

大規模乱流場を用いた交差独立性仮説の実験的検証

藤田秀治（豊橋技科大）、高佐重夫（豊橋技科大院）、関下信正（豊橋技科大）

An experimental validation of the cross-independence hypothesis
by using a large-scale turbulence

H. Makita*, S. Takasa* and N. Sekishita*

* Toyohashi University of Technology

ABSTRACT

Tatsumi's cross-independence hypothesis was experimentally verified in homogeneous quasi-isotropic turbulent fields of $R_\lambda \approx 240\text{--}350$. The PDF of the velocity-sum at two separated points was almost Gaussian in the whole wave-number range. But for the velocity-difference, it obeyed Gaussian in the low wave-number range and gave non-Gaussian distribution in the viscous subrange. Correlations were calculated between the velocity-sum and the velocity-difference to examine the statistical independence of the cross-velocity. The even-order correlations of the cross-velocity were almost completely independent. But the odd-order correlation did not show such independence, because the PDF of the velocity fluctuation is not strictly symmetric and the skewness can not be zero. Further modification is desired for the hypothesis by taking into account the existence of the viscous subrange and the asymmetrical PDF of the practical turbulent fields.

Key Words : turbulence, closure problem, cross-independence hypothesis, pdf, skewness, hot-wire measurement

1. はじめに

乱流現象の解明・予測には、不規則に変動する乱流運動の統計的性質を与える確率分布関数を得ることが必要である。しかし、確率分布関数を与える Hopf の確率分布汎関数方程式¹⁾の一般解を得るのは困難であるため、Lundgren²⁾と Monin³⁾によって独立に導かれた有限次元の確率分布関数方程式によらなければならない。しかし、これは無限に連鎖する非完結方程式であり、何らかの完結仮説を用いて方程式を閉じなければならない。

乱流場の確率分布関数を定めるため、これまでに様々な完結仮説⁴⁻⁷⁾が提案されてきたが、それぞれ固有の有効範囲に限られていた。巽⁸⁻¹¹⁾により、広い有効範囲を持った新たな完結仮説が提案された。それは、一様乱流場中の2点における速度変動の和と差（交差速度）を新たな変数とする、交差速度の統計的独立性を仮定した交差独立性仮説であり、それを用いて方程式を閉じ確率分布関数を求めている。現在、その実験的検証を通して、新たな知見により本仮説をさらに発展させることが求められている。

本研究では、乱流発生装置によって風洞内に形成された大規模乱流場¹²⁾を用いて交差速度の確率分布を求め、巽の解⁹⁾を検討するとともに、交差速度の独立性に着目して交差独立性仮説の検証を行った。

2. 検証に用いた乱流場

交差独立性仮説の検証には、図1に示した乱流発生装置

（格子間隔 $M=46.7\text{mm}$ ）によって形成された一様準等方性乱流場 ($R_\lambda \approx 240\text{--}350$)¹²⁾を用いた。この乱流場の諸特性量を表1に示す。計測は、定温度型熱線流速計とX型プローブを用い、速度変動の主流方向成分 u と鉛直方向成分 v を得た。プローブの線径は $3.2\mu\text{m}$ 、検査体積は $0.8 \times 0.8 \times 0.2\text{mm}^3$ で、本乱流場の Kolmogorov スケール $\eta \approx 0.26\text{--}0.42\text{mm}$ と同程度である。計測位置は、装置の影響がなく、乱流場が十分に発達している $X/M=100$ の測定胴断面中心とした。なお、座標原点は乱流発生装置の回転軸面中心である。この乱流場の速度変動の skewness は u については $S \approx 0.07\text{--}0.13$ 、 v については $S \approx 0.02\text{--}0.04$ であり、確率分布は若干の非対称性を持っている¹³⁾。仮説の検証には表1に示した R_λ の異なる3つの乱流場を用いたが、ほぼ同様の傾向となったので、主に $R_\lambda \approx 350$ の乱流場を用いた検証結果について述べる。

3. 乱流場の確率分布関数方程式

Lundgren-Monin の確率分布関数方程式²³⁾は、非完結方程式であり、低次の確率分布関数を得るためにはより高次の確率分布関数が必要となり、無限に連鎖する。そこで、完結仮説を導入して高次関数を低次関数で近似し、方程式を閉じる必要がある。

完結仮説の一つに統計的独立性を仮定する独立性仮説がある。距離 r 離れた2点の速度変動が統計的に独立であれば、 \mathbf{u}_1 と \mathbf{u}_2 の2点確率分布関数 $f^{(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ は、

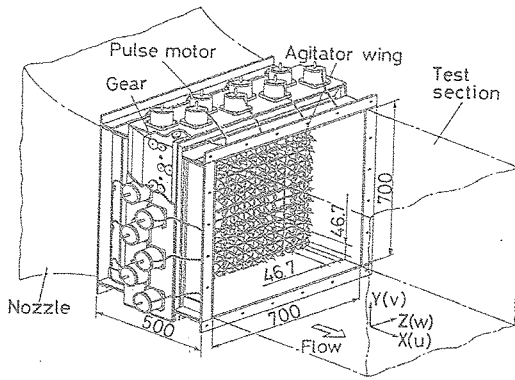


図1 乱流発生装置¹²⁾ [単位:mm]

表1 一様準等方性乱流場の諸特性量

U [m/s]	u'/U [-]	u'/v' [-]	ϵ [m ² /s ³]	L [mm]	η [mm]	R_λ [-]
3	0.09	1.1	0.12	160	0.42	240
4	0.10	1.2	0.27	230	0.34	300
5	0.11	1.2	0.69	220	0.26	350

$$f^{(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) \cdot f(\mathbf{u}_2)$$

となり、高次関数がより低次の関数で表され、Lundgren-Monin 方程式は閉じられる。しかし、乱流場中の2点の独立性が満たされるのは r が大きな場合であり、 r が小さな場合には統計的に独立ではないため、独立性仮説は破綻する。4点確率分布関数を2点確率分布関数の積で近似する独立性仮説でも同様の困難を有する。

異⁸⁾は、一様乱流場中の r 離れた2点の速度変動 \mathbf{u}_1 と \mathbf{u}_2 の和と差を新たな確率変数とし、これらが r に依存せず常に統計的に独立であると仮定する交差独立性仮説を提案した。速度和 \mathbf{u}_+ と速度差 \mathbf{u}_- は、 \mathbf{u}_1 と \mathbf{u}_2 から、

$$\mathbf{u}_+ = (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1)/2, \quad \mathbf{u}_- = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)/2$$

で定義され、二つを合わせて交差速度と呼ぶ。交差独立性仮説では \mathbf{u}_+ と \mathbf{u}_- を統計的に独立と仮定するので、交差速度の2点確率分布関数 $g^{(2)}(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$ は、

$$g^{(2)}(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) = g_+(\mathbf{u}_+) \cdot g_-(\mathbf{u}_-)$$

となり、1点確率分布関数 $g_+(\mathbf{u}_+)$ と $g_-(\mathbf{u}_-)$ の積で表される。 \mathbf{u}_+ は乱流運動のより大規模な成分に、 \mathbf{u}_- はより小規模な成分に対応することから、異の交差独立性仮説は乱流運動の大規模成分と小規模成分は統計的に独立と仮定するKolmogorovの普遍平衡理論¹⁴⁾と本質的に等価である。また、 $f^{(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ と $g^{(2)}(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$ との間には、

$$f^{(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = J^{-3} \cdot g^{(2)}(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$$

の関係がある¹¹⁾。ここで、 J は Jacobian である。これらによって異⁸⁾は、Lundgren-Moninの1点確率分布関数方程式に交差独立性仮説を適用し、一様乱流場の速度の正規分布解を得た。さらにLundgren-Moninの2点確率分布関数方程式から、交差速度の確率分布関数を求め、 r の大きな領域では速度和・速度差の確率分布関数はともに正規分布と

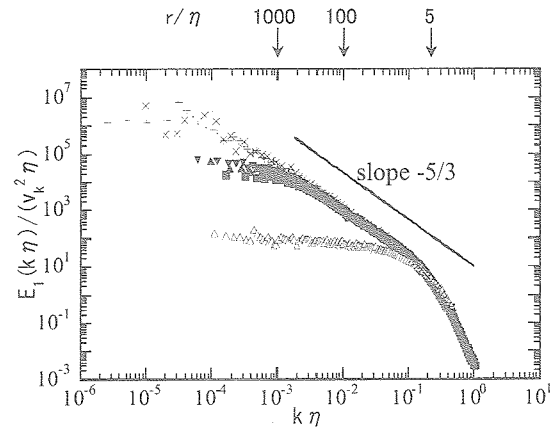


図2 エネルギースペクトルと2点間距離 r/η との対応
 ■; $R_\lambda \approx 240$, ▲; $R_\lambda \approx 300$, ▼; $R_\lambda \approx 350$, △; grid ($R_\lambda \approx 25$)
 ×; tidal channel (Grant et.al.¹⁶⁾
 +; turbulence in a huge wind tunnel (Gagne et.al.¹⁷⁾

なり、 r の小さな領域においては主流方向の速度差を除き正規分布となる解を得た^{9,10)}。

4. 交差独立性仮説の検証

4-1. 交差速度

本研究では、風洞内に形成された乱流場中の固定された1点において計測された速度変動 $\mathbf{u}(t) = (u(t), v(t))$ から、Taylorの凍結仮説¹⁵⁾を用いて、主流方向に距離 $r (=U\tau)$ 離れて並んだ2つの点における速度変動をそれぞれ、

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(x_1, t) = (u(t), v(t))$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}(x_2, t) = \mathbf{u}(x_1 + r, t) \approx \mathbf{u}(x_1, t + \tau) = (u(t + \tau), v(t + \tau))$$

として、これを用いて交差速度、

$$u_+ = (u_2 + u_1)/2, \quad u_- = (u_2 - u_1)/2$$

$$v_+ = (v_2 + v_1)/2, \quad v_- = (v_2 - v_1)/2$$

を求めた。 η で無次元化した2点間距離 r/η と速度変動の1次元エネルギースペクトルとの対応関係を図2に示す。 r のとり方によって、慣性小領域やエネルギー保有領域(低波数領域)に対応することになる。なお、慣性小領域中の最大スケール l_G は蒔田・飯田の方法¹⁸⁾に、最小スケール l_s は蒔田・関下の方法¹⁹⁾により決定した。これらの方法を用いれば、より厳密に慣性小領域を定義することができる。

4-2. 交差速度の確率分布

交差速度の確率分布を図3に示す。 r/η が大きな場合、確率分布はほぼ正規分布に従う。 r/η が小さくても、速度和の確率分布はほぼ正規分布に従っている。一方、速度差の確率分布は、正規分布に比べ分布中央で突出し裾に大きく広がっている。

r/η による確率分布形状の違いを見るために、交差速度のflatness F の r/η 依存性を図4に示す。 F は確率分布の扁平度を表す4次の無次元量であり、正規分布では $F=3$ となる。速度和では、全領域でほぼ正規分布の値 $F \approx 3$ とな

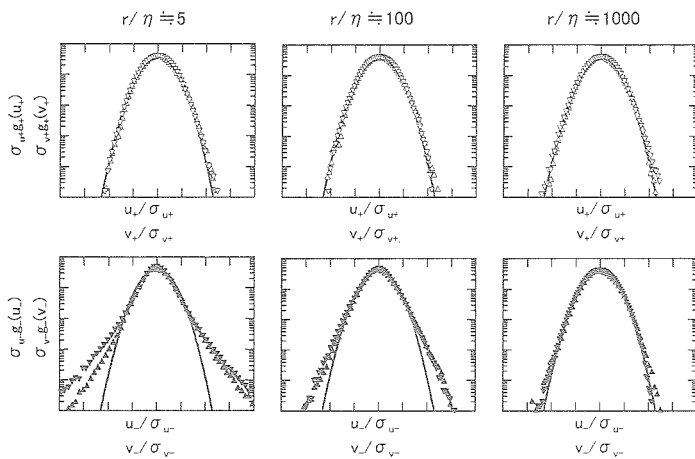


図3 交差速度の確率分布 ($R_\lambda \approx 350$)

$\Delta; u_x, \nabla; v_x, \blacktriangle; u_y, \blacktriangledown; v_y, -$; Gaussian

っており、Sreenivasan ら²⁰⁾が得た大気乱流場の速度和 ($r/\eta \approx 10 \sim 1250$) の確率分布と同様の傾向となっている。速度差では、 r/η がエネルギー保有領域程度の距離 ($r/\eta \geq 10^3$) では、 $F \approx 3$ となっているが、慣性小領域付近で u_x, v_x とともに非正規的 ($F > 3$) となり、 r/η が小さくなるに従い、 F は大きくなる。速度差の r 無限小の極限は速度変動の微分値に一致する。乱流微細構造の間欠性が存在するため、速度変動の微分値の F は R_λ に依存して大きくなる性質があり²¹⁾、近距離において速度差の F は大きくなる。なお、 r が l_s 程度よりも小さくなると F の値がばらつくのは、プローブの分解能の限界と考えられる。

ここで、巽・吉村¹⁰⁾の結果と本研究の結果を比較する。巽・吉村が2点確率分布関数方程式に含まれる3点確率分布関数に交差独立性仮説を適用して求めた交差速度の確率分布関数は、近距離領域における主流方向成分の非正規性を除き、正規分布解となることが示されているが、本研究で得た確率分布はこれとは異なる結果となった(表2)。これは、巽・吉村の解析では動粘性係数 ν が0の極限であり、粘性消散領域が考慮されていないために、実在乱流場のものとは一致しない結果になったと考えられる。

4-3. 交差速度の独立性

交差速度が統計的に独立であれば、交差速度の相関は、

$$\langle u_i^m u_j^n \rangle = \langle u_i^m \rangle \cdot \langle u_j^n \rangle$$

となる。なお、 $\langle \rangle$ は平均を表す。よって、交差速度が統計的に独立であれば、次に示す相関は0となる。

2次 : $\langle u_x u_y \rangle$

3次 : $\langle u_x^2 u_y \rangle, \langle u_x u_y^2 \rangle$

4次 : $\langle u_x^3 u_y \rangle, \langle u_x u_y^3 \rangle$

ここには4次相関までしか示さないが、より高次の相関も同様である。また、 v 方向の交差速度の相関も同様になる。

これを用いて交差速度の独立性を検証するため、交差速度の相関の r/η に対する変化を考察する。2次相関の r/η に対する変化を図5に、4次相関の r/η に対する変化を

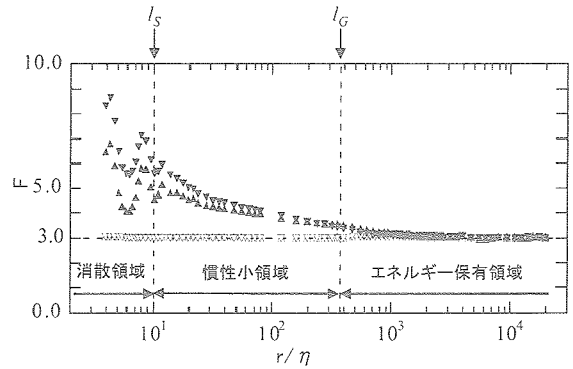


図4 交差速度の確率分布の r/η 依存性 ($R_\lambda \approx 350$)

$\Delta; u_x, \nabla; v_x, \blacktriangle; u_y, \blacktriangledown; v_y$

表2 巽・吉村¹⁰⁾の解との比較

	巽・吉村 ¹⁰⁾	本研究
速度和 u_x, v_x	全領域で正規分布	全領域で正規分布
速度差 u_x, v_x	近接領域で非正規分布 遠隔領域で正規分布	近接領域で非正規分布 遠隔領域で正規分布
	近接・遠隔領域で正規分布	近接領域で非正規分布 遠隔領域で正規分布

図7に示す。なお、各図には速度和及び速度差のモーメントも示す。相関 $\langle u_x u_x \rangle, \langle u_x^3 u_x \rangle$ 及び $\langle u_x u_x^3 \rangle$ は、 r/η に依存せずほぼ0となっており、交差速度の独立性が満たされている。これらに対し、図6に示す3次相関では、 $r/\eta \leq 10$ では相関 $\langle u_x^2 u_x \rangle, \langle u_x u_x^2 \rangle$ はほぼ0となるが、 r/η が大きくなるに従って相関 $\langle u_x u_x^2 \rangle$ は0ではなくなる。このように、3次相関では独立性が満たされていない。

2次及び4次相関では独立性が満たされるのに対し、3次相関に非独立性が現れるのは、速度変動の確率分布が非対称であり、skewness が厳密に0にならないためである。交差速度の定義式から、2次相関 $\langle u_x u_x \rangle$ と4次相関 $\langle u_x^3 u_x \rangle, \langle u_x u_x^3 \rangle$ を速度変動 u_1, u_2 を用いて表すと、

$$\langle u_x u_x \rangle = (\langle u_2^2 \rangle - \langle u_1^2 \rangle) / 4$$

$$\langle u_x^3 u_x \rangle = (\langle u_2^4 \rangle - 2\langle u_1^3 u_2 \rangle + 2\langle u_1 u_2^3 \rangle - \langle u_1^4 \rangle) / 16$$

$$\langle u_x u_x^3 \rangle = (\langle u_2^4 \rangle + 2\langle u_1^3 u_2 \rangle - 2\langle u_1 u_2^3 \rangle - \langle u_1^4 \rangle) / 16$$

となる。それぞれ、場の一様性を考慮すると、各項が互いに打ち消し合って0となり、独立性の条件を満たしている。交差速度の3次相関も同様に u_1, u_2 を用いて表すと、

$$\langle u_x^2 u_x \rangle = (\langle u_2^3 \rangle - \langle u_1^2 u_2 \rangle + \langle u_1 u_2^2 \rangle - \langle u_1^3 \rangle) / 8$$

$$\langle u_x u_x^2 \rangle = (\langle u_2^3 \rangle - \langle u_1^2 u_2 \rangle - \langle u_1 u_2^2 \rangle + \langle u_1^3 \rangle) / 8$$

となる。場の一様性を考慮すると、各項が打ち消し合って $\langle u_x^2 u_x \rangle = 0$ となるが、 $\langle u_x u_x^2 \rangle$ では、

$$\langle u_x u_x^2 \rangle = (\langle u_1^3 \rangle - \langle u_1^2 u_2 \rangle) / 4$$

となる。 $r \rightarrow 0$ では $u_1 = u_2$ であるから $\langle u_x u_x^2 \rangle = 0$ となるが、 $r \rightarrow \infty$ では、 u_1 と u_2 の相関がなく、 $\langle u_1^2 u_2 \rangle \rightarrow 0$ となり、

$$\langle u_x u_x^2 \rangle = \langle u_1^3 \rangle / 4 = \sigma^3 S / 4$$

に収束する (図6中の一点鎖線)。ここに、 σ は速度変動の標準偏差、 S は速度変動のskewnessである。これは、速度変動のskewnessが厳密に $S=0$ とならない限り、3次相関に非独立性が現れることを示している。ここには、4次相関までしか示さないが、より高次の相関においても、交差速度の定義式から同様の式展開を行い、場の一様性を考慮したとき、偶数次相関では独立性が満たされ、奇数次相関では非独立性が現れることが示される。 R_λ の大きな乱流場では $S \neq 0$ である^{13,22)}ので、奇数次相関に非独立性が現れる。よって、 $\langle u_i u_j^2 \rangle$ を r と S の関数で表す等、何らかの形で奇数次相関の非独立性を仮説に取り込む必要がある。

完結仮説としての交差独立性仮説がシンプルであることには大きな意義がある。しかし、交差独立性仮説がより有効性を持つためには、速度変動の確率分布の非対称性を仮説に取り込み、奇数次相関に現れる非独立性を解決する必要がある、今後の課題である。

5. まとめ

一様準等方性乱流場を用いて、異によって提案された交差独立性仮説を検証した結果、次の結論を得た。

- (1) 速度和の確率分布は、 r/η に依らず全領域でほぼ正規分布となる。速度差の確率分布は、遠距離領域においては正規分布となり、近距離領域においては非正規的でflatnessは大きくなる。すなわち、近距離領域の v_i の確率分布を除き、異・吉村¹⁰⁾の理論解は成立する。
- (2) 近距離領域の v_i の確率分布では、異・吉村¹⁰⁾の解析は本研究の結果と一致しない。これは R_λ が無限大で粘性消散領域が考慮されていないことによる。
- (3) 交差速度の偶数次相関では独立性を満たすが、乱流場の速度変動の確率分布は厳密には非対称でありskewnessが0とならないため、奇数次相関に非独立性が現れる。仮説がより有効性を持つために、確率分布の非対称性に由来する奇数次相関の非独立性を解決する必要がある。

参考文献

- 1) E. J. Hopf : *J. Rat. Mech. Analysis* 1, 87(1952).
- 2) T. S. Lundgren : *Phys. Fluids* 10, 969(1967).
- 3) A. S. Monin : *J. Appl. Math. Mech.* 31, 1057(1967).
- 4) T. Tatsumi : *Proc. Roy. Soc. A* 239, 16(1957).
- 5) R. H. Kraichnan : *J. Fluid Mech.* 5, 497(1959).
- 6) S. A. Orszag : R. Balian & J. L. Peube (eds.), *Fluid Dynamics* Gordon and Breach, 237(1977).
- 7) A. S. Monin & A. M. Yaglom : *Statistical fluid mechanics* vol. 2. MIT Press(1975).
- 8) 異 : 航空宇宙技術研究所特別資料 SP-36, 29(1997).
- 9) 異 : 航空宇宙技術研究所特別資料 SP-40, 71(1999).
- 10) 異・吉村 : 航空宇宙技術研究所特別資料 SP-56, 71(2002).
- 11) T. Tatsumi : T. Kambe et.al. (eds.), *IUTAM Symposium on Geometry and Statistics of Turbulence*, Kluwer, 3(2001).
- 12) H. Makita : *Fluid Dynamics Research* 8, 53(1991).
- 13) 蒔田・飯田・佐々 : 機論 B 54, 2333(1988).

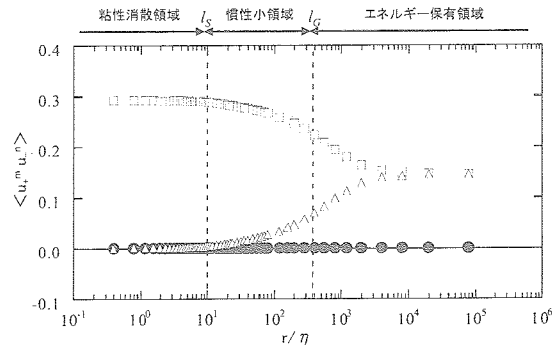


図5 交差速度の2次相関の r/η 依存性 ($R_\lambda \approx 350$)

□; $\langle u_i^2 u_j^2 \rangle$, ●; $\langle u_i u_j u_k \rangle$, △; $\langle u_i u_j u_k u_l \rangle$

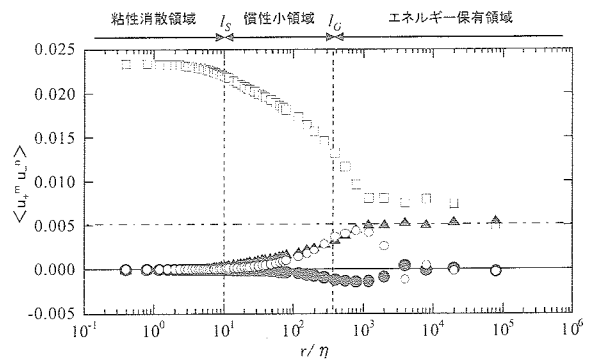


図6 交差速度の3次相関の r/η 依存性 ($R_\lambda \approx 350$)

□; $\langle u_i^3 u_j^3 \rangle$, ●; $\langle u_i^2 u_j^2 u_k^2 \rangle$, ▲; $\langle u_i u_j u_k^2 u_l^2 \rangle$, ○; $\langle u_i^3 u_j^3 u_k^3 \rangle$

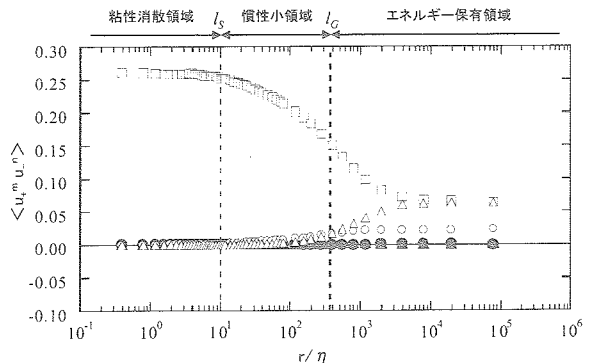


図7 交差速度の4次相関の r/η 依存性 ($R_\lambda \approx 350$)

□; $\langle u_i^4 u_j^4 u_k^4 u_l^4 \rangle$, ●; $\langle u_i^3 u_j^3 u_k^3 u_l^3 \rangle$, ○; $\langle u_i^2 u_j^2 u_k^2 u_l^2 u_m^2 u_n^2 \rangle$, ▲; $\langle u_i u_j u_k^3 u_l^3 u_m^3 u_n^3 \rangle$, △; $\langle u_i^4 u_j^4 u_k^4 u_l^4 u_m^4 u_n^4 \rangle$

- 14) A. N. Kolmogorov : *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 30, 301(1941).
- 15) J. O. Hinze : *Turbulence*. McGraw-Hill(1959).
- 16) H. L. Grant et al. : *J. Fluid Mech.* 12, 241(1962).
- 17) Y. Gagne : *Advances in Turbulence* 3, 22(1990).
- 18) 蒔田・飯田 : 機論 B 56, 351(1990).
- 19) 蒔田・関下 : 機論 B 62, 597(1996).
- 20) K. R. Sreenivasan & B. Dhruva : *Prog. theo. phys. suppl.* 130, 103(1998).
- 21) C. W. Van Atta & R. A. Antonia : *Phys. Fluids* 23, 252(1980).
- 22) T. Gotoh et. al : *Phys. Fluids* 14, 1065(2002).