

# 円管乱流の速度分布

西岡通男（京大）

## Velocity profile of turbulent pipe flow

Michio Nishioka  
Graduate School of Eng., Kyoto University

### ABSTRACT

Recent experimental studies on flat plate turbulent boundary layer and turbulent pipe flow show that the results contradict the classical view of a Reynolds number independent logarithmic overlap region. This poses serious problems directly related to our understanding of the structure and scaling of wall-bounded flows. We take up one of such problems, namely, a re-examination of the velocity profile for the whole layer. We need such a type for the velocity profile that can describe the effect of the Reynolds number. And we here focus on the Reichardt-Finley composite velocity profile and show that it well represents the velocity profile of turbulent pipe flow. Indeed we can determine the constants  $\kappa$  and  $B$  of the logarithmic profile from the velocity data by optimizing the profile fitting.

Key Words: turbulent wall-bounded flow, law of the wall, velocity defect law, combined velocity profile

### 1. まえがき

壁乱流の速度則として対数分布は周知であるが、最近の実験によって、対数分布に関する従来の定説が見直され<sup>1)</sup>、流れの構造、スケール、速度分布に関する問題、Clauser チャートやプレストン管による壁面摩擦評価法の再検討、さらには高レイノルズ数特性など、実験に携わるものにとって切実な問題が提起されている。そこで筆者は、第41回研究会報告で述べたように、壁面剪断応力の高レイノルズ数漸近特性、壁法則に従う内層の挙動、複合速度分布による速度場の表現などの問題に取り組んでいる。本稿ではまず壁乱流の速度則に関する従来の定説と最近の実験について概要を述べた。次に円管乱流の実験の速度データを Reichardt-Finley 複合速度分布により解析し、この複合分布の有効性を調べている。

### 2. 従来の定説と最近の実験結果

壁乱流の内層は速度スケール  $u_\tau$ 、長さスケール  $\nu/u_\tau$  を用いて記述され、流れ方向 ( $x$ -方向) 速度  $U$  の  $y$ -分布は次式に従う (壁法則)。

$$U^+ = U/u_\tau = f(yu_\tau/\nu) = f(y^+) \quad (1)$$

ここで、摩擦速度  $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ 、 $\tau_w$  = 壁面剪断応力、 $\rho$  = 密度、 $\nu$  = 動粘性係数である。外層が摩擦速度  $u_\tau$  と境界層厚さ  $\delta$  で記述される速度欠損則

$$U^+ - U_\infty^+ = g(y/\delta) \quad (2)$$

に従い、(1)、(2)式の成り立つ領域が部分的に重なる場合には、その重なり領域 (オーバーラップ領域)において次の対数分布が成り立つ。

$$U^+ = \kappa^{-1} \ln y^+ + B \quad (3)$$

この考えは Millikan(1939)が管内流で示したもので、Prandtl(1925)の混合距離理論による結果を支持し、境界層を含む壁乱流に広く適用されてきた。定数は実験で決定され、円管流・矩形管流・境界層に対し

$$\text{カルマン定数 } \kappa = 0.4 \text{ or } 0.41, \quad B = 4.9 \sim 5.2 \quad (4)$$

が普遍的な値として認められてきたし、また、重なり領域の範囲は  $50 \sim 70 < y^+ < 0.15\delta^+$  と考えられてきた:  $\delta^+ = \delta u_\tau/\nu$ 。1968年の乱流境界層計算法 Stanford 会議では  $\kappa = 0.41$ ,  $B = 5.0$  が採用され、 $100 < y^+ < 300$  の範囲の速度データが(3)式を満たすように摩擦速度 (あるいは壁面剪断応力) を決めるデータ整理法も提案された。これが従来の定説の概要である。

最近の実験の特徴は壁面摩擦応力の直接計測である。すなわち、速度データが(3)式を満たすように摩擦速度・摩擦応力を決めるのではなく、速度データとは独立に、floating element 法や oil-film interferometry 法によって壁面剪断応力を計測する。平板乱流境界層を調べた Osterlund et al.<sup>2)</sup>は熱線計測した速度分布データと oil-film 法で測った壁面剪断応力データから  $\kappa = 0.38$ ,  $B = 4.1$  の値を定め、さらに(3)式が成り立つ重なり領域については、運動量厚さレイノルズ数  $R_\theta > 6000$  において現れ始めて  $200 < y^+ < 0.15\delta^+$  の範囲を占めると結論している。この下限値 200 は従来の  $50 \sim 70$  という値と明らかに異なる。同様の手法で行われた Nagib et al.<sup>3)</sup>の実験でも同じ特性が確認され、定数値  $\kappa = 0.384$ ,  $B = 4.173$  が得られている。実は、これらとほとんど同じ実験結果が既に 1940 年に公表されている。それは floating element 法で壁面摩擦応力を直接計測した

Schultz-Grunow<sup>4)</sup>の実験であり、 $\kappa = 0.388$ ,  $B = 4.07$ を得ていて、最近の結果と確かに一致している。

円管乱流については、McKeon et al.<sup>5)</sup>が $\delta^+ = 2.8E+05$ を越す高レイノルズ数までの実験を行い、 $600 < y^+ < 0.12\delta^+$ の重なり領域で速度分布が対数形になることを示し、定数について $\kappa = 0.421 \pm 0.002$ ,  $B = 5.60 \pm 0.08$  (95%信頼度区間推定値) という結果を得ている。また、 $50 < y^+ < 300$ で速度が冪 (power law) 分布に従うことも示されている。

従来、対数分布は壁乱流に固有の普遍的な特性とみなされてきた。それを象徴するのはカルマン定数であり、流れによらない一定値をもつと考えられてきた。しかし、上述の通り、カルマン定数は流れに依存して値が変わるといように、対数分布に対する描像は大きく変わりつつある。

しかも、重なり領域が現れるレイノルズ数の下限は平板境界層の場合 $R_\theta = 6000$ である。では、これより小さいレイノルズ数域ではどのような速度分布を採用するのが合理的であろうか？ 現在、筆者はReichardt-Finley複合分布に注目し、速度分布の特徴や表現法などを調べるツールとして期待して、この複合分布の可能性と有用性について種々調べている。

### 3. 複合速度分布による円管乱流の解析

筆者は次の分布をReichardt-Finley複合分布と呼ぶ。

$$U^+ = \kappa^{-1} \ln(1 + \kappa y^+) + C \{1 - \exp(-y^+/\eta_1) - (y^+/\eta_1) \exp(-by^+)\} + \kappa^{-1} \{(1 + 6\Pi)(y^+/\delta^+)^2 - (1 + 4\Pi)(y^+/\delta^+)\} \quad (4)$$

ここで $\kappa$ =カルマン定数,  $C = B - \kappa^{-1} \ln \kappa$ ,  $\eta_1 = 11$ ,  $b = 0.33$ ,  $\delta^+ = \delta u_\tau / \nu$ ,  $\Pi$  = 後流因子で、次式がなりたつ。

$$2\Pi = \kappa(U_\infty^+ - C) - \ln(1 + \kappa\delta^+) \quad (5)$$

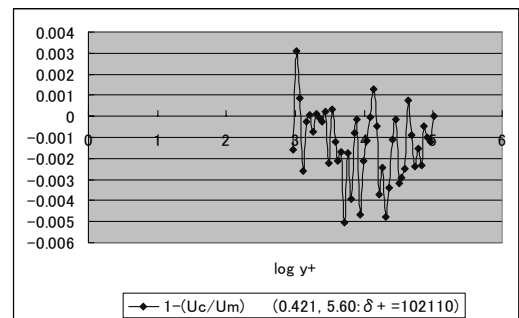
この複合分布式(4)は2行目までが粘性低層、バッファ層、対数領域の速度場を表現するReichardt<sup>6)</sup>の分布であり、3行目はFinley<sup>6)</sup>の後流関数であって、この二つの和で全域 (内層+外層) の速度場を表し、高レイノルズ数における「漸近解」として対数分布を位置づけている。つまり、レイノルズ数 $\delta^+$ が大きくなると (すなわち、外層のスケール $\delta$ が内層のスケール $\nu/u_\tau$ に比べて十分大きくなると)、「漸近解」の対数分布が顕在化する合理的な分布である (と筆者は解釈する)。壁乱流を特集したPhil. Trans. R. Soc.の記事<sup>1)</sup>で複合分布を扱っているが、Reichardt-Finley複合分布は取り上げられていない。筆者には不思議であるが、大方の視野の外にあるように思われる。

McKeon et al.<sup>5)</sup>の実験の速度分布 ( $\delta^+ = 5.4E+04 \sim 2.8E+05$ ) をReichardt-Finley複合分布を用いて解析した結果を表1に示す。表の左半分はMcKeon et al.<sup>5)</sup>が決めた定数 ( $\kappa = 0.421$ ,  $B = 5.60$ ) を用いて得た後流因子の値を示す。実験の分布と複合分布の相対偏差を各 $y^+$ 位置で計算し (Fig.1 参照), その自乗和を最小化する解として求めた ( $\kappa$ ,  $B$ ,  $\Pi$ ) の値を右半分に太字で示す。表下端2行の数値はこれらのデータから

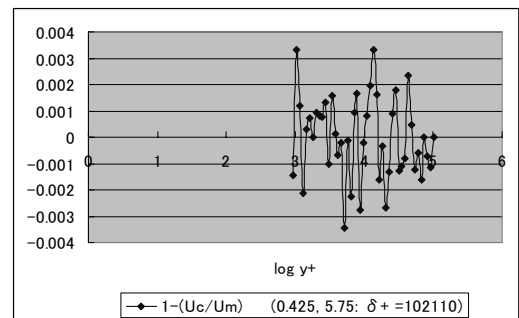
計算した95%信頼度区間推定値である。McKeon et al.<sup>5)</sup>は圧力損失のデータから $\kappa$ を決め、その上で(3)式をもとに $B$ を定めているのに対し、筆者の手法では、速度データ ( $U^+(y^+)$ ) のみから表1が示す高い精度で ( $\kappa$ ,  $B$ ,  $\Pi$ ) を決定することができる。しかも、偏差自乗和最小解の場合、相対偏差は高々 $\pm 0.3\%$ である (Fig.1(b))。 ( $\kappa$ ,  $B$ ) が既知の場合は、偏差自乗和最小解の手法で摩擦速度を求めることができる。このようにReichardt-Finley複合分布は有用である。

表1. 対数分布定数と後流因子に関する比較

$\delta^+$	McKeon's ( $\kappa, B$ )			偏差最小解		
	$\kappa$	$B$	$\Pi$	$\kappa$	$B$	$\Pi$
54358	0.421	5.6	0.2617	<b>0.421</b>	<b>5.62</b>	<b>0.2575</b>
76406	0.421	5.6	0.2420	<b>0.431</b>	<b>6.03</b>	<b>0.2886</b>
102110	0.421	5.6	0.2631	<b>0.425</b>	<b>5.75</b>	<b>0.2885</b>
127380	0.421	5.6	0.2786	<b>0.422</b>	<b>5.65</b>	<b>0.2827</b>
165290	0.421	5.6	0.2885	<b>0.424</b>	<b>5.75</b>	<b>0.2956</b>
216190	0.421	5.6	0.2591	<b>0.425</b>	<b>5.67</b>	<b>0.3051</b>
283230	0.421	5.6	0.2396	<b>0.422</b>	<b>5.47</b>	<b>0.2826</b>
区間推定	0.421	5.6	0.2618	<b>0.424</b>	<b>5.70</b>	<b>0.2858</b>
95%信頼	$\pm 0.002$	$\pm 0.08$	$\pm 0.016$	<b><math>\pm 0.003</math></b>	<b><math>\pm 0.16</math></b>	<b><math>\pm 0.013</math></b>



(a)



(b)

Fig.1 相対偏差の $y$ -分布:  $\delta^+ = 102110$ . (a) McKeon's ( $\kappa$ ,  $B$ ), (b) 偏差自乗和最小解

### 参考文献

- 1) McKeon, B.J. Phil. Trans. R. Soc. A **365**(2007).
- 2) Osterlund, J.M. et al. Phys. Fluids **12**(2000) 1-4.
- 3) Nagib, H.M. et al. Phil. Trans. R. Soc. A **365**(2007)755-770.
- 4) Schultz-Grunow, F. Luftfahrtforschung **17**(1940)239-246.
- 5) McKeon, B.J. et al. J. Fluid Mech. **501**(2004)135-147.
- 6) Reichardt, H. Z. angew. Math. Mech. **31**(1951)208-219.
- 7) Finley, P.J. La Houille Blanche **21**(1966)713-721.