

歳差球体流れの安定性

木田重雄（京大工）

Stability of steady flows in a precessing sphere

Shigeo Kida

Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University

ABSTRACT

The stability characteristics of steady flows in a precessing spherical cavity, of which the spin and precession axes are perpendicular to each other, are investigated numerically. The steady / unsteady boundary of the flow, is identified over a wide range of values of control parameters of the system.

Key Words: precessing sphere, stability

内部が流体で満たされている球体を一定角速度で回転（スピン回転）させ、その回転軸をそれに垂直な軸のまわりに別の一定角速度で回転（歳差回転）させる。このとき、内部の非圧縮粘性流体の運動は、2つの回転角速度の大きさに依存して、層流から乱流まで多様な様相を呈する。このようにスピン回転軸が歳差運動している球体を歳差回転球体とよぶ。

地球はスピン回転の周期が1日、歳差回転の周期が25800年、そして2つの回転軸の交角が 23.5° で歳差回転をしている。この歳差回転が地球の外核の溶融鉄に流れを誘導することで、地球磁場が形成されるとする歳差回転ダイナモの研究がこれまで盛んに行われてきた [1]。この系は、2つの回転角速度を適当に調節すれば容易に乱れた流れが作れることから、簡単な乱流発生装置や混合器としての応用が考えられる。また、境界の形も流れの駆動機構も最も基本的で単純なものであるため、実験の再現性は極めて高く、数値計算と実験との高精度の比較が可能である。流体力学における基準の流れのひとつとして、歳差回転球体内の流れの特性をきちんと調べておくことの意義は大きい。

本稿では、スピン回転軸と歳差回転軸が垂直である特別な場合に話を限る。この系の力学特性は2つの無次元パラメータで特徴付けられる。ひとつはレイノルズ数 $Re = a^2 \Omega_s / \nu$ 、もうひとつはポアンカレ数 $\Gamma = \Omega_p / \Omega_s$ である。ここに、 Ω_s と Ω_p はそれぞれ、スピン回転角速度と歳差回転角速度、 a は球体の内半

径、そして ν は流体の動粘性係数である。これらの無次元パラメータの全領域にわたって、歳差回転球体内流れの特性を解明するための最初のステップとして、ここでは、流れの最も基本的な様相（定常性）がパラメータ空間のどの範囲で実現するかを調べる。

定常流が実現するパラメータ領域と非定常流が実現するパラメータ領域を、流れの運動方程式の直接数値シミュレーションによって求める。ただし、結果の初期条件依存性は将来の検討課題とする。流れの運動方程式を記述する座標系として、慣性系、回転系、および球静止系の3つが考えられる。このうち、運動方程式と境界条件のどちらもが時間に陽に依存しないのは回転系のみである。言い換えれば、この系でのみ、定常な流れが観測されうる。

角速度 Ω_p で回転する回転系で流れを記述すると、支配方程式には、慣性系におけるナビエ・ストークス方程式に遠心力（圧力の中に繰り込むことができる）とコリオリ力が加わる。 Re と Γ の組および適当な初期条件を与えて、支配方程式と連続の式を球面での速度の粘着条件のもとで数値積分する。球の中心を原点とする球極座標 (r, θ, ϕ) を導入し、速度場をポロイダル / トロイダル分解する。ポロイダル関数とトロイダル関数を、角度 (θ, ϕ) 方向には球面調和関数、動径 r 方向には Zernike 多項式で展開する。時間積分については、粘性項にはクラーク・ニコルソン法、それ以外の項には2次精度のアダムス・バッシュフォース法を

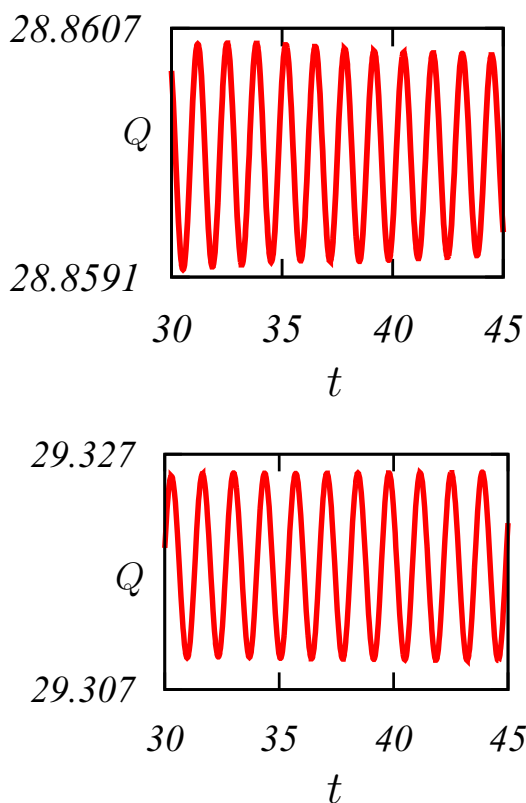


図1：エンストロフィーの時間変化。 $\Gamma = 0.144$ 。(上図) $Re = 1310$ 。(下図) $Re = 1350$ 。時間の単位はスピン回転の周期である。

用いて計算する。数値計算法の詳細は、文献 [3] に譲る。

流れが定常であるか非定常であるかの区別は、エンストロフィー $Q(t)$ (渦度の自乗の球体全体にわたる積分) の時間変化で判定する。エンストロフィーの時間変化の例を2つ、図1に示す。エンストロフィーは、時間 t とともに、振幅がゆっくり減少(上図)あるいは増大(下図)しながら、ほぼ正弦波的に振動している。前者は定常流に近づく場合、後者は非定常流の場合である。このような計算を Re と Γ の多くの組み合わせに対して行なう。

このようにして識別した定常流に近づく場合と非定常流の場合の境界を $\Gamma < 1.6$ と $Re < 5000$ の範囲で図2に示す。境界線のレイノルズ数は、 $\Gamma = 0.18$ で最小値 1180 をとる。ポアンカレ数が大きい極限と小さな極限で境界線は無窮大へ延びている。この境界線の Re が大きいときの漸近的なふるまいは現在解析中である。これまでの予備的な計算では、 $\Gamma \gg 1$ の場合に境界は漸近的に $\Gamma \propto Re$ のように、また、 $\Gamma \ll 1$ の場合に $\Gamma \propto Re^{-1/2}$ のようになる。

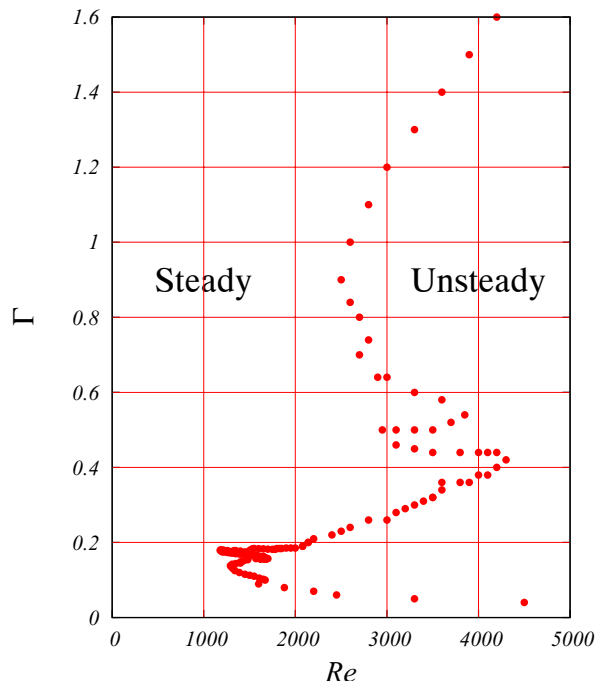


図2：定常流と非定常流の相図。黒丸で示した境界線より左側では定常流が、右側では非定常流が最終状態として実現する。

最近われわれは、室内実験で、図2と同じように、 Re がある臨界値(数千以上の)越えると流れが乱流になること、そして乱流強度は Γ が 0.1 ~ 0.2 あたりで最大になることを見出した [2]。

歳差回転球体内の流れの大域的な理解はこれからである。ここに示した定常流れと非定常流れの境界の解析が、この系の今後の系統的な研究の指針として役立つことを期待する。

数値計算は、京都大学基礎物理学研究所の SX8 を用いて行なった。

参考文献

- [1] W.V.R. Malkus: Precession of the Earth as the Cause of Geomagnetism. *Science* **160** (1968) 259.
- [2] S. Goto, N. Ishii, S. Kida, M. Nishioka: Turbulence Generation Using a Precessing Sphere. *Phys. Fluids* **19** (2007) 061705-1-4.
- [3] Kida S., Nakayama K., Honda N.: Streamline Tori in a Precessing Sphere at Small Reynolds Numbers. *Fluid Dyn. Res.* 2009 (掲載予定).