流体計算における数値的不都合

Instability in difference approximation for the compresible EulerEquations and the linear field

相曽 秀昭 (AISO, Hideaki) *

Numerical computation of differential equations usually needs some discretization of the original equation. The discretization is called discrete (or discretized) model, while the original differential equation is called continuous model. The properties of both models are expected to be of exact coincidence, but there is always some inconsistency between them. In such a situation, we need to know the inconsistency in order to understand what a result of numerical computation means. Otherwise we might misunderstand it to regard a specific behavior of numerical solution coming from the property of discrete model but not from that of continuous one as a part of behavior of the original equation's solution.

Here we show some trial to analyze the numerical instability that occurs in numerical calculation of shock waves, where ocurs a typical example of inconsistency between the continuous and discrete models.

1. はじめに

強い衝撃波の形成を伴う圧縮性 Euler 方程式の数値計算におけるカーバンクル (Carbuncle) と呼ばれる不安定現象は、Quirk[2] による学術的考察の対象としての指摘以前から経験的に知られていたようである。[2] はこれが差分近似の方法に起因するとして議論を展開している。即ち、この不安定性は圧縮性 Euler 方程式の解の性質ではなく数値計算の離散モデル (差分近似法等) の性質であろうという観点である。しかしながら、この不安定性の発生機構について確定的な結論は未だ得られていない。

この現象に関し経験的に知られるいくつかの事実を挙げる。圧縮性 Euler 方程式に支配される 1 次元的現象 (1 次元的な圧縮性 Euler 方程式の解) を 1 次元的に数値計算して不安定が生じない場合であっても多次元 (2 次元以上) 数値計算すると不安定性が生じる場合がある。また、不安定は衝撃波が計算格子座標のどれかの座標軸又は 2 つの座標軸のなす面にほぼ平行な場合に生じ易く衝撃波が強いほど生じ易い。不安定現象の空間スケールは計算格子のスケールに依存し物理現象のスケールには依存しない事もよく知られ、不安定現象が圧縮性 Euler 方程式という連続モデルよりもその数値解を得る為に用いられる離散モデル (差分近似) に起因するらしいという推論の根拠となっている。

圧縮性 Euler 方程式の数値計算に用いる種々の離散モデル (差分近似) は一般に非線形であるが、Moschetta ら [3] はその離散モデルにおける時間発展の線形安定・不安定を論じた。[3] の中で静止衝撃波の種々の差分近似による数値計算を考え、各差分近似の表す時間発展モデルの線形化を数値微分により得ている。(一般に離散モデルの線形化を行う際に必要な差分式の偏微分が複雑な為) そして実際の数値計算での不安定発生との比較を行い、それらの大まかな一致が観察されている。

本稿では、Godunov 法による離散モデルでの衝撃波の数値計算において線形安定性を考察し、カーバンクル不安定との関連の観察を試みる。Godunov 法は保存則に対する有限体積法として極めて自然に導出され、圧縮性 Euler 方程式の場合の厳密な数学的証明は未知ではあるが、その数値近似解のエントロピー解 (物理的に妥当な解) への収束が期待される。その意味で考察対象として適したものの一つであろう。また、Godunov 法では線

*JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency) Jindaiji-Higashi-machi 7-44-1 Chofu TOKYO 182-8522 JAPAN, aiso @ chofu.jaxa.jp

形化された系を考える際の各偏微分係数を数値微分によらずに解析的に求め得る利点がある。また、進行衝撃波と静止衝撃波の2つの場合について考察を行う。

2. 圧縮性 Euler 方程式の衝撃波解

ここでは、空間2次元の圧縮性 Euler 方程式

$$U_t+F(U)_x+G(U)_y=0,\ -\infty<x,y<\infty,\ t>0 \quad (1)$$

を考える。Uは保存変数のベクトル

$$U=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ e\end{bmatrix}, \quad (2)$$

(ただし、ρ,u,v,p,e はそれぞれ、密度、x-、y-各方向の速度成分、圧力、単位体積あたり内部エネルギー) であり、x-、y-各方向の流束 F,G は

$$F=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ u(e+p)\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ v(e+p)\end{bmatrix}, \quad (3)$$

のように表される。また、理想気体の状態方程式

$$e=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2). \quad (4)$$

を仮定する。

次のような衝撃波解を考える。2つの状態 $U_L={}^t[\rho_L,\rho_L u_L,0,e_L], U_R={}^t[\rho_R,\rho_R u_R,0,e_R]$ [1] が、Rankine-Hugoniot 条件

$$F(U_R)-F(U_L)=s(U_R-U_L). \quad (5)$$

と次の条件[2]

$$u_L-c_L>s>u_R-c_R \text{ または } u_L+c_L>s>u_R+c_R \quad (6)$$

($c_L=\sqrt{\gamma p_L/\rho_L}$、$c_R=\sqrt{\gamma p_R/\rho_R}$は、Riemann 問題を定める2状態 U_L,U_Rにおける音速である。)を満たすとする。このとき、

$$U(x,y,t)=\begin{cases}U_L, & x<st,\\ U_R, & x>st.\end{cases} \quad (7)$$

は (1) のエントロピー解であり、x-軸方向に速度 s で進行する2次元内の平面衝撃波を表す。($s=0$ であれば静止衝撃波解) この解の差分による数値計算を考える s。

[1]行列又はベクトル A の転置を、${}^tA$ で表す。

[2]Rankine-Hugoniot 条件のみでは衝撃波における物理的なエントロピー条件を満たさないので、U_L と U_Rが衝撃波の左右の状態となる為にはこの条件を付加する必要がある。

3. Godunov 法による離散化

先ず、x,y-空間を次のように有限体積 (セル) に分割する。$I_{i,j}=(x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}})\times(y_{j-\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}})$ (i,jは整数). 時間変数も $\{t^n;0=t^0<t^1<\cdots\}$ の様に離散化し、空間、時間の離散化は共に一様であるとしておく。即ち、任意の i,j,n について $x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}}=\Delta x,\ y_{j+\frac{1}{2}}-y_{j-\frac{1}{2}}=\Delta y,\ t^{n+1}-t^n=\Delta t$ for all n. また、CFL 条件についても

$$\frac{|u|+c}{\Delta x}+\frac{|v|+c}{\Delta y}\le\frac{1}{\Delta t}. \quad (8)$$

を仮定する。

ベクトル $U^n_{i,j}={}^t[\rho^n_{i,j},(\rho u)^n_{i,j},(\rho v)^n_{i,j},e^n_{i,j}]$ は、時刻 $t=t^n=n\Delta t$ における有限体積 $I_{i,j}$での状態 Uを近似するものであり、与えられた初期値 $\left\{U^0_{i,j}\right\}_{i,j\text{は整数}}$ から離散的時間発展

$$\begin{aligned}U^{n+1}_{i,j}=U^n_{i,j}&-\tfrac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\left\{\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j}-\bar{F}^n_{i-\frac{1}{2},j}\right\}\\ &-\tfrac{\Delta t^n}{\Delta y_j}\left\{\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}}-\bar{G}^n_{i,j-\frac{1}{2}}\right\},\end{aligned} \quad (9)$$

により n について逐次与えられる。ここで各方向の数値流束$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j}$,$\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}}$は有限体積境界における流束 F,G それぞれの近似で、Godunov 法では次のように与えられる。

各 $F^n_{i+\frac{1}{2},j}$は、$U^n_{i,j}$と $U^n_{i+1,j}$の2状態が定める Riemann 問題

$$U_t+F(U)_x=0,\ U(x,y,0)=\begin{cases}U^n_{i,j}, x<0\\ U^n_{i+1,j}, x>0\end{cases} \quad (10)$$

のエントロピー解 (厳密解)[3]$U=U(x,y,t)=U(x/t;U^n_{i,j},U^n_{i+1,j})$ を利用して

$$F^n_{i+\frac{1}{2},j}=F(U(0;U^n_{i,j},U^n_{i+1,j})) \quad (11)$$

と与えられる。即ち、$U^n_{i,j},U^n_{i+1,j}$の関数

$$F^n_{i+\frac{1}{2},j}=\bar{F}^G(U^n_{i,j},U^n_{i+1,j}) \quad (12)$$

であり、これを Godunov の数値流束関数とも呼ぶ。

各 $G^n_{i,j+\frac{1}{2}}$ も同様に定められ、Riemann 問題

$$U_t+G(U)_y=0,\ U(x,y,0)=\begin{cases}U^n_{i,j}, y<0\\ U^n_{i,j+1}, y>0.\end{cases} \quad (13)$$

[3]一般に保存則の Riemann 問題のエントロピー解 $U=U(x,y,t)$ が存在すればそれは x/t に依存する相似解である。

のエントロピー解 (厳密解)

$$U = U(x, y, t) = U(y/t; U^n_{i,j}, U^n_{i,j+1})$$

から

$$G^n_{i,j+\frac{1}{2},j} = \bar{G}(U^n_{i,j}, U^n_{i,j+1}) = G(U(0; U^n_{i,j}, U^n_{i,j+1})). \tag{14}$$

により与えられる。

4. 離散モデルの解析

Godunov 法により得られる離散モデル (9) の解析を進める。

初期値$\left\{U^0_{i,j}\right\}_{i,j\text{は整数}}$が jに全く依存しない完全に 1 次元的なものであり、かつ離散的な時間発展 (9) が桁落ち等による誤差が皆無で厳密に計算されると仮定すれば、多次元計算の不安定性は 1 次元計算の不安定性がない限り生じ得ない。また、桁落ち等による誤差の発生を仮定しても、各セル $I_{i,j}$ における誤差が jに依存しなければ、誤差発生を含む数値計算が全く 1 次元的であり多次元性による不安定は生じ得ない。

しかしながら、実際の数値計算では 2 つのセル I_{i,j_1} と I_{i,j_2} $(j_1 \neq j_2)$ における計算誤差は異なり得る。[4] ただ、その誤差の蓄積のみでは一旦誤差の発生が観察されればそれが急速に発展するカーバンクル不安定の現象を十分に説明できない。そこで、一旦誤差が発生すればそれが離散モデル (9) により増幅される機構が存在すると推論するのが自然である。実際、[3, 1] においても同様の視点から議論を展開している。

ここでは議論を単純化するために、誤差の odd-even 性 (偶奇交代性)

$$\begin{aligned} U^n_{i,j} &= U^n_i + (-1)^j \hat{U}^n_i, \\ U^n_i &= {}^{\mathrm{t}}[\rho^n_i, (\rho u)^n_i, 0, e^n_i], \\ \hat{U}^n_i &= {}^{\mathrm{t}}[\hat{\rho}^n_i, \widehat{(\rho u)}^n_i, \widehat{(\rho v)}^n_i, \hat{e}^n_i t]. \end{aligned} \tag{15}$$

を仮定する。$(-1)^j \hat{U}^n_i$が (本来は jに関係なく $U^n_{i,j} = U^n_i$であるべき) 各 $U^n_{i,j}$に係る計算誤差であるという仮定である。この仮定はそれ程人工的なものではない。実際、カーバンクル不安定は概ね odd-even であり、これは保存型差分近似の保存性から見ても自然である。また、実際の計算において脚注 4に述べた方法でΔyの計算機上デジタル表現の誤差を抑制した数値計算を設定し $n = 0$ の段階で (15) の様に誤差を与えれば、カーバンクル不安定を発生させる事ができ、任意の n で桁落ち誤差分を除いて (15) が保たれる。

以下の議論は、進行衝撃波と静止衝撃波の 2 つの場合に分けて行う。

[4] こうした数値計算上の誤差は、主に、$\Delta y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$ のデジタル表現が jに依存して桁落ち誤差により同一でなくなる事に由来するのではないかと考えられる。実際、$y_j + \frac{1}{2} = j$ として計算機上の Jの表現に整数型変数をとればそのような桁落ち誤差は発生せずこの平面衝撃波の数値計算ではカーバンクル不安定は発生しない。しかし、このような場合でも誤差を一旦与えるとカーバンクル不安定が生じる。これは、不安定を起こす最初の誤差の発生機構と不安定の成長機構とは別物として考察すべきである事も示唆している。

4.1. 進行衝撃波の場合

解析の単純化のため、次のような意味で「十分に上流的な状況」であるとしておく。

$$u \pm c, u >> 0, c = \sqrt{\gamma p/\rho} \tag{16}$$

即ち、x-軸方向につき各有限体積の状態だけでなく各有限体積境界で数値流束を求める為の Riemann 問題も含めた「完全な上流性」を仮定する。

ここで次の定理が基本的である。

定理 1 (9) と (15) の仮定の下で、関係式

$$\begin{aligned} \hat{U}^{n+1}_i &= \hat{U}^n_i - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{\partial F}{\partial U}(U^n_i)\hat{U}^n_i - \frac{\partial F}{\partial U}(U^n_{i-1})\hat{U}^n_{i-1}\right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y}\cdot 2\left|\frac{\partial G}{\partial U}(U^n_i)\right|\hat{U}^n_i \\ &= \left\{I - \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\partial F}{\partial U}(U^n_i) - 2\frac{\Delta t}{\Delta y}\left|\frac{\partial G}{\partial U}(U^n_i)\right|\right\}\hat{U}^n_i \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\partial F}{\partial U}(U^n_{i-1})\hat{U}^n_{i-1} + o(\delta), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U^{n+1}_i}{\partial U^n_i} = \left\{I - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\dfrac{\partial F}{\partial U}(U^n_i) - 2\dfrac{\Delta t}{\Delta y}\left|\dfrac{\partial G}{\partial U}(U^n_i)\right|\right\}, \\ \dfrac{\partial U^{n+1}_i}{\partial U^n_{i-1}} = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\dfrac{\partial F}{\partial U}(U^n_{i-1}), \\ \dfrac{\partial U^{n+1}_i}{\partial U^n_k} = O,\ i - k \neq 0, 1 \end{cases} \tag{18}$$

が得られる。$|A|$ はある行列 Pで $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ と対角化される A について

$$|A| = P \cdot diag(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|) \cdot P^{-1}$$
$$= P \begin{bmatrix} |\lambda_1| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\lambda_2| & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & & \cdots & & |\lambda_n| \end{bmatrix} P^{-1} \tag{19}$$

の様に与えられる。[5] また Oは零行列を表す。

[5] 行列 A が対角化可能な場合、対角化を与える行列 Pは一意ではないが、ここで定義される $|A|$ は Pの取り方に依存しない事を注意しておく。

定理の証明は、次の補題 2、3. から与えられる。これらはx-軸方向の「十分な上流性」(16) とy-軸方向では通常の線形化が可能である事実に基く。

補題 2

$$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j} = F(U^n_{i,j}). \tag{20}$$

補題 3

$$\begin{aligned}\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}} = &\tfrac{1}{2}\{G(U^n_{i,j}) + G(U^n_{i,j+1})\} \\ &-\tfrac{1}{2}\left|\tfrac{\partial G}{\partial U}(U^n_i)\right|(U^n_{j+1} - U^n_j) + o(\delta).\end{aligned} \tag{21}$$

上の 2 つの補題はそれぞれ Godunov 法における数値流束$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j}$又は$\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}}$ を定める Riemann 問題 (10) 又は (13) を考察すれば容易に得られるものである。さて、数列$\hat{U}^n$と行列 E^{n+1}_nを

$$\begin{aligned}\hat{U}^n = {}^{\mathrm{t}}\Big[&\cdots, \hat{\rho}^n_i, \widehat{(\rho u)}^n_i, \widehat{(\rho v)}^n_i, \hat{e}^n_i, \\ &\hat{\rho}^n_{i+1}, \widehat{(\rho u)}^n_{i+1}, \widehat{(\rho v)}^n_{i+1}, \hat{e}^n_{i+1}, \cdots\Big], \\ E^{n+1}_n = &\left[\frac{\partial U^{n+1}_i}{\partial U^n_k}(U^n_k)\right]_{i,k:\text{整数}},\end{aligned}$$

のように定める。但し、$\frac{\partial U^{n+1}_i}{\partial U^n_k}(U^n_k)$ は Eの 4×4 小行列であり i,kは整数である。[6]すると、$\hat{U}^n$から$\hat{U}^{n+1}$への離散的時間発展$\hat{U}^n \mapsto \hat{U}^{n+1}$ は

$$\hat{U}^{n+1} = E^{n+1}_n \cdot \hat{U}^n + o(\delta).$$

のように書き表す事ができ、更に行列 E^{n+r}_nを $E^{n+r}_n = \left[\frac{\partial U^{n+r}_i}{\partial U^n_k}(U^n_k)\right]_{i,k:\text{整数}}$ として、

$$\hat{U}^{n+r} = E^{n+r}_n \cdot \hat{U}^n + o(\delta) \tag{22}$$

の関係が得られる。[7]

さて、ここで進行速度 s の$\Delta x/\Delta t$ に対する比が正の有理数、即ち

$$s = \frac{q}{r}\frac{\Delta x}{\Delta t}, r, q\text{は互いに素な自然数} \tag{23}$$

となるような圧縮性 Euler 方程式の衝撃波解について、当該離散モデルに

$$U^{n+r}_{i+q} = U^n_i,\ i, n\text{ は整数}, n \geq 0 \tag{24}$$

の意味で安定な離散衝撃波プロファイルが存在すれば[8]、写像

$$U^n = (U^n_i)_{i:\text{整数}} \longrightarrow U^{n+1} = \left(U^{n+r}_{i+q}\right)_{i:\text{整数}}$$

の線形化 E^{n+r}_nは各要素の添字のずれを除けば

$$E^{(n+m\dot{r})+r}_{n+m\dot{r}} = E^{n+r}_n, m\text{ は自然数}$$

となり[9]、E^{n+r}_nの表す線形写像の安定性から進行衝撃波の数値計算の線形安定性が分かる。

4.2. 静止衝撃波の場合

y-軸方向では 4.1と同じく補題 3が有効だが、x-軸方向では「十分な上流性」がなく$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}}$は U^n_i, U^n_{i+1}の両方に依存し得る為、$\dfrac{\partial \bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}}}{\partial U^n_i}$、$\dfrac{\partial \bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}}}{\partial U^n_{i+1}}$ を求める必要がある。そこで離散モデルにおける衝撃波のプロファイルから考察を進める。

一般に静止衝撃波の離散モデルでは衝撃波付近のいくつかの計算点 (または計算体積) における状態値は衝撃波両側の状態とは異なる遷移的な状態 (中間状態) をとる。圧縮性 Euler 方程式の Godunov 法による離散モデルではこの中間状態は高々一つである。衝撃波両側 (左右) の状態を U_L, U_R、中間状態を U_Mとする。U_L, U_M, U_Rでの密度、速度 (x-軸方向)、圧力をそれぞれ$\rho_L, \rho_M, \rho_R, u_L, u_M, u_R, p_L, p_M, p_R$と記す。

また、$u_L, u_M, u_R > 0$ とする。この場合の静止衝撃波は 3 つの特性速度 $u, u\pm c$ (c は音速) のうち $u - c$ に対応する 1-衝撃波と呼ばれるものになる。

U_Mは U_Lと共に 1-衝撃波[10] の左右両側の状態となるような状態を取る。つまり Rankine-Hugoniot の条件と 1-衝撃波の衝撃波速度 s の制約

$$\begin{cases} F(U_R) - F(U_M) = s(U_R - U_M), \\ u_R - c_R < s < u_M - c_M \end{cases}$$

を満たし、かつ

$$u_R - c_R \leq s \leq 0$$

[6] これらの小行列は定理 1内の式により得られ、$i-k \neq 0, 1$ の場合には零行列 Oとなる。

[7] E^{n+r}_nについて、$E^{n+r}_n = E^{n+r}_{n+r-1} \times \cdots \times E^{n+1}_n$, $r \geq 1$ であり、$i - r \leq k \leq i$ 以外の場合には$\frac{\partial U^{n+r}_i}{\partial U^n_k}(U^n_k) = 0$ である。

[8] 安定な進行衝撃波の数値計算における安定な離散プロファイルについては理論的な解決は未だなされていない。後の数値計算では安定な離散プロファイルに十分に近いと考えられるデータを数値計算により得て数値実験を行う。

[9] 厳密に記せば、行列 A の (i,j) 要素を $(A)_{i,j}$と表す事にして$\left(E^{(n+m\dot{r})+r}_{n+m\dot{r}}\right)_{i+m\dot{q},j} = \left(E^{n+r}_n\right)_{i,j}$ となる。

[10] 静止衝撃波とは限らない、即ち衝撃波速度 s は 0 とは限らない。

の意味でU_LとU_Rの間になければならない[11]。

次にRiemann問題の解の構造の理解の為、$U = U_0$を基点とする波曲線 (wave curve) を紹介する。圧縮性 Euler 方程式では次の 5 種があり、全て解析的な表現が可能である。

- 1-衝撃波曲線 (1-shock curve):
  U_0とUが 1-衝撃波 (特性速度$u - c$に対応) の左右の状態となるようなUの集合。
- 1-膨張波曲線 (1-rarefaction curve):
  U_0とUが 1-膨張波 (特性速度$u - c$に対応) の左右の状態となるようなUの集合。
- 2-接触波曲線 (2-contact curve):
  U_0とUが 2-接触波 (特性速度uに対応) の左右の状態となるようなUの集合。
- 3-衝撃波曲線 (3-shock curve):
  UとU_0が 3-衝撃波 (特性速度$u + c$に対応) の左右の状態となるようなUの集合。
- 3-膨張波曲線 (3-rarefaction curve):
  UとU_0が 3-膨張波 (特性速度$u + c$に対応) の左右の状態となるようなUの集合。

詳しくは [5] 等を参照されたい。2-接触波曲線は、$u = u_0, p = p_0, \rho$は任意正数 という簡単な表現が知られる。1-衝撃波曲線と 1-膨張波曲線はU_0から互いに反対の方向に伸びる半曲線で、これらを合わせて 1-波曲線という。同様に 3-衝撃波曲線と 3-膨張波曲線はU_0から互いに反対の方向に伸びる半曲線で、これらを合わせて 3-波曲線という。

一般的に状態U_-とU_+ (これらの密度、x-軸方向の速度、圧力をそれぞれ$\rho_-, \rho_+, u_-, u_+, p_-, p_+$とする) の生成する圧縮性 Euler 方程式の Riemann 問題の解$U = U(x/t; U_-, U_+)$は次のように構成できる。上の波曲線をρ(密度)-u(速度)-p(圧力) を軸とする状態Uの空間で考える。U_-が基点の 1-波曲線C_1とU_+が基点の 3-波曲線C_3について、それぞれのu-p平面への射影$\bar{C}_1, \bar{C}_3$をとりその交点(u_m, p_m)をとる。交点(u_m, p_m)に対応するC_1,C_3上の点が表す状態をそれぞれ$U_{m,-}, U_{m,+}$とする。(これらの状態の密度をそれぞれ$\rho_{m,-}, \rho_{m,+}$とする。) すると、この Riemann 問題の解は左側$(x/t = -\infty)$から右側$(x/t = +\infty)$に向かって

- 左側の状態U_-
- U_-と$U_{m,-}$を結ぶ (左右両側の状態とする) 1-衝撃波または 1-膨張波
- 状態$U_{m,-}$
- $U_{m,-}$と$U_{m,+}$を結ぶ 2-接触波
- 状態$U_{m,+}$
- $U_{m,+}$とU_+を結ぶ (左右両側の状態とする) 3-衝撃波または 3-膨張波
- 右側の状態U_+

となる。

本議論の静止衝撃波プロファイルに現れる Riemann 問題については次のようになる。

(1) $U(x/t; U_L, U_L)$
  $x/t{=}0$ で上のU_-に相当する状態をとる。

(2) $U(x/t; U_L, U_M)$
  $x/t{=}0$ で上のU_-に相当する状態をとる。

(3) $U(x/t; U_M, U_R)$
  $x/t{=}0$ で上の$U_{m,-}$に相当する状態をとる。

(4) $U(x/t; U_M, U_R)$
  $x/t{=}0$ で上の$U_{m,-}$に相当する状態をとる。

Riemann 問題の解の$x/t{=}0$での値から Godunov の数値流束が求まるので、(1),(2) では完全上流性から

$$\frac{\partial \bar{F}^G(U_-, U_+)}{\partial U_-} = \frac{dF}{dU}(U_-), \frac{\partial \bar{F}^G(U_-, U_+)}{\partial U_+} = O,$$

である。(3),(4) では波曲線の解析的表現から

$$\frac{\partial(\rho_{m,\pm})}{\partial(\rho_\pm, u_\pm, p_\pm)}, \frac{\partial(u_m)}{\partial(\rho_\pm, u_\pm, p_\pm)}, \frac{\partial(p_m)}{\partial(\rho_\pm, u_\pm, p_\pm)}$$

が解析的に得られ、更に

$$\frac{\partial \bar{F}^G(U_-, U_+)}{\partial U_-} = \frac{dF}{dU} \cdot \frac{\partial U(0; U_-, U_+)}{\partial U_-},$$
$$\frac{\partial \bar{F}^G(U_-, U_+)}{\partial U_+} = \frac{dF}{dU} \cdot \frac{\partial U(0; U_-, U_+)}{\partial U_+}$$

を解析的に求める事が可能である。

さて、静止衝撃波プロファイルによる初期値

$$U_i^0 = \begin{cases} U_L, i \le -1 \\ U_M, i \le 0 \\ U_R, i \le 1 \end{cases} \tag{25}$$

が与えられれば解は全ての$n \ge 0$において

$$U_i^n = \begin{cases} U_L, i \le -1 \\ U_M, i \le 0 \\ U_R, i \le 1 \end{cases} \tag{26}$$

[11] ここで、$s = u_R - c_R$であれば$U_M = U_R$であり、また、$s = 0$であれば、$U_M = U_R$となる。これらは数値計算において中間状態がない場合に相当する。

となるが、この離散時間発展 $U^n = \{U_i^n\}_{i\text{ は整数}} \longrightarrow U^{n+1} = \{U_i^{n+1}\}_{i\text{ は整数}}$ の線形化安定性は $\dfrac{\partial U^{n+1}}{\partial U^n}$ によって調べる事ができる。実際、$\dfrac{\partial U^{n+1}}{\partial U^n}$ は

$$\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial U_{i-1}^n} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial F_{i-\frac{1}{2}}^n}{\partial U_{i-1}^n}$$
$$\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial U_i^n} = I - \frac{\Delta x}{\Delta t}\left\{\frac{\partial F_{i+\frac{1}{2}}^n}{\partial U_i^n} - \frac{\partial F_{i-\frac{1}{2}}^n}{\partial U_i^n}\right\}$$
$$\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial U_{i+1}^n} = -\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial F_{i+\frac{1}{2}}^n}{\partial U_{i+1}^n}$$

から解析的に表される。

5. 数値計算による観察

以上の議論を元に、実際の Godunov 法の数値計算と線形安定性の観察を行い Carbuncle 不安定性と線形安定性の関係を調べる。

実際の数値計算では無限個のデータは扱えない為、衝撃波を含む十分に大きな空間的領域で Godunov 法の数値計算を行い、かつ有限化された E_n^{n+r}(進行衝撃波の場合) や $\frac{\partial U^{n+1}}{\partial U^n}$(静止衝撃波の場合) を調べる事となる。

精密な数値計算はまだ途上であるが、結果として以下の事を述べておく。

(1) 進行衝撃波の場合、十分に大きな空間的領域で計算を行えば領域を有限化したことによる問題は生じない。即ち、領域を十分に大きく取れば領域の取り方による結果の変化は殆ど生じない。(x-軸方向両端の境界条件に対しては流入及び流出条件を用いている。)

(2) 静止衝撃波の場合、精密な計算を行おうとすると境界条件の実装の仕方により安定性に微妙な変化が生じることが観察される。これはカーバンクル不安定性とは別物である 1 次元静止衝撃波プロファイルの不安定性に関連するのではないかと推測される。

(3) 進行·静止どちらの場合でも、カーバンクル不安定と線形不安定の発生は概ねは一致する。この意味では、[3] の追試となっている。

(4) 精密な計算を行うと進行衝撃波の場合はカーバンクル不安定と線形不安定の一致は非常に良い。静止衝撃波の場合と比べこの事実は対照的である。これは、1 次元的 (x-軸方向) なプロファイルが進行衝撃波では静止衝撃波に比べて非常に安定であるからではないかと推測される。また、この 1 次元的安定性の相違は進行衝撃波のプロフィルが静止衝撃波に比べ多くの中間状態 (厳密には無限個ではないかと思われる) を有する事に由来すると推測される。

(5) 静止衝撃波の場合に精密な計算を行うと Godunov 法の数値計算の不安定と線形不安定が一致しないグレーゾーン的な部分が観察される。この Godunov 法の数値計算の不安定がカーバンクル的な不安定性で計算を破綻させるものか、それとも 1 次元静止衝撃波プロファイルの不安定性によるもの (この場合計算を破綻させない程度の不安定性が継続するものと予想される) であるのかについてより詳細な数値計算と理論解析を進める必要がある。([4] 等の議論参照)

参考文献

1) H. Aiso, M. Abouziarov and T. Takahashi. Machinery of Numerical Instability in Conservative Difference Approximations for Compressible Euler Equations. . In S. Nishibata, editor, *Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics*, pages 178–191. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2003.

2) J. Quirk. A contribution to the great Riemann solver debate. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18:555–574, 1994.

3) J.-Ch. Robinet, J. Gressier, G. Casalis, and J.-M. Moschetta. Shock Wave Instability and Carbuncle Phenomenon: same intrinsic origin? . *J. Fluid Mechanics*, 417:237–263, 2000.

4) Roe, P.L. Affordable, Entropy-consistent, Flux Functions. *Abstract of Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems, Theory, Numerics, Applications*, July 2006.

5) J. Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations.* Springer-Verlag, NewYork, 1982.