

## 前処理法による非定常低速流れの数値解析の精度

向井純一, 榎本俊治 (航技研)

Accuracy of Numerical Analysis for Unsteady Low-Speed Flows  
Using Preconditioning

by

Junichi Mukai, Shunji Enomoto(NAL)

## ABSTRACT

When computational simulation for low Mach number flows is carried out with a compressible flow solver, its performance deteriorates in terms of both convergence speed and accuracy. Difficulties with low speed flow calculation are caused by the disparate particle and acoustic wave speed. Local preconditioning method for the low speed flow minimizes this wave speed range to improve convergence of an iterative method. When calculating unsteady flows, this difficulty also arises. Therefore, preconditioning method is applied to the inner iteration for the unsteady calculation.

This paper reports the accuracy of the basic low speed unsteady flows calculation with preconditioning method.

## 1. はじめに

航空機が離着陸する際の高揚力装置まわりなど流れが低マッハ数領域と圧縮性が重要になる領域とが混在する流れ場での数値計算においては、低マッハ数領域で音速に比べて流速の大きさが非常に小さいために特性速度の大きさがアンバランスになってしまい、解の収束性と精度が悪くなってしまう。この問題を解消するために、時間微分項に適当な行列を乗じることで、低マッハ数領域における特性速度の大きさを揃えて解を求める前処理法<sup>(1-5)</sup>が使われるようになってきた。

また、低速流れの非定常計算を行う際に、陽解法では時間刻み幅が音速の大きさに制限される。また、陰解法では時間刻み幅は比較的大きく取れるが、時間精度を維持するために行う Newton 法において残差が落ち難くなり、内部イタレーションの回数を多くとらなければならなくなる。そのため、陰解法を用いてもある程度流れが流れるまでに莫大な計算時間がかかってしまう。そこで、そのような非定常流れの計算を効率よく行うために、擬似時間項を形式的に導入し、それに前処理行列をかけて収束を加速して擬似時間に対して内部イタレーションによる繰り返し計算をすることで各タイムステップにおける解を求める方法があるが、その計算精度についてはまだ詳しく調べられていない。

今回の研究では、航技研で開発を行っている CFD 共通基盤プログラム、UPACS<sup>(6-8)</sup> (Unified Platform for Aerospace Computational Simulation) に対して、そのような前処理法を用いた非定常計算が行えるように改変し、Lamb 渦の移流、線形波の伝播、2次元円柱周りの流れという基本的な流れの計算に対する解の精度について調べた。

## 2. 計算手法

Euler 方程式の有限体積法による前処理法を用いた非定常計算は、擬似時間  $\tau$  による擬似時間項と前処理行列  $\Gamma$  を導入して次のような差分式を用いる。

$$\Gamma \frac{W^{s+1} - W^s}{\Delta \tau} + \frac{3Q^{s+1} - 4Q^s + Q^{s-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{V} \sum_{face} F^{s+1} = 0$$

$$Q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e), \quad W = (p, u, v, w, T)$$

ただし、ここでは時間微分項は片側 2 時で差分近似したものを考えた。なお、 $V$  はセルの体積、 $F$  はセル表面における流れ、 $n$  は物理時間を示すインデックス、 $s$  は内部イタレーションを示すインデックスである。 $n+1$  ステップでの解は、 $W^n$  までの解が求まっているとして、内部イタレーションに対して十分収束した時点での  $W^s$  を  $W^{n+1}$  とする。

前処理行列  $\Gamma$  として Weiss 等<sup>(1)</sup>のものを用い、その表式は以下ようになる。

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \rho'_p & 0 & 0 & 0 & \rho_\tau \\ u\rho'_p & \rho & 0 & 0 & u\rho_\tau \\ v\rho'_p & 0 & \rho & 0 & v\rho_\tau \\ w\rho'_p & 0 & 0 & \rho & w\rho_\tau \\ h\rho'_p - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho h_\tau + h\rho_\tau \end{pmatrix}$$

ここで、理想気体の場合には、

$$\rho_\tau = -\frac{\rho}{T}, \quad h_\tau = c_p, \quad \rho'_p = \frac{1}{U_r^2} + \frac{1}{h}$$

である。ただし、 $h$  はエンタルピー、 $\gamma$  は比熱比、 $c_p$  は定圧比熱である。 $U_r$  は局所的な流速に応じて以下のように決める。

$$U_r = \begin{cases} \varepsilon c, & \text{if } |\mathbf{u}| < \varepsilon c \\ |\mathbf{u}|, & \text{if } \varepsilon c < |\mathbf{u}| < c \\ c, & \text{if } |\mathbf{u}| > c \end{cases}$$

ここで、 $\varepsilon$  は淀み点付近のような流速がほぼ 0 となるところで前処理行列が特異点を持つことを防ぐためのカットオフ値である。 $\varepsilon$  の値は外部流の場合では一様流のマッハ数と同じ程度に取れば良いとされているが、一般的にどのように与えれば良いのかはまだよく分かっていない。

$\Gamma^{-1} \partial F / \partial W$  の固有値  $\lambda$  は、通常の圧縮性の方程式における固有値  $U, U, U, U+c, U-c$  とは異なり、

$$\lambda = U, U, U, U'+c', U'-c'$$

$$U = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad U' = U(1-\alpha), \\ c' = \sqrt{\alpha^2 U^2 + U_r^2}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{U_r^2}{c^2} \right)$$

となり、低速領域における固有値の大きさが全て  $U$  のオーダーとなる。これに対し、通常の圧縮性の方程式では、低速領域では  $U \ll c$  であるため、固有値の大きさがアンバランスとなり、解の収束性と精度の悪化が見られる。また、超音速領域では常に  $U_r = c$  であり、このとき  $\Gamma = \partial Q / \partial W$  となるため、固有値は通常の圧縮性の方程式と同一のものになる。

内部イタレーションにおける時間進行法においては、 $s$  に関して差分式を次のように線形化して行う。

$$W^{s+1} = W^s + \delta W^s$$

$$\left[ I + \frac{3\Delta\tau}{2\Delta t} \Gamma^{-1} \frac{\partial Q}{\partial W} + \Delta\tau \frac{1}{V} \Gamma^{-1} \sum \frac{\partial F}{\partial W} \right] \delta W^s \\ = -\Delta\tau \Gamma^{-1} \left[ \frac{3Q^s - 4Q^a + Q^{a-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{V} \sum F^s \right]$$

今回の研究では、時間進行法には Matrix Free Gauss-Seidel 陰解法<sup>9)</sup>を用いた。なお、比較のために行った前処理法を用いていない通常の圧縮性コードでの計算においては、疑似時間項は付加せずに Newton イタレーションによる陰解法を用いて計算している。

フラックスの計算では、Roe 平均による FDS スキームを前処理行列を用いて修正したもの<sup>10)</sup>を MUSCL 法で 3 次精度化し、リミターは使用しなかった。

### 3. 結果

#### (1) Lamb 渦の移流

Lamb 渦とは、渦中心からの距離  $r$  における周方向速度  $v$  が次の式で表されるような円形渦である。

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{r}{\alpha}\right)^2 \right\}$$

この渦は、 $\Gamma$  の循環を持つ渦糸が粘性により減衰していく途中の速度分布に等しく、現実的な渦に近いと考えられる。定数  $\alpha$  は渦の大きさを示す定数であり特性半径と呼ばれるこ

ともある。だいたいにおいて、 $r < \alpha$  では剛体渦、 $r > \alpha$  では自由渦と考えることができ、Rankin 渦の剛体渦部分の半径とはほぼ同じ意味合いをもつ。Lamb 渦の流速が最大になる点は  $r = 1.12 \alpha$  辺りで、最大流速は約  $v_{\max} = 0.638 \Gamma / 2\pi \alpha$  程度である。

渦が定常であるためには圧力場が流れの遠心力と釣り合わなくてはならない。このような圧力は

$$dp = \frac{\rho v^2}{r} dr$$

を積分することにより求められる。密度を一定として積分すると結果は、指数積分関数  $Ei$  を用いた次のような式になる。

$$p = p_\infty - \rho \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2\alpha^2} \left[ \frac{1}{\xi} (1 - e^{-\xi}) + 2 \{ Ei(-2\xi) - Ei(-\xi) \} \right]$$

$$\xi = \left( \frac{r}{\alpha} \right)^2, \quad Ei(-x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

この圧力分布では、渦全体にわたって密度が一定で、その代わりに圧力分布に対応して温度分布があるという現実的には起こりそうもない状況になっている。とはいえ、この流れ場は、Euler 方程式の解であり、精度の良い解法であれば、計算を進行させても渦の形状は変化しないはずである。よって、Lamb 渦を一様流中に分布させ非粘性計算を行うと、渦は減衰せずにそのまま一様流の方向に流れる。

計算は遠方での音速で無次元化して、初期条件として  $T=0.0$  の時間において渦の中心を  $(-0.1, 0.0)$  に置き、一様流は  $(0.01, 0.0)$  の速さとして  $T=10.0$  まで計算を行った。よって、計算終了時に渦の中心は  $(0, 0)$  の位置にあるはずである。また、 $\alpha=0.2$  とし、 $\Gamma=0.01 \times 2\pi \alpha$  とした。このとき、渦のみが存在した場合の速度の最大値は約  $6.38 \times 10^{-3}$  となる。

計算空間は遠方境界の影響が渦の周辺での計算に及ばないように片側に渦の直径の 400 倍以上取った。計算は、前処理法のパラメタである  $\varepsilon$  を変化させて、 $\Delta t$  については各  $\varepsilon$  の値に応じた最大固有値  $U'+c'$  に対する最大 CFL がほぼ 1 となるように決め、 $\Delta\tau = \Delta t$  として行った。表 1 に計算で用いた  $\varepsilon$ 、 $\Delta t$ 、内部イタレーション回数  $N_{\text{sub}}$ 、 $T=10$  まで計算を行うのにかかるステップ数  $N$  の値を示す。なお、ケース A については、通常の圧縮性コードで計算している。

Case	$\varepsilon$	$\Delta t$	$N_{\text{sub}}$	$N=10/\Delta t$
A	—	0.01	18	1000
B	0.05	0.2	16	50
C	0.01	0.5	15	20

表 1 計算条件

図1, 2, 3にそれぞれの $T=10.0$ における $x$ 軸上の圧力分布と速度の $y$ 方向成分を示す。どのケースにおいても速度分布は理論解とかなりの精度で一致していることが分かる。しかし圧力分布に関しては、前処理法を用いていないケースAでは渦中心位置は理論解とほぼ一致しているが、内部イタレーションの回数を多めにして残差をマシンゼロまで落としていにもかかわらずピーク値がほんの僅かだが鈍ってしまっている。前処理法を用いたケースBにおいては圧力分布とそのピーク値についても良好な結果が得られている。しかし、 $\epsilon$ を0.01としたケースCでは、圧力分布は渦中心に対応するピーク値とその近傍の分布は理論解とほぼ一致しているものの、渦の周辺での分布が異なっている。これは、前処理

法を使うことにより音波の特性速度の大きさを変えているために音波の計算の精度が悪化したことが原因だと思われる。このように、パラメタ $\epsilon$ の大きさを適切に決めることが必要であると言える。

計算効率に関して言えば、1ケースの計算を終えるのに必要な総内部イタレーション回数は、前処理法を用いたケースBでは800回であり、前処理法を用いていないケースAでは18,000回とケースBの方が20分の1以上少ないにもかかわらず高精度の解が得られた。また、前処理法を用いた非定常計算ではその方法の特徴から、更にマッハ数が小さい流れにおいてもほぼ同じイタレーション回数での計算が可能である。

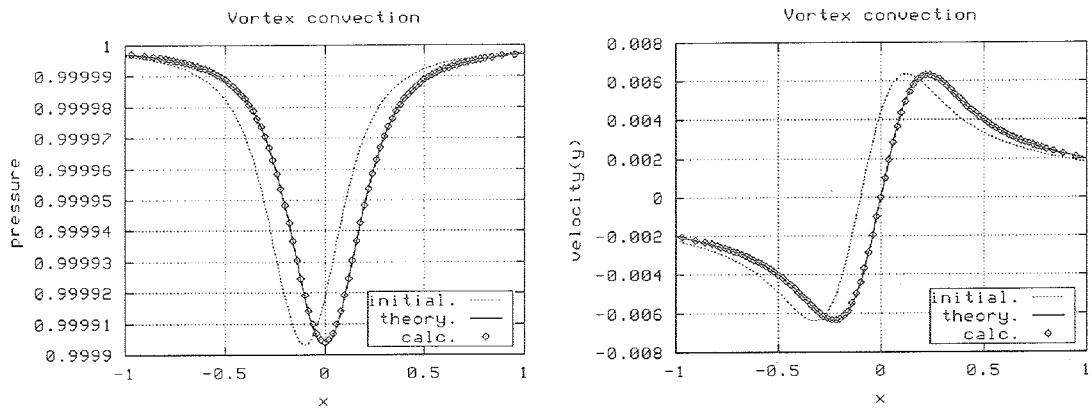


図1 ケースAでの圧力分布と速度の $y$ 方向成分

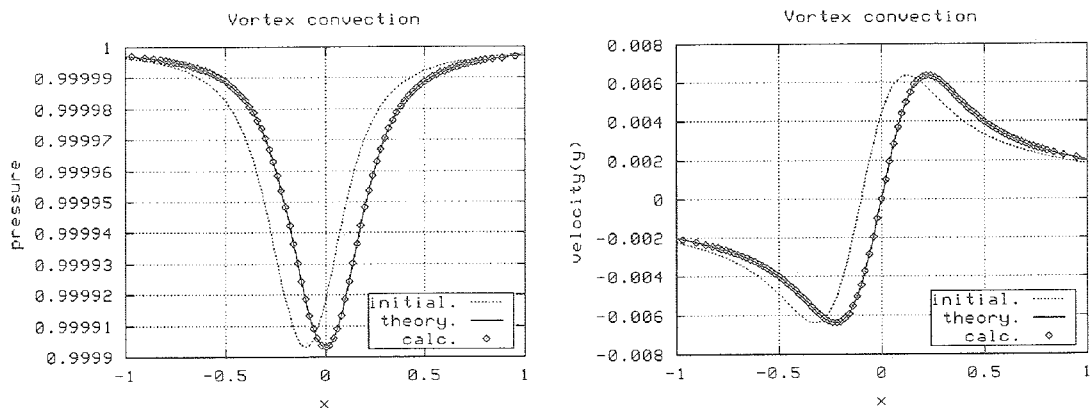


図2 ケースBでの圧力分布と速度の $y$ 方向成分

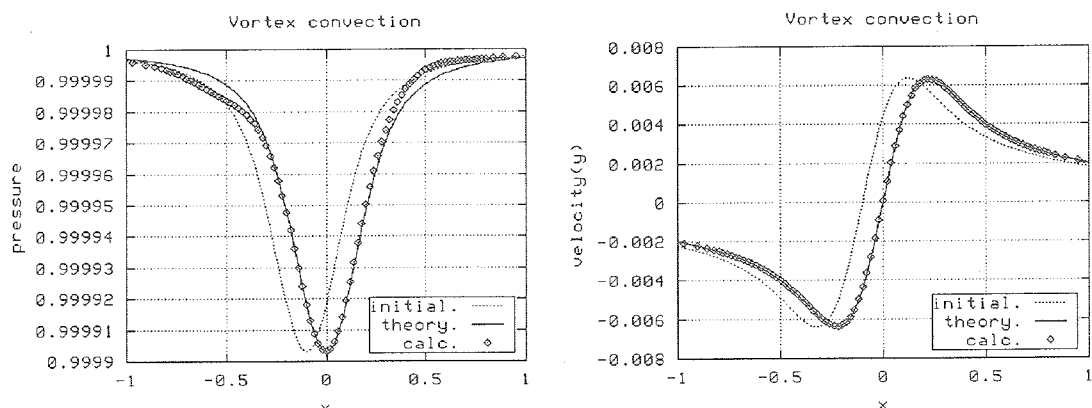


図3 ケースCでの圧力分布と速度の $y$ 方向成分

## (2) 線形波の伝播

非粘性、等エントロピー条件で一様な静止流体中に微小変動があった場合、その微小変動は音速で伝播する。波動が空間方向に一方向のみに変化する、いわゆる平面波の場合を考えると圧縮性の Euler 方程式は次の波動方程式に線形近似される。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = 0$$

$c_0$  は静止状態での音速である。無次元化は、静止状態での音速  $c_0$  で行った。初期条件として  $x$  軸の正の方向に進行する要素波となるような波長 4 のサイン曲線状の微小変動を与えて、無次元時間で 1 の間、非定常計算を行った。この場合、微小変動は形を変えずに  $x$  軸の正の方向に 1 だけ移動する。

計算領域は  $x=0$  を中心に左右に 5 波長分を取り、境界条件が  $x=0$  近傍の解に影響しないようにした。格子幅は、 $\Delta x=0.1$ 、すなわち一波長あたり 40 点の格子点を用いた。また、時刻幅  $\Delta t$  は 0.1 とし、 $\Delta \tau = \Delta t$  とした。

図 4 は通常の圧縮性コードで計算した結果であり、図 5 は  $\varepsilon=0.1$  とし、前処理法を用いて計算した結果である。内部イタレーション回数は共に 20 回とした。通常の圧縮性コードで計算した場合には、計算結果は理論解とかなりの精度で一致しているものの、前処理法を使った場合には音波がほとんど進んでいない上、値も鈍ってしまっていて正しい解が得られていない。これは、前処理法を用いた計算では内部イタレーションにおいて残差が十分落ちていないことが原因である。図 6 は図 5 の結果と同様に  $\varepsilon=0.1$  とし、内部イタレーションの回数を 1000 回に増やしたものである。こちらの場合では、計算結果が理論解とほぼ一致していることが確認できる。

またこれとは別に、内部イタレーションの時間間隔である  $\Delta \tau$  を大きくすることにより比較的少ない反復回数でも同様に理論解とほぼ一致した計算結果が得られることが確認できた。しかし、 $\Delta \tau$  をあまり大きくとりすぎると計算が発散してしまった。

このように前処理法を用いた計算では、内部イタレーションにおいて音速による特性速度を小さくして計算をしているので、このような音波のみの現象である線形波の伝播の問題を解くためには、残差を充分落とすために内部イタレーションの方法を工夫しないと正しい解が得られないが、計算不可能ではないことが明らかになった。

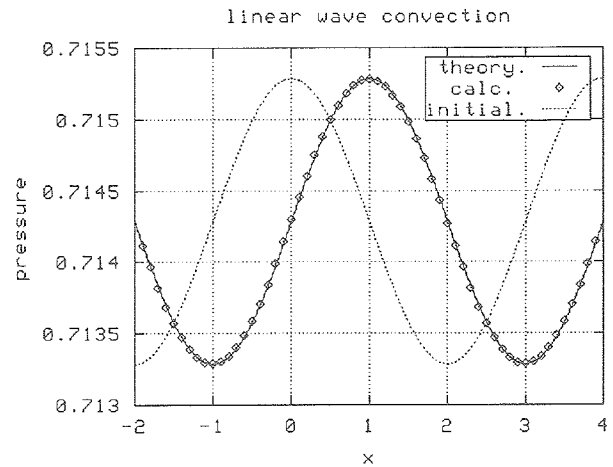


図 4 圧力分布：通常の圧縮性コード

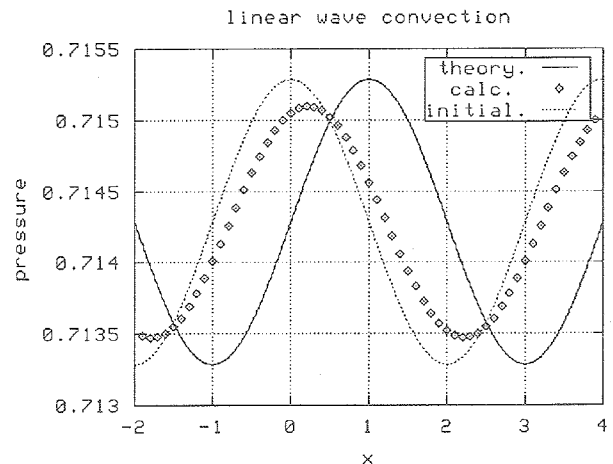


図 5 圧力分布：前処理法 内部イタレーション 20 回

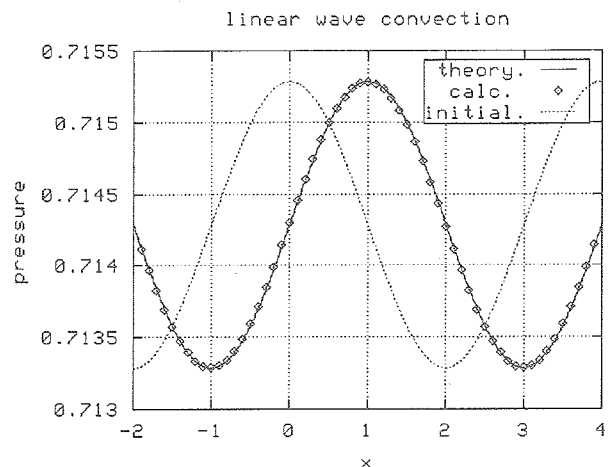


図 6 圧力分布：前処理法 内部イタレーション 1000 回

(3) 2次元円柱周りの流れ

2次元円柱まわりの流れの粘性計算を行った。円柱の直径と流速による Reynolds 数は 100 および 200 で、一様流のマッハ数を 0.1 とした。計算格子は、最小格子幅  $1 \times 10^{-3}$  で、周方向に 101 点、半径方向に 51 点格子を取り、遠方境界は片側に円柱直径の 20 倍の位置まで取った。時間間隔  $\Delta t$  は 0.005 とし、 $\Delta \tau = \Delta t$  とした。また、前処理法のパラメータ  $\epsilon$  は 0.1 とした。図 7 にレイノルズ数が 200 とした圧力係数の空間分布を示す。円柱の後方にカルマン渦が捉えられている様子が分かる。図 8, 9 にそれぞれレイノルズ数が 100, 200 としたときの揚力係数と抗力係数の時間変化を示す。どちらのケースにおいてもカルマン渦の放出による空力係数の周期的な変化が捉えられていることが分かる。表 2 に他の計算結果<sup>(10)(11)</sup>と揚力、抗力、ストローハル数を比較したものを示す。他の計算と比べてストローハル数、レイノルズ数依存性などでは定性的には妥当な結果が得られているといえるが、空力係数の大きさに少なからず違いがある。これについては、パラメータ  $\epsilon$  に対する結果の依存性や計算領域を広げるなどもう少し詳細な検討が必要であると思われる。

4. まとめ

前処理法と擬似時間項による内部イタレーションを用いた非定常計算の基本的な非定常流れに対する解の精度について調べた。

Lamb 渦の移流の問題のように音波による変動が支配的ではない流れについては、前処理法におけるパラメータ  $\epsilon$  さえ適切に決めてやれば高精度かつ高効率の計算が可能なが分かった。また、内部イタレーションの方法を工夫することで音波も正しく計算することが可能であることが示された。しかし、前処理法を用いた非定常計算をロバストで効率の高いものにするためにはそれらをどのように決めるかが重要であるが、その一般的な決定方法については今後の更なる検討が必要である。

最後に、現実的な問題により近い 2 次元円柱周りの計算においては、時間刻み  $\Delta t$  を通常の圧縮性コードで計算するよりも大きくとった計算でも定性的に正しい結果が得られることが示された。

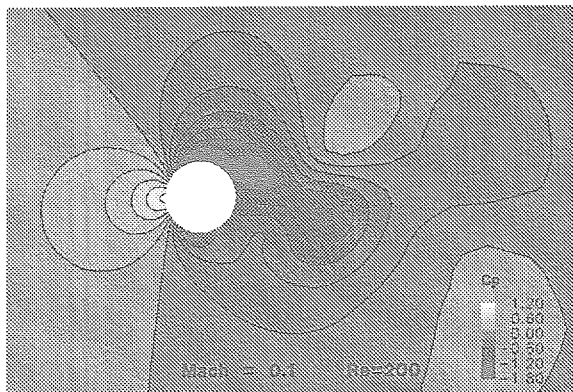


図 7 圧力分布 Re=200

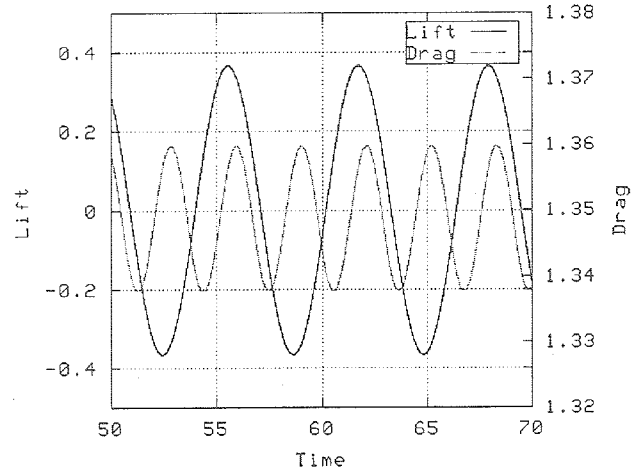


図 8 揚力係数と抗力係数の時間変化 Re=100

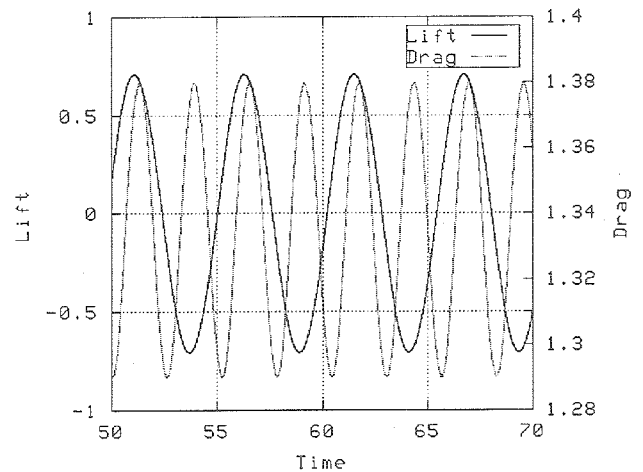


図 9 揚力係数と抗力係数の時間変化 Re=200

Re	Author	Cl	Cd	St
100	Braza et al.	$\pm 0.298$	1.28	0.16
	Present	$\pm 0.366$	$1.35 \pm 0.011$	0.161
200	Braza et al.	$\pm 0.77$	1.30	0.20
	Rosenfeld et al.	$\pm 0.65$	$1.31 \pm 0.04$	0.19
	Present	$\pm 0.707$	$1.33 \pm 0.044$	0.19

表 2 空力係数の比較

参考文献

- (1) J. M. Weiss and W. A. Smith, "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Time-Accurate Flows on Unstructured Meshes". AIAA paper 94-2209, 1994
- (2) E. Turkel, "Preconditioning Techniques in Computational Fluid Dynamics." Annual Review of Fluid Mechanics, 31, 385-416, 1999
- (3) E. Turkel and V. N. Vatsa, "Choice of Variables and Preconditioning for time Dependent problems", AIAA

paper, 2003-3692, 2003

(4) S. Venkateswaran and C. L. Merkle. "Dual Time Stepping and Preconditioning for unsteady Computation", AIAA paper 95-0078, 1995

(5) S. Venkateswaran and C. L. Merkle. "Efficiency and accuracy issues in contemporary cfd Algorithms", AIAA paper, 2000-2251, 2000

(6) 山本一臣, 他, "並列計算プラットフォーム UPACS について," 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム'99 論文集, 航技研特別資料 SP-44, 351-356, 1999. 12

(7) 山根 敬, 他, "CFD コード共通化プロジェクト UPACS の現状", 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2000 論文集, 航技研特別資料 SP-46, 45-50, 2000. 12

(8) 山本一臣, 他, "CFD 共通基盤プログラム UPACS の開発", 第 14 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 2000. 12

(9) 嶋英志, "構造/非構造格子 CFD のための簡単な陰解法", 第 29 回流体力学講演会講演集, 325-328, 1997. 9

(10) M. Braza, P. Chassaing, and H. Ha Minh, "Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder", Journal of Fluid Mechanics 165, 79, 1986

(11) M. Rosenfeld, D. Kwak, and M. Vinokur, "A Fractional Step Solution Method for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations in Generalized Coordinates Systems", Journal of Computational Physics 94, 102, 1991

(12) 巽友正, "流体力学", 新物理学シリーズ 21, 培風館, 1982