$, 非粘性計算)の抵抗履歴。

[‡]非粘性流れなので，理論的にはゼロとなる。すなわち，計算結果として現れる抵抗値は「誤差値」である[7, 9]。

第6表 様々な陰解法・流束関数の組合せによる計算結果（内部反復3回，CFL=20）のまとめ
 (○：正常な解に収束，△：非物理的な解に収束もしくは振動，×：発散)。

		ケース0) (検証)	ケース1)			ケース2)
陰解法	流束関数	$M_\infty=0.5$	$M_\infty=0.1$	$M_\infty=0.01$	$M_\infty=0.001$	$M_\infty=0.01$
		$Re_\infty=5,000$	$Re_\infty=\infty$ (非粘性)			$Re_\infty=2,000$
LU-SGS	Roe	○	△	△	△	△
	A-Roe	○	○	×	×	×
	AUSM+	○	△	△	△	△
	AUSM ⁺ -up	○	×	×	×	×
	SHUS	○	△	△	△	△
	SLAU	○	○	○	○	○
pLU-SGS	Roe	○	×	×	×	×
	A-Roe	○	○	○ (× : CFL=200)	○	○ (○ : CFL=200)
	AUSM+	×	×	×	×	×
	AUSM ⁺ -up	×	×	○ (○ : CFL=200)	○	○ (○ : CFL=200)
	SHUS	△	×	×	×	×
	SLAU	○	○	○ (× : CFL=200)	○	○ (× : CFL=200)
BLU-SGS	A-Roe	×	/	×	/	×
	AUSM ⁺ -up	×		△		○
	SLAU	×		×		×

第4表と第4, 5図を照らし合わせると，次の事[§]が確認できる。

- LU-SGS/Roeの組み合わせのように，A)時間積分に関する前処理もB)数値粘性の制御も使わない場合，計算は実行できるが，過大な数値粘性が非物理的な振動として現れ，残ってしまう(第4図a) [2, 9]。
- pLU-SGS/SLAUのようにA), B)を組み合わせると，正しい解が早く得られる(第4図b)。
- pLU-SGS/RoeのようにA)のみを使うと，数値流束の数値粘性が正しくスケールリングされていない[3, 9]のために，即座に計算が発散してしまう。
- LU-SGS/SLAUのようにB)のみを使うと，多くの場合，計算が発散もしくは不安定な振動[2, 9]を示す。ただしこの振動は，内部反復の回数を増やす事で回避できる場合がある(後述)。しかしながら，これは当然，計算量の増加につながる。

以上をまとめると，第5表のようになる。

第5表 低マッハ数における計算結果の傾向

		流束関数	
		ベース	低散逸 (前処理B)
陰解法	LU-SGS	△ (収束遅く非物理的な解)	△ (収束遅いが正常な解，もしくは振動解)
	pLU-SGS (前処理A)	×	◎ (収束早く正常な解)

[§]文献[2], [3], [9]などでそれぞれ用いられた手法についての，既に個別に指摘されていた内容と一部，重複する。

更に，

- 調べた範囲のマッハ数においては，手法の振る舞いへのマッハ数の影響はほとんど見られない(第4表)。ただし抵抗特性(=誤差)については， $M_\infty=0.1$ では前処理行列/低散逸流束関数の効果がほとんど見られないものの，マッハ数が更に低くなるほど顕著に現れる(第5図) [9]。

4-3) ケース2 (低マッハ数における粘性計算)

これは前処理の効果を簡単に調べるために文献[2], [21]で取り上げられているケースである。第4表から分かるように，計算結果は概して対応する非粘性計算であるケース1($M_\infty=0.01$)と同様であった。収束性についても，ケース1($M_\infty=0.01$)と同様であったため，これらへの粘性項による影響はほとんど無いと言える。

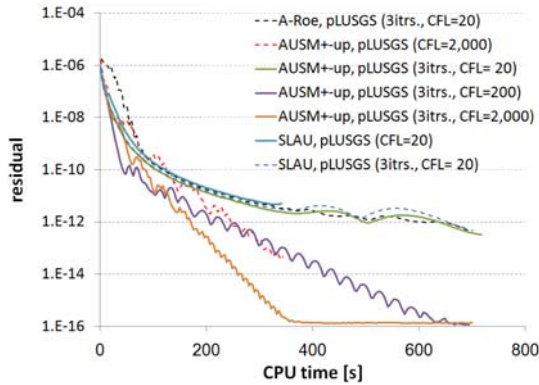
5. 計算結果と考察 — 内部反復有り

内部反復を3回 (BLU-SGSの場合は10回) 行った場合の結果を第6表にまとめた。大まかな傾向は，内部反復無しの場合と変わらないが，概して内部反復を行う方が，行わない場合よりも安定に計算ができていて(一部例外を除く)。この事は，特にA-RoeやBLU-SGSについて顕著である。

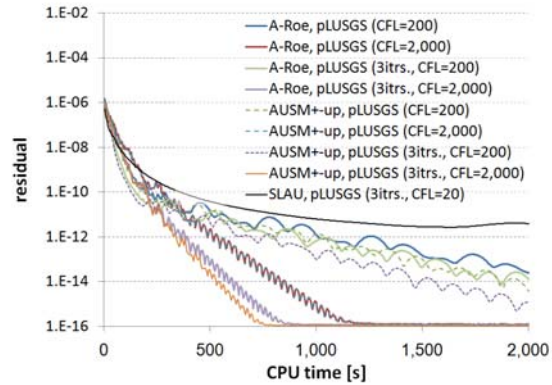
5-1) 計算効率について

計算効率の比較を，内部反復の有無を含め全てのケースについて行うために，残差履歴をCPU時間にて比較した。代表的な結果を第6図に示す。例えば， $M_\infty=0.01$ においては，第6表に示したようにpLU-SGS/SLAUは粘性，非粘性のいずれの場合も，CFL=200では計算が発散してしまった(よってこの場合は第6図に示していな

a) ケース 1 : $M_\infty=0.01$ (非粘性)



b) ケース 2 : $M_\infty=0.01$ (粘性)



第 6 図 ケース 1(非粘性計算)およびケース 2(粘性計算)における残差履歴($M_\infty=0.01$)—内部反復無しまたは 3 回

い) . これに対し, pLU-SGS/AUSM⁺-upはCFL=200でも安定な計算が可能であった. このとき, 残差が4桁低下するまでの計算時間はCFL=20の場合の約半分であった (第6図) .

このようにして各ケースの比較を行った結果, 第6図からも明らかなように, pLU-SGS/AUSM⁺-upが内部反復の有無によらず最も大きなCFL=2,000を取ることができ, 内部反復有りの場合, 全ケースの中で最も効率的である事が分かる.

5-2) 計算精度について

ケース1の非粘性計算において, 抵抗係数 (数値誤差) が最小となるのはpLU-SGS/A-Roeで0.0019, 次いでpLU-SGS/SLAUで0.0037, そしてpLU-SGS/AUSM⁺-upで0.0049であった. 従って, 現れた数値誤差が最も小さかったのはpLU-SGS/A-Roeの組合せであった.

5-3) BLU-SGSについて

今回調べた中では, ケース2 ($M_\infty=0.01$, 粘性流れ) においてAUSM⁺-upと組み合わせた場合のみ, 正しく計算が行われた (第6表) . この手法は内部反復を最大10回程度必要とし[17], 例えばpLU-SGS/AUSM⁺-upの場合に比べて11倍以上のCPU時間を必要としたため, 今回調べた範囲においては, あまり実用的と言えない. CFL数の制御の仕方や内部反復の回数など, 多くのパラメータが含まれる手法なので, 更に注意深く検討を進める必要があり, ここではこれ以上の議論は行わない.

6. 前処理付き手法の性能評価

以上より, pLU-SGSと低散逸流束関数 (二つの前処理 A) と B)) の組み合わせを精度 (accuracy), 効率 (efficiency), 堅牢性 (robustness) の3つの観点から総合的に評価すると, 第7表のようになる. ここで堅牢性とは, その手法を用いて行った全テストケースのうち, 安定に計算が行えたケース数の多さを表す. この表より, 一概に「ベストな手法」を決定できないものの, 例えば以下の使い分けが提案できる.

- A-Roe : 解をより正確に求めたい場合
- AUSM⁺-up : 計算結果を早く得たい場合
- SLAU : 計算が安定に実行可能か不明な場合

SLAUの堅牢性を残しつつ, A-RoeやAUSM⁺-upの数値粘性の求め方を組み合わせれば, より見通しの良い流束関数が開発できる可能性がある.

第7表 前処理付きLU-SGSと組み合わせた低散逸流束関数の性能評価

		精度 (Accuracy)	効率 (Efficiency)	堅牢性 (Robustness)
pLU-SGS	A-Roe	◎	○	×
	AUSM ⁺ -up	△	◎	△
	SLAU	○	△	○

7. 結論

いくつかの陰解法と数値流束を用いて低速流れの定常計算を行い, 以下の知見を得た.

- 前処理付き陰解法と低散逸流束関数を組み合わせると, 精度の良い結果が早く得られた. 中でも, 以下の事からpLU-SGS/A-Roeの組み合わせが精度, pLU-SGS/AUSM⁺-upが効率, pLU-SGS/SLAUの組み合わせが堅牢性の観点でそれぞれ最良である.
 - 非粘性計算における抵抗 (= 誤差) は, A-Roeで最小である.
 - AUSM⁺-upに比べると, A-Roe, SLAUはCFLを大きく取れない. よって, 「計算を安定に実行できる最大CFL数」を用いた比較では, AUSM⁺-upが最も収束性が良い. また, この事は内部反復の有無によらない.
 - 安定に計算で来たケースが最も多かったのはSLAUである. AUSM⁺-upは, $M_\infty=0.5$ 程度の流れにおいて計算が発散してしまう事例があった.

- ・ よって低散逸流束関数は、前処理付きLU-SGSと組み合わせ、例えば以下の使い分けができる。
 - A-Roe：解をより正確に求めたい場合
 - AUSM⁺-up：計算結果を早く得たい場合
 - SLAU：計算が安定に実行可能か不明な場合
- ・ 前処理付き陰解法と、数値粘性を制御しない流束関数を組み合わせると、計算が即座に発散した。
- ・ BLU-SGSは、使用する際のパラメタ設定にまだ検討の余地があると考えられる。
- ・ 以上はマッハ数や粘性の効果にあまり依存しない。今後は、局所時間刻み法や、pMFGS[7]など他の陰解法の利用、非定常問題や様々な速度場が混在するケース[1]への適用など、更に検討を続けていく予定である。

謝辞

本研究は、JAXA・アイオワ州立大学共同研究の一環として行われた。JAXA/JEDIセンター長・藤井孝蔵教授をはじめ、関係者の皆様に感謝の意を表す。また、JAXA/ISAS-JEDI併任の坪井伸幸准教授にも数々の貴重なご意見をいただいた。感謝の意を表す。

参考文献

- [1] 谷直樹, 津田伸一, 山西伸宏: 極低温化でのインデューサに発生するキャビテーション流れに関する数値的研究, 第49回航空原動機・宇宙推進講演会, B14 (2009).
- [2] 坪井伸幸, 吹場活佳, 嶋田徹: 前処理法による非定常圧縮性低速流れの数値解析—ハイブリッドロケット燃焼器内流れの解析に向けて, 第49回航空原動機・宇宙推進講演会, B05 (2009).
- [3] Weiss, J.M. and Smith, W.A.: Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows, AIAA J., Vol. 33, No.11, pp.2050-2057 (1995).
- [4] Turkel, E.: Preconditioning Technique in Computational Fluid Dynamics, Annu. Rev. Fluid Mech, Vol. 31, pp.385-416 (1999).
- [5] Liou, M.S.: A Sequel to AUSM, Part 2 - AUSM⁺-up for All Speeds, J. Comp. Phys. Vol.214, pp.137-170 (2006).
- [6] Edwards, J.R.: Towards Unified CFD Simulation of Real Fluid Flows, AIAA Paper 2001-2524 (2001).
- [7] Shima, E. and Kitamura, K.: On New Simple Low-Dissipation Scheme of AUSM-Family for All Speeds, AIAA Paper 2009-136 (2009).
- [8] Li, X.S. and Gu, C.W.: An All-Speed Roe-Type Scheme and Its Asymptotic Analysis of Low Mach Number Behavior, J. Comput. Phys., Vol. 227, pp.5144-5159 (2008).
- [9] 嶋英志: AUSM 族全速度スキームと前処理付き陰解法, 第22 回数値流体力学シンポジウム, C7-4, 2008.
- [10] 嶋英志: 勾配計算法の再検討と新手法について, 第41回流体力学講演会/航空宇宙技術シンポジウム2009, 1D9 (2009).
- [11] Mavriplis, D.J.: Revisiting the Least-Squares Procedure for Gradient Reconstruction on Unstructured Meshes, AIAA Paper 2003-3986 (2003).
- [12] Wang, Z.J.: A Quadtree-based Adaptive Cartesian/Quad Grid Flow Solver for Navier-Stokes Equations, Computers and Fluids, Vol. 27, No. 4, pp.529-549 (1998).
- [13] Roe, P.L.: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes, J. Comput. Phys., Vol.43, pp.357-372 (1981).
- [14] Liou, M.S.: A Sequel to AUSM - AUSM⁺, J. Comput. Phys., Vol.129, pp.364-382 (1996).
- [15] Shima, E.: Role of CFD in Aeronautical Engineering (No.14) - AUSM Type Upwind Schemes-, NAL-SP30, Proceedings of 13th NAL symposium on Aircraft Computational Aerodynamics, pp.41-46 (1996).
- [16] Jameson, A. and Turkel, E., Math. of Comp., Vol.37, pp.385-397 (1981).
- [17] Chen, R.F. and Wang, Z.J.: Fast, Block Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel Scheme for Arbitrary Grids, AIAA J., Vol. 38, No. 12, pp.2238-2245 (2000).
- [18] Sun, Y., Wang, Z.J. and Liu, Y.: Efficient Implicit Non-linear LU-SGS Approach for Compressible Flow Computation Using High-Order Spectral Difference Method, Commun. Comput. Phys., Vol. 5, pp. 760-778 (2009).
- [19] 藤井孝蔵: 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 東京, p.180 (1994).
- [20] Mavriplis, D.J., Jameson, A., and Martinelli, L.: Multigrid Solution of the Navier-Stokes Equations on Triangular Meshes, AIAA Paper 89-0120 (1989).
- [21] Yamamoto, S.: Preconditioning Method for Condensate Fluid and Solid Coupling Problems in General Curvilinear Coordinates, J. Comput. Phys., Vol.207, pp.240-260 (2005).