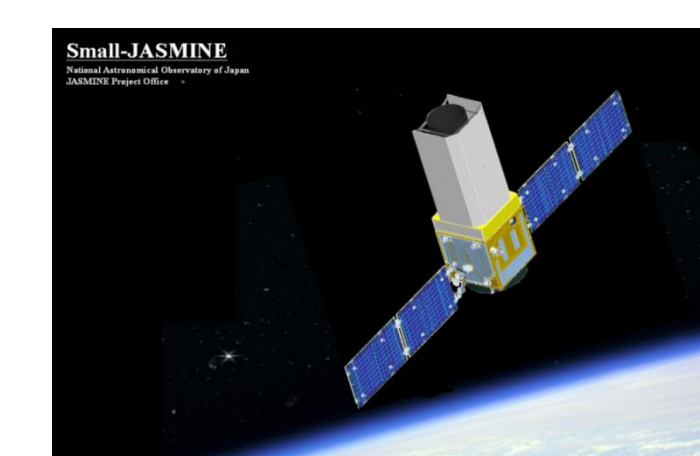


# P-42 星の高精度位置決定実証



○矢野太平, 郷田直輝, 小林行泰, 上田暁俊, 宇都宮 真, 鹿島伸悟 (国立天文台), 山田良透 (京大理) 他JASMINE ワーキンググループ

## 小型JASMINEのための星の高精度位置決定実証

小型JASMINEでは20 $\mu$ 秒角という高精度での星の位置決めがミッション成功の鍵をにぎっており最重要課題となっている。我々は確かに20 $\mu$ 秒角が出せるという事の実証を行っている。①実験室における擬似星像を用いた星像位置決定の実験データを用いて、系統誤差の補正が適切に行われると複数個の星同士の距離を求めた際、幾何学的関係を満たす必要がある。そうした関係が成立する事を示す。②また、1回の観測ではかからない微小系統誤差も多数データにより補正できる事も示す。

### ①実証実験1 実験室データによる星像位置決定

系統誤差を正しく見積もられているならば、3つの星(1,2,3)がある場合の星1,2の距離と星2,3の距離の和は星1,3の距離になっているという幾何学的性質を満たしている必要がある。そうした関係が見出せるかの実証をおこなった。

#### ●解析方法 PSF-fitting

PSF-fittingのモデル関数

$$L(u - \delta u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma + \delta\sigma)} + \exp\left(-\frac{(u - \delta u)^2}{2(\sigma + \delta\sigma)^2}\right)$$

パラメータは $\delta u$ と $\delta\sigma$

$\delta u$ および $\delta\sigma$ の線形化 $\rightarrow$

$$L(u - \delta u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) + \delta u \frac{u}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) + \delta\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left(u^2 - \sigma^2\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)$$

ここではinitial guessとして $\sigma=1$ と与える。

検出器上のディスクリット化

$$P_{\text{det}}(i, \delta u) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) M(u - \delta u, i) du + \delta u \int \frac{u}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) M(u - \delta u, i) du + \delta\sigma \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left(u^2 - \sigma^2\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) M(u - \delta u, i) du$$

$\delta u^*$ は、はじめ0でiterationの際、得られた $\delta u$ を $\delta u^*$ に代入して再度計算  
Initial guessとして $\sigma=1$ とし、 $\delta\sigma$ が求まると、新たな $\sigma$ は $1 + \delta\sigma$ とし再計算する。

ただし  $M(u, i) = \begin{cases} 1 & (i - 0.5 < u < i + 0.5) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

( $i = -2, -1, 0, 1, 2$ )

最小2乗法

評価関数

$$S = \sum_i (Obs_i - P_{\text{det}}(i, \delta u))^2$$

評価関数を最小化

解く式

$$\frac{\partial S}{\partial \delta u} = \sum_i 2(Obs(i) - P_{\text{det}}(i, \delta u)) \frac{\partial P_{\text{det}}(i, \delta u)}{\partial \delta u} = 0$$

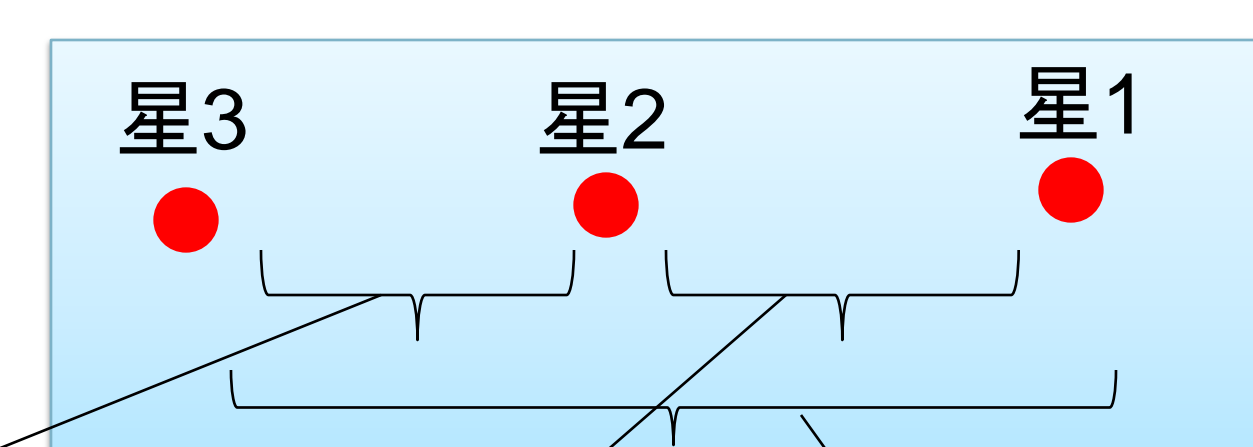
$$\frac{\partial S}{\partial \delta \sigma} = \sum_i 2(Obs(i) - P_{\text{det}}(i, \delta u)) \frac{\partial P_{\text{det}}(i, \delta u)}{\partial \delta \sigma} = 0$$

この式より $\delta u$ および $\delta\sigma$ を導出する。

#### ●使用データ

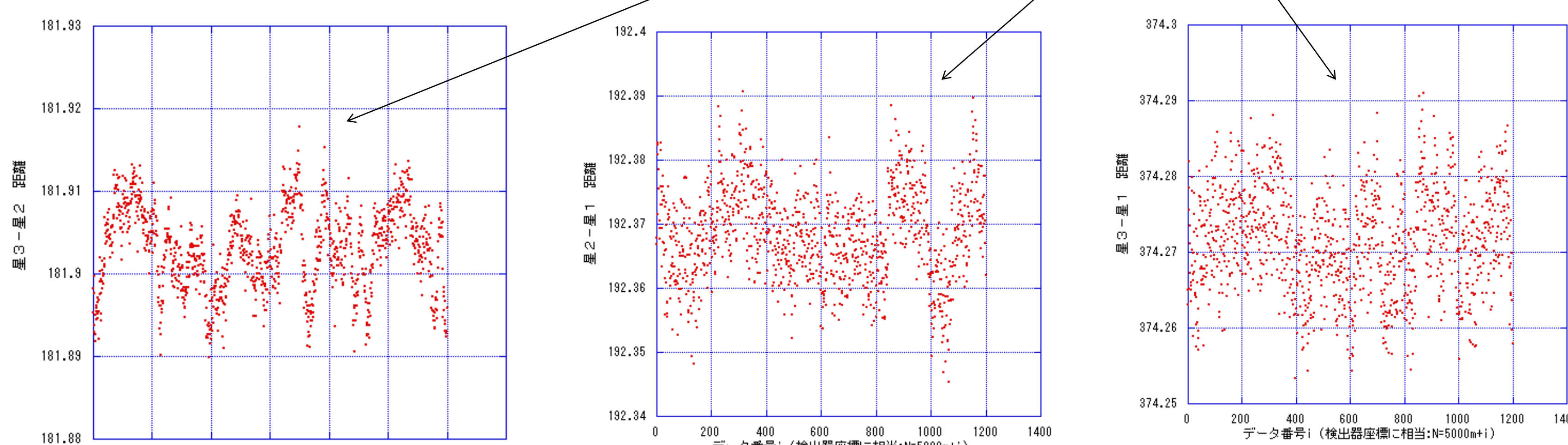
擬似星像、光学系、CCD検出器をベンチ上に配置し、画像取得したデータを用いて解析を行う。

- 取得したデータより、解析を行う一列にならぶ3つの星が画像に入っているものを選び出す。使用データ12000枚程度。
- PSF-fitting法により見積もられた座標は光学系などのdistortionの影響を受け、座標の関数としての系統誤差を伴う。したがって以下マッピング(distortion補正)をする。
- $y \rightarrow y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + a_3 y^4$
- 星の距離が変化しないことから最小2乗法を用いてdistortionをあらわすパラメータ $a_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) (および $L_{32}, L_{21}$ )を導出する。



#### ●結果

- 左から星3-星2距離、星2-星1距離、星3-星1距離の図である。
- 例えば、データ番号1から200番に着目する。星3-星1距離があまり変化していない中、星3-星2距離は増加し、星2-星1距離は減少する様子が見える。
- もし2星間距離が気まぐれに変動しているのならば、左図の系統誤差変化と真ん中の図の系統誤差の和が右図の系統誤差というようにはならない。
- しかし右の結果は検出器の幾何学的影響で系統誤差が発生し、2星間距離が変動していると解釈できる結果(星3,2距離+星2,1距離=星3,1距離)となっている。



横軸はデータ番号で、検出器の星の位置に相当する。

#### ●まとめ

星3,2の距離+星2,1の距離=星3,1の距離  
であり、幾何学的関係が成立する。  
(それぞれ勝手にふらついているわけではない)。

### ②実証実験2 数値実験による微小系統誤差の実験

1回の観測ではかからない微小系統誤差がある場合、多数観測により、系統誤差の存在を発見し抽出できることを示す。

#### ●解析方法

- 数値シミュレーションを用いた解析をおこなう。
- 擬似データに人為的に微小な系統誤差を入れて、解析を行い、系統誤差が確かに抽出できるのかを確認する。

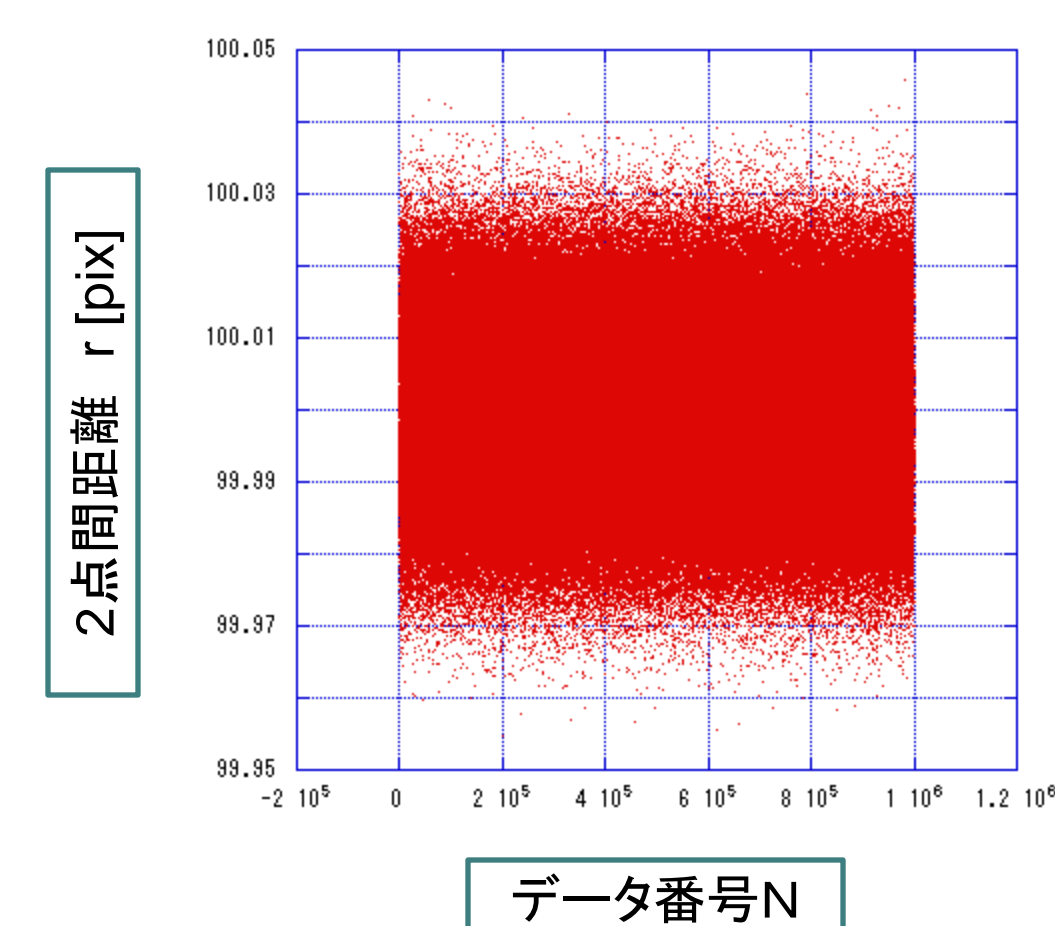
#### ●使用データ(モックデータ)

擬似データの作成  
2星を準備  $y_2=100 \text{ pix}, y_1=0 \text{ pix}$   
撮像データ作成時、星の位置について  
 $\sigma_2=0.01/\sqrt{2} \text{ pix}, \sigma_1=0.01/\sqrt{2} \text{ pix}$   
のランダム誤差を与える。  
(この場合2点間距離の誤差 $\sigma$ は $\sigma=0.01 \text{ pix}$ となる。)  
1000000枚の擬似撮像データを作成する。  
場合によって系統誤差を人為的に与える(後述)。

#### ●結果

2点間距離のデータ列を示す。  
まず、系統誤差を含まずランダム誤差のみの場合のデータ列を右に示す。

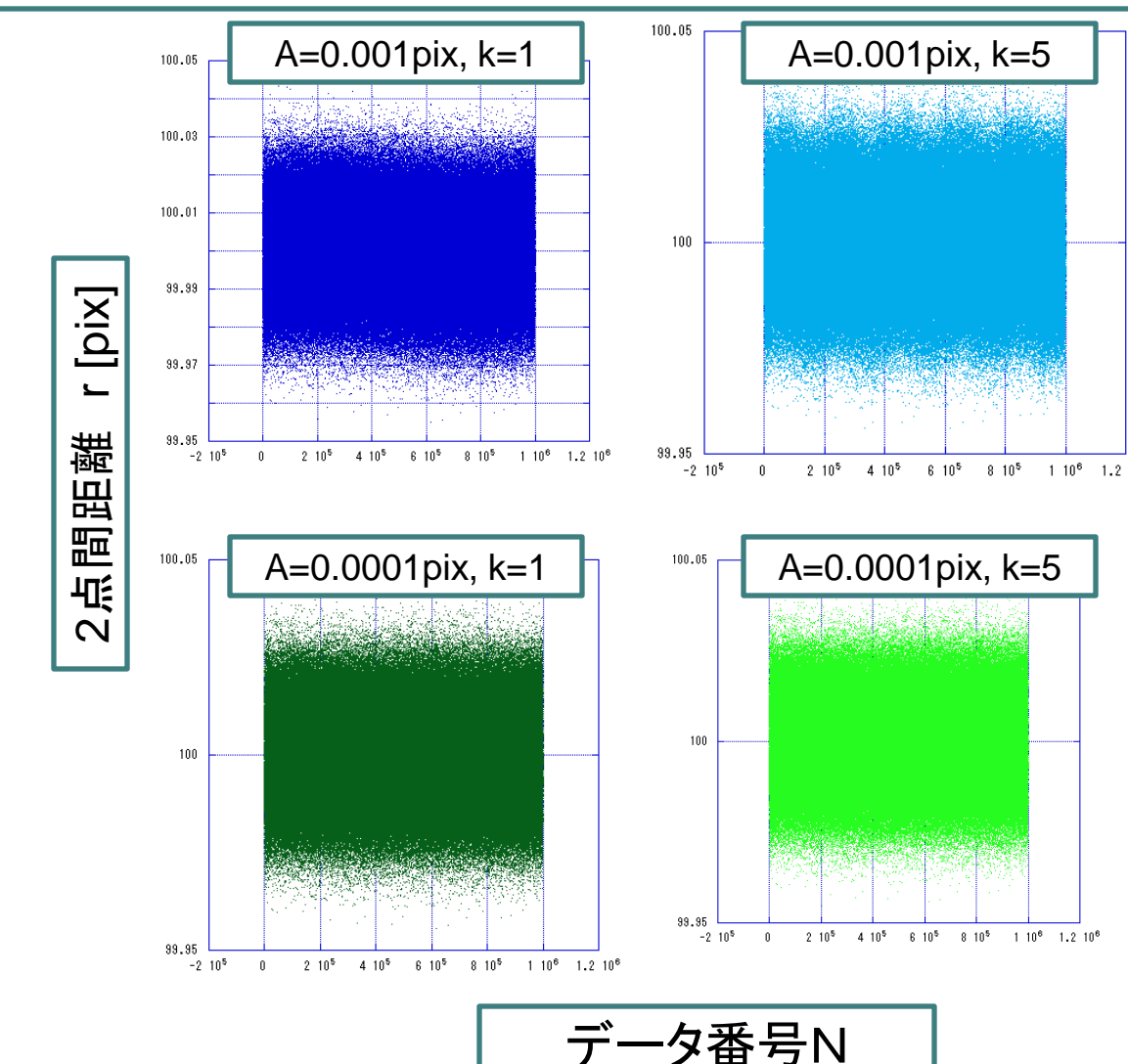
横軸データ番号  
縦軸2点間距離  
標準偏差0.01を持つデータ列が得られる。



2点間距離のデータ列を示す。  
(系統誤差を含む場合4ケースにおいて示す。)

横軸データ番号  
縦軸2点間距離

系統誤差の挿入  
---- 正弦波的系統誤差 ----  
座標 $x_2 \rightarrow x_2 + \delta$ の系統誤差  
 $\delta = A \sin(2\pi k N / N_{\text{max}})$  ( $k=1, 5$ )  
 $A=0.001 \text{ pix}, 0.0001 \text{ pix}$



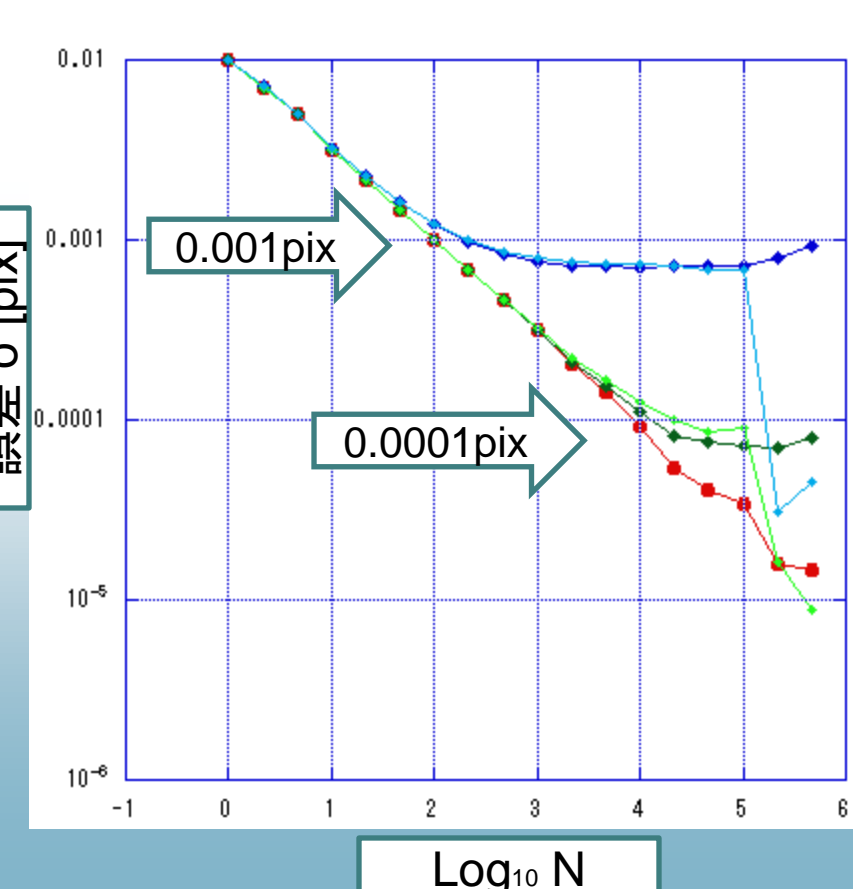
#### ●結果(続き)

系統誤差の挿入(正弦波的振動)  
座標 $x_2 \rightarrow x_2 + \delta$ の系統誤差  
 $\delta = A \sin(2\pi k N / N_{\text{max}})$  ( $k=1, 5$ )

青)  $A=0.001 \text{ pix}, k=1$   
水色)  $A=0.001 \text{ pix}, k=5$   
緑)  $A=0.0001 \text{ pix}, k=1$   
黄緑)  $A=0.0001 \text{ pix}, k=5$

系統誤差を含まない場合、赤で示されるように枚数に応じて誤差が $\sim 1/N$ で低減する。  
青あるいは水色で示すように0.001pixレベルの系統誤差を入れると0.001pixのところでは誤差低減しなくなる。  
データ番号毎の系統誤差 $\delta$ の値の振動が大きいと( $k$ が大きい)、データセット内にプラス、マイナスのさまざまな値の系統誤差が入り、結局ランダム化される。そのため大きな $N$ のところでは赤のラインに漸近する。

緑、あるいは黄緑で示すように0.0001pixレベルの系統誤差を入れると0.0001pixまでは誤差の低減が見られるが、0.0001pixで低減しなくなる。低減が見られなくなる場所が0.001pixから0.0001pixに変化するが定性的には上述の青、水色と同じ振る舞いを示す。



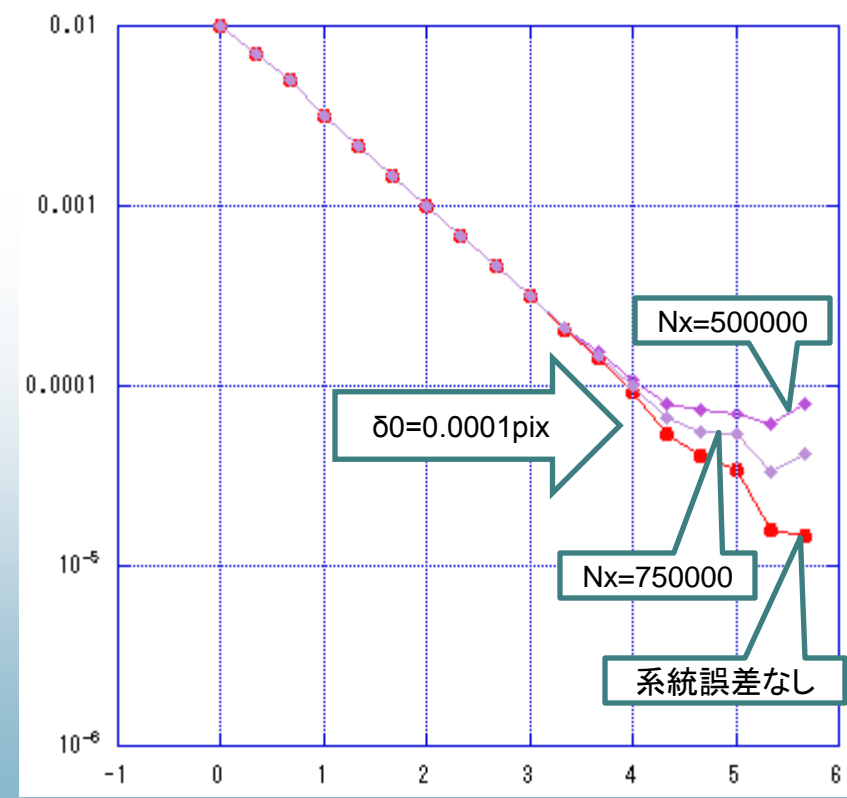
ステップ関数的変動による系統誤差  
ステップ関シヨンのように系統誤差が変化する場合を考える。

$\delta=0$  ( $0 < N < N_x$ )  
 $\delta=\delta_0$  ( $N_x < N < N_{\text{max}}$ )  
 $N_x=500000, 750000$   
 $\delta_0=0.0001 \text{ pix}$

与えた系統誤差のサイズ $\delta_0=0.0001 \text{ pix}$ より、誤差が0.0001pixになるまで低減し、0.0001pixから誤差が低減しなくなるようが見られる。

・ステップ関シヨンの変化点のデータ番号 $N_x$ を500000(中間点)から750000に変更すると、系統誤差のない $\delta=0$ に相当するデータが多数を占め、系統誤差によって誤差低減がなくなる様子が弱くなる。(系統誤差のない赤いラインに近づく)。

・ $N_x$ を大きくするにつれてデータのほとんどが系統誤差を含まないデータになる事を考えると赤のラインに漸近するのは妥当といえる。



#### ●まとめ

想定する系統誤差を表現する正弦波的系統誤差、ステップ関シヨンの系統誤差について検討した。  
系統誤差を含むデータでは、枚数、誤差の関係のグラフにおいて、**誤差低減が見られなくなる**。  
系統誤差の値に応じて、低減が見られなくなるポイントがずれる。逆に低減が見られなくなるポイントから系統誤差の大きさがわかる。  
いずれにせよ、1回の撮像で検出できない微小系統誤差を発見抽出できる。