

Angular Resolution Boosterを用いた X線望遠鏡のイメージ再構成法

森井幹雄 (統計数理研究所)

池田思朗 (統数研), 前田良知 (宇宙科学研究所)

内容

- X線望遠鏡について
- Angular resolution booster を用いたX線望遠鏡
- 像再構成の枠組み
- アルゴリズム
- デモ：
 - 近接二重星
 - 超新星残骸: Cas A
 - カニ星雲
- まとめ

Maeda et al. (PASJ, 投稿中)

Morii, Ikeda & Maeda (PASJ, 受理)

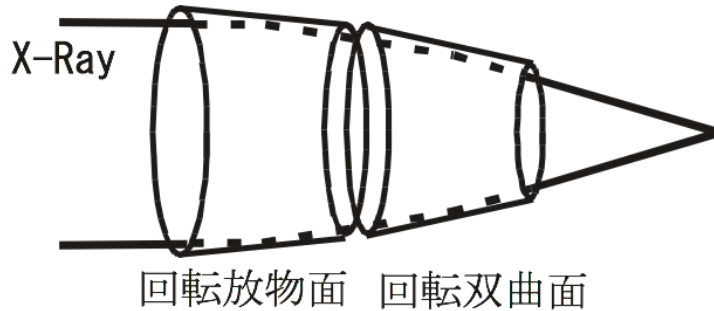
X線望遠鏡

X線は地球の大気で吸収されるため、
X線望遠鏡は人工衛星に搭載される。

X線望遠鏡の光学系

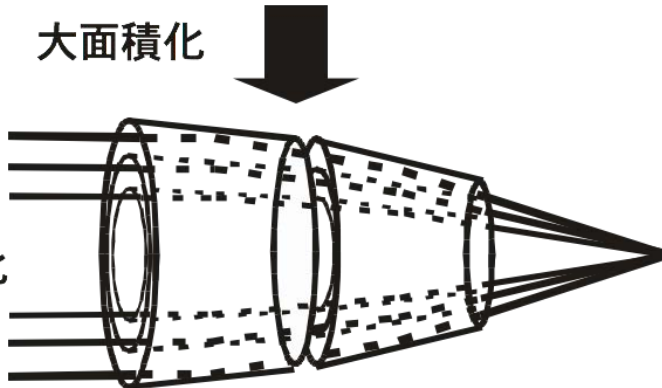
X線に対する屈折率 ≤ 1 屈折が利用できない
極端な斜入射角での全反射を利用

ウォルターI型斜入射光学系



大面積化

積層化



Chandra X線望遠鏡



角度分解能:
0.5 秒角

積層枚数: 4

製造コスト:
約1700億円

すざく X線望遠鏡



角度分解能:
2分角

積層枚数: 170

製造コスト:
約100億円

X線望遠鏡の現状

- ✓ 角度分解能は、Chandra X-ray 望遠鏡で達成された 0.5 秒角を上回ることは難しい。(コスト増大)。光子統計がいまいち。
- ✓ 光子統計を上げるためにミラーを積層するが、ミラーの形状精度に限界がある。数分角の角度分解能に留まる。

秒角の角度分解能 + 大有効面積

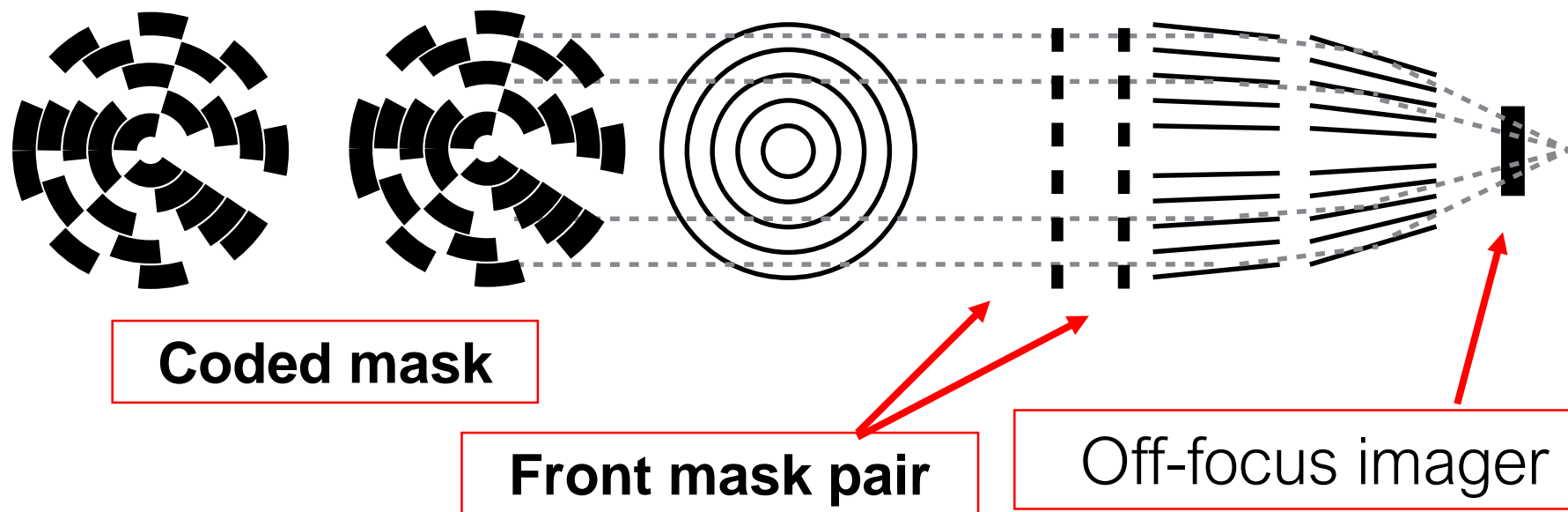


Angular Resolution Booster

Angular Resolution Booster

前田良知 (宇宙科学研究所/JAXA) らが提案 (PASJ に投稿中)

(分角 \rightarrow 秒角)



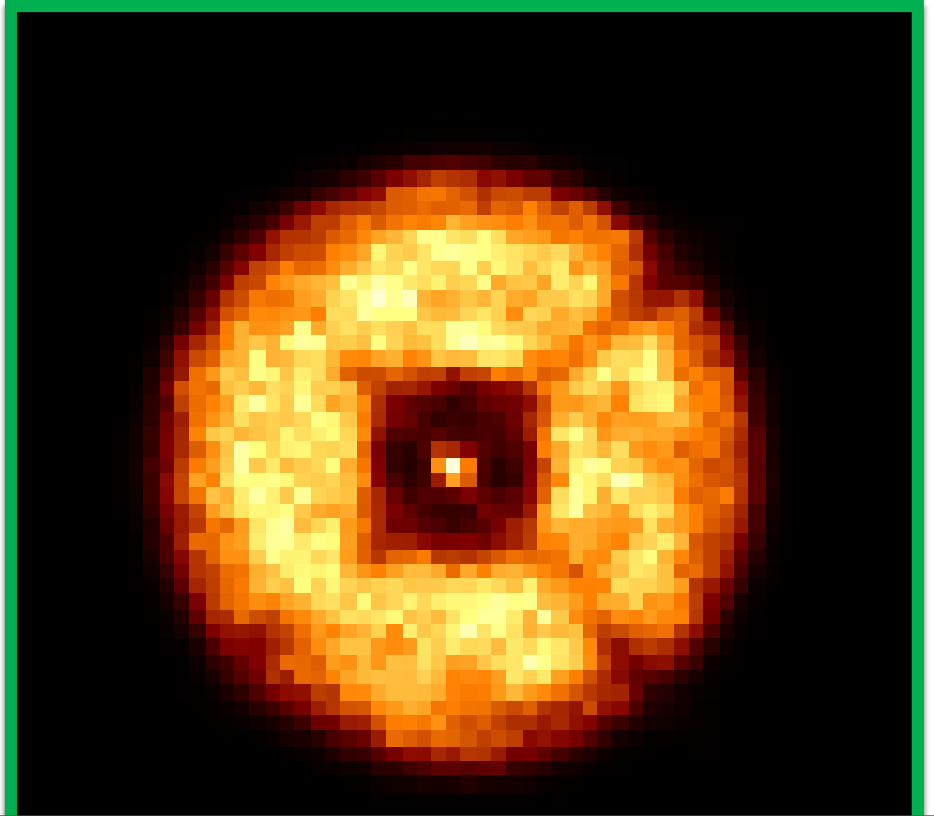
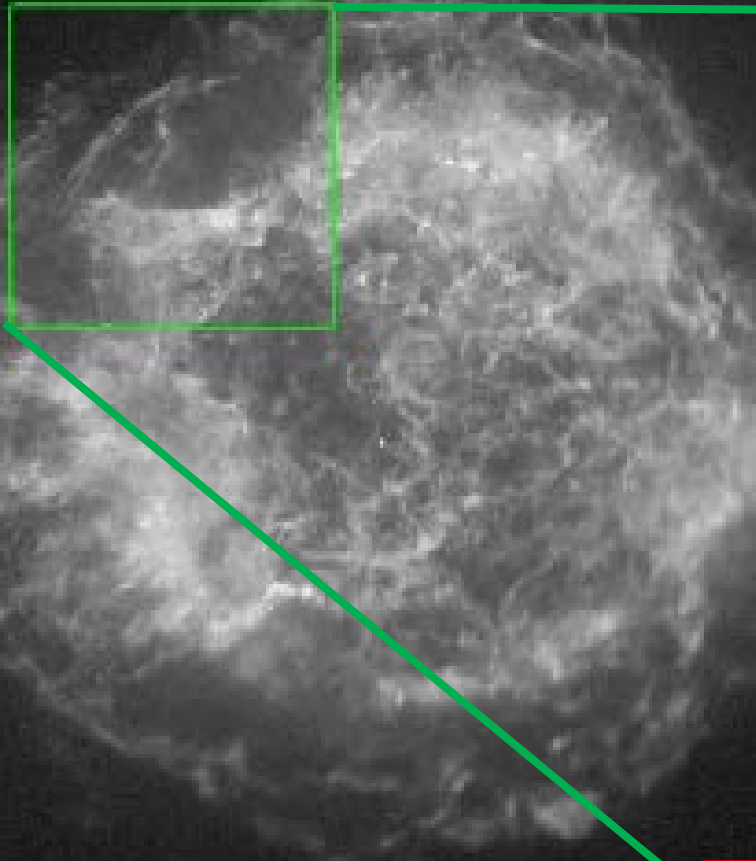
角度分解能はFront mask によって決まるため、X線ミラーの形状精度が数分角であっても、秒角の角度分解能が達成できる。

前置マスクを追加するだけなので、非常に安く実現できる。

off-focus撮像素子で得られる画像

超新星残骸 Cas A

$N \sim 10^6$



Chandra X線望遠鏡

イメージ再構成が必要

問題設定

Off-focus imager で検出される光子数は、Poisson 統計に従う。

$$Y(v) \sim \text{Poisson} \left(\sum_u t(v, u) I(u) \right)$$

- ✓ $Y(v)$: off-focus imager の pixel (v) で検出された光子数。
- ✓ $T(v, u)$: 検出器の応答関数
マスク + ミラー + 撮像素子 $\sum_v t(v, u) = 1$
- ✓ $I(u)$: 天球上の天体のイメージ

問題設定

$$\begin{aligned} P(Y|I) &= \prod_v \text{Poisson} \left(Y_v; \sum_u t(v, u) I(u) \right) \\ &= \frac{e^{-S} S^{(\sum_v Y_v)}}{(\sum_v Y_v)!} \times \frac{(\sum_v Y_v)!}{\prod_v Y_v!} \prod_v \left[\sum_u t(v, u) \rho_u \right]^{Y_v} \\ &= \text{Poisson} \left(\sum_v Y_v; S \right) \times \text{Multinomial} \left(\{Y_v\}; \left\{ \sum_u t(v, u) \rho_u \right\} \right) \end{aligned}$$

$\rho(u)$: 規格化されたイメージ

$$\rho(u) = \frac{I(u)}{S} \quad S = \sum_u I(u)$$

全X線強度 S と規格化されたイメージ $\rho(u)$ は別々に推定できる。

$S^* = \sum_v Y(v)$ 以後、規格化されたイメージの推定を行う。

問題設定

規格化されたイメージだけを考える。

$$L_{\rho}(\rho) = \sum_v Y(v) \log [\sum_u t(v, u) \rho(u)]$$

この最適化は、Richardson-Lucy 法で実行できる (= EM アルゴリズム)。

光子数が少ない場合、イメージは安定しない。

正則化の仮定: $\rho(u)$ は Sparse かつ Smooth

天体のイメージは、
点光源の集まり、拡散成分、それらの混合。

問題設定

仮定: $\rho(u)$ は Sparse かつ Smooth.

$$L(\rho) = \underbrace{-L_\rho(\rho)} + \underbrace{(1 - \beta) \sum_u \log \rho(u)} + \underbrace{\mu V(\rho)}$$

Log likelihood

$$L_\rho(\rho) = \sum_v Y(v) \log [\sum_u t(v, u) \rho(u)]$$

Sparseness

Dirichlet 項:
パラメータ $\beta > 0$ で Sparse 度合いを制御。
 β 小 \rightarrow sparse

Smoothness

$$V(\rho) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} [(\rho_{i,j} - \rho_{i+1,j})^2 + (\rho_{i,j} - \rho_{i,j+1})^2] \\ + \sum_{i=1}^{m-1} (\rho_{i,n} - \rho_{i+1,n})^2 + \sum_{j=1}^{n-1} (\rho_{m,j} - \rho_{m,j+1})^2$$

隣り合うピクセル間の強度の差を小さくする。 μ 大 \rightarrow Smooth

問題設定

最小化したいコスト関数:

$$L(\rho) = -L_\rho(\rho) + (1 - \beta) \sum_u \log \rho(u) + \mu V(\rho)$$

天体イメージとして妥当な
領域 (probability simplex):

$$C = \{\rho \in R^M \mid \rho_u \geq 0, \sum_u \rho_u = 1\}$$

$-L_\rho(\rho)$ や $-L_\rho(\rho) + (1 - \beta) \sum_u \log \rho(u)$ の最小化は、

EM アルゴリズムで Closed form で解ける。 Ikeda et al. (2014)

一方、 $L(\rho)$ の最小化は、Closed form で解けないので、

EM アルゴリズムと近接勾配法を組み合わせで解く
ことにした。

アルゴリズム

最小化したいコスト関数:

$$L(\rho) = -L_\rho(\rho) + (1 - \beta) \sum_u \log \rho(u) + \mu V(\rho)$$

s.t. $C = \{\rho \in R^M \mid \rho_u \geq 0, \sum_u \rho_u = 1\}$

1st step: the EM algorithm

EM M-step: r-th iteration (r = 1, 2, ...) :

$$\rho^{(r+1)} = \arg \min_{\rho \in C} \left[L_{\text{sub}} \equiv - \sum_u m_u^{(r)} \log \rho_u + (1 - \beta) \sum_u \log \rho_u + \mu V(\rho) \right]$$

$$m_u^{(r)} = \sum_v Y(v) \frac{t(v, u) \rho_u^{(r)}}{\sum_u t(v, u) \rho_u^{(r)}}$$

2nd step: Solve the sub-problem: Minimize L_{sub}

近接勾配法で解く。

Beck & Teboulle (2000)

アルゴリズム

2nd step: Sub-problem: Minimize L_{sub}

近接勾配法の k-th iteration ($k = 1, 2, \dots$)

$$\rho^{(k+1)} = \arg \min_{\rho \in C} \sum_u \left[\frac{L_k}{2} (\rho_u - \sigma_u^{(k)})^2 - [m_u^{(r)} - (1 - \beta)] \log \rho_u \right]$$

$$\sigma_u^{(k)} = \rho_u^{(k)} - \frac{\mu}{L_k} \frac{\partial V(\rho^{(k)})}{\partial \rho_u}$$

このsub-problemの最小化は、Lagrange 乗数 τ を与えることで Closed form で解ける。

Lagrange 乗数 τ は、Newton-Raphson法で求める。

以上のアルゴリズムで、各ハイパーパラメータ(β, μ) を固定した問題を解くことができる。

ハイパーパラメータ (β, μ) は、Cross-validationで決定する。

デモンストレーション

近接二重星

$N = 1e4$

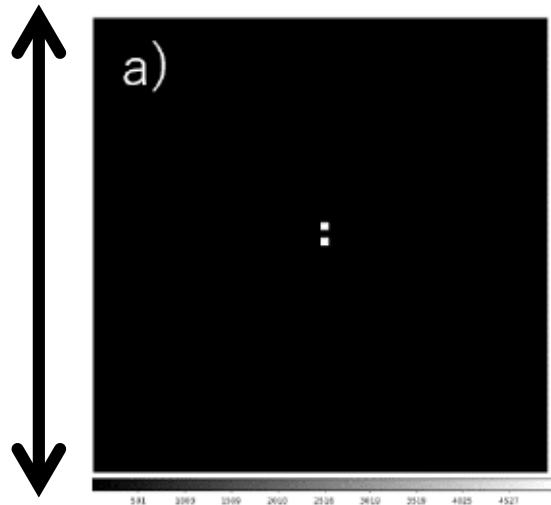
離角: 4秒角

カニ星雲

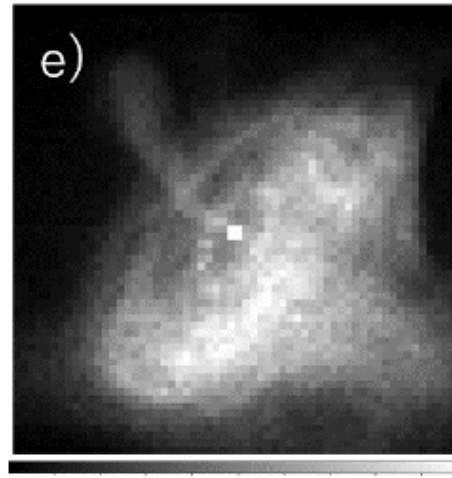
$N = 1e6$

超新星残骸: Cas A

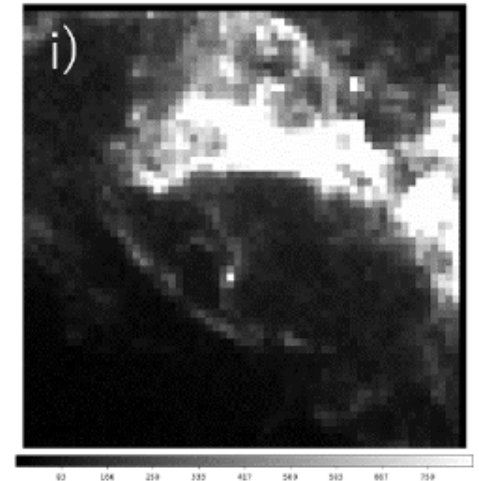
$N = 1e6$



2分角



Chandra Image



Chandra Image

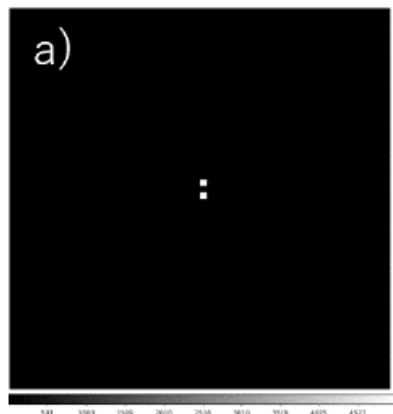
1分角の角度分解能を持ったミラーに、angular resolution boosterを組み合わせたとき、off-focus 撮像素子で得られるイメージをシミュレートした。

近接二重星(離角:4秒角)

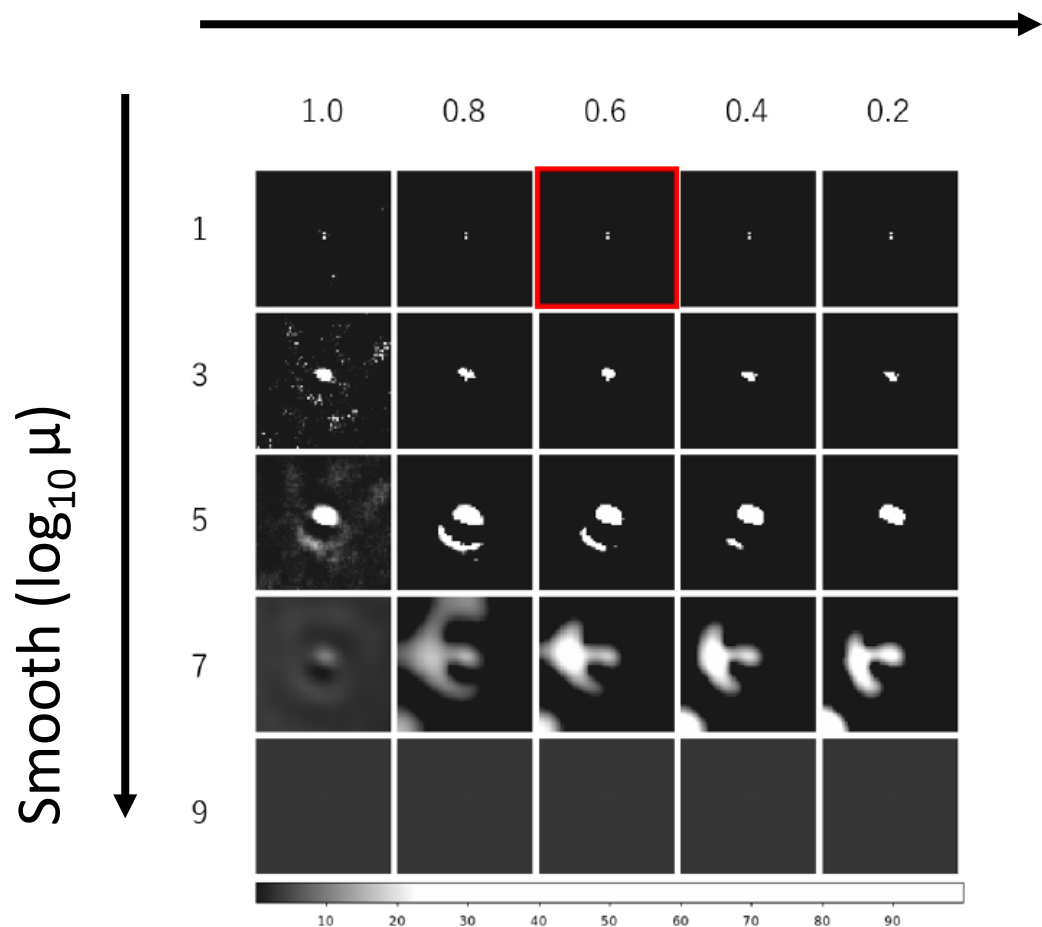
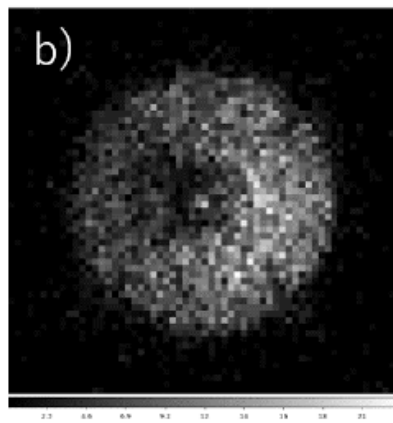
入力画像

再構成画像

Sparse (β)



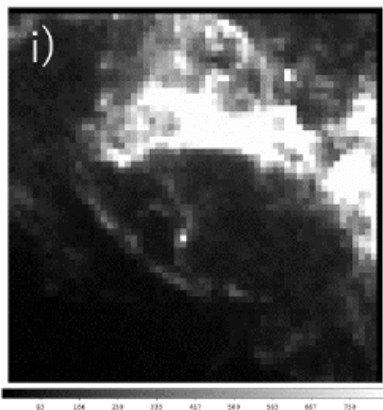
Off-focus 撮像検出器
で得られる画像



最適なパラメータをCross-validation で決定。

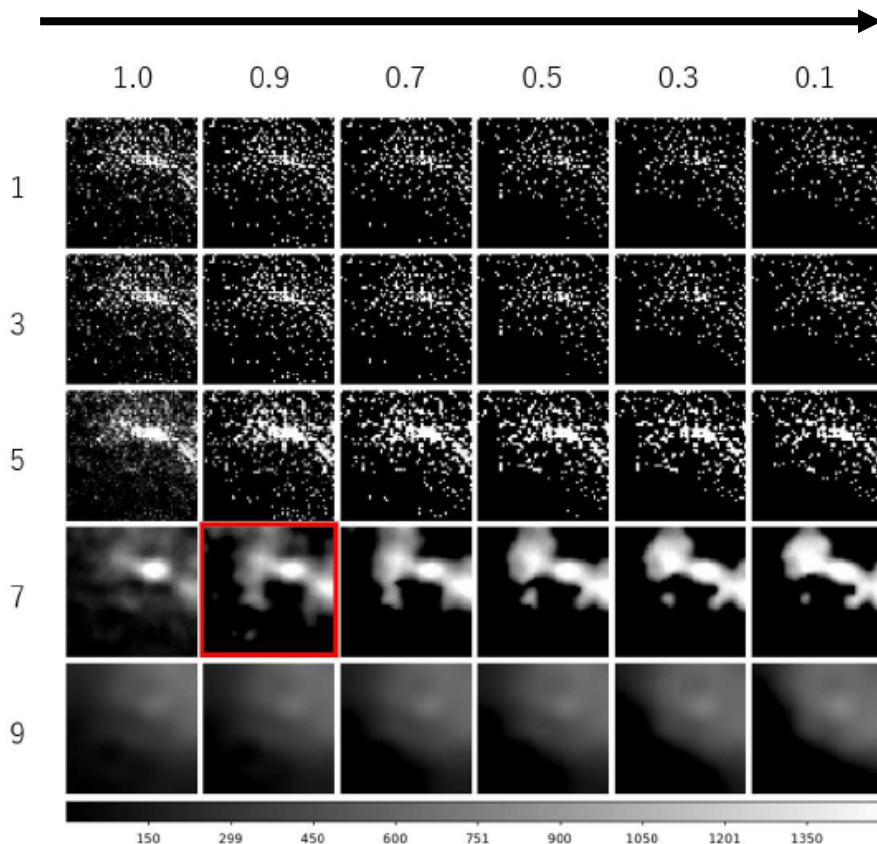
超新星残骸 Cas A

入力画像



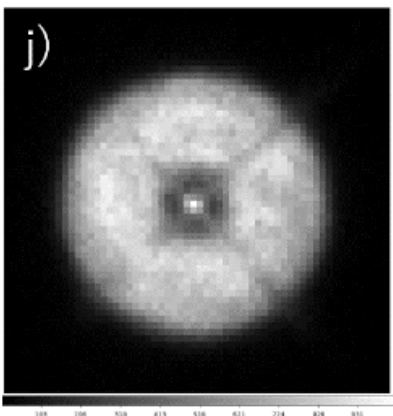
再構成画像

Sparse (β)



Smooth ($\log_{10} \mu$)

Off-focus 撮像検出器
で得られる画像



最適なパラメータをCross-validation で決定。

Richardson-Lucy法との比較

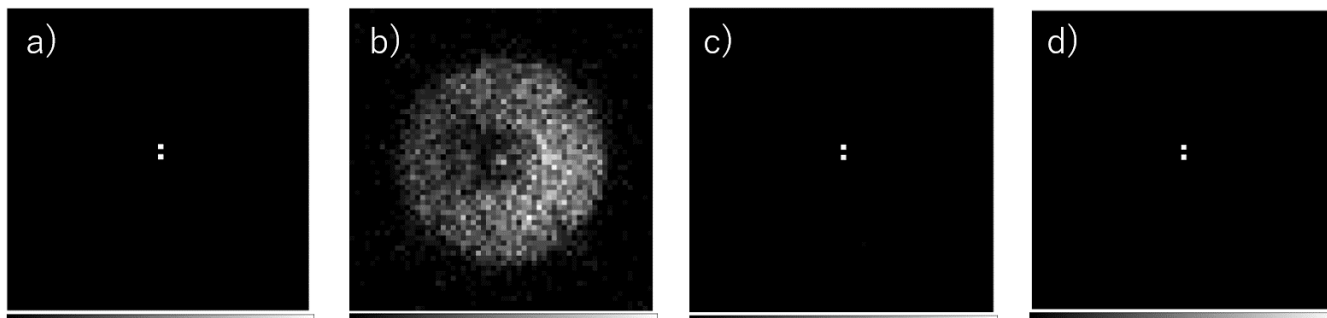
Input

Obs.

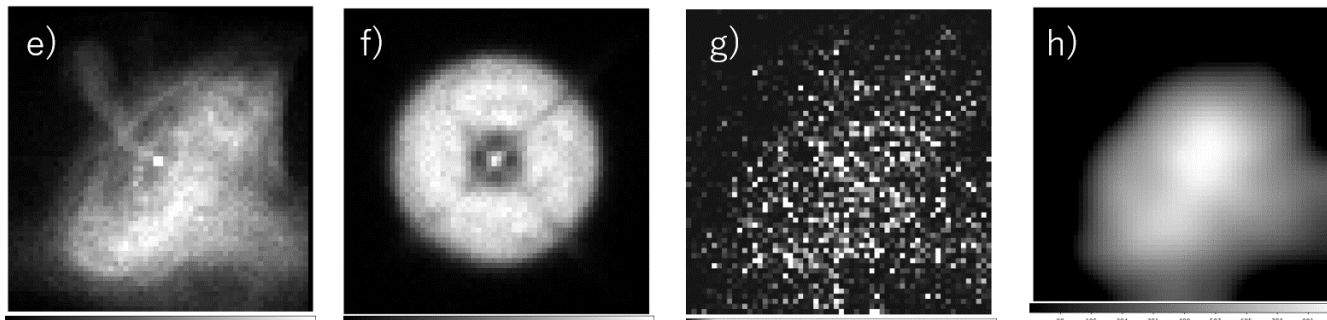
R-L

This work

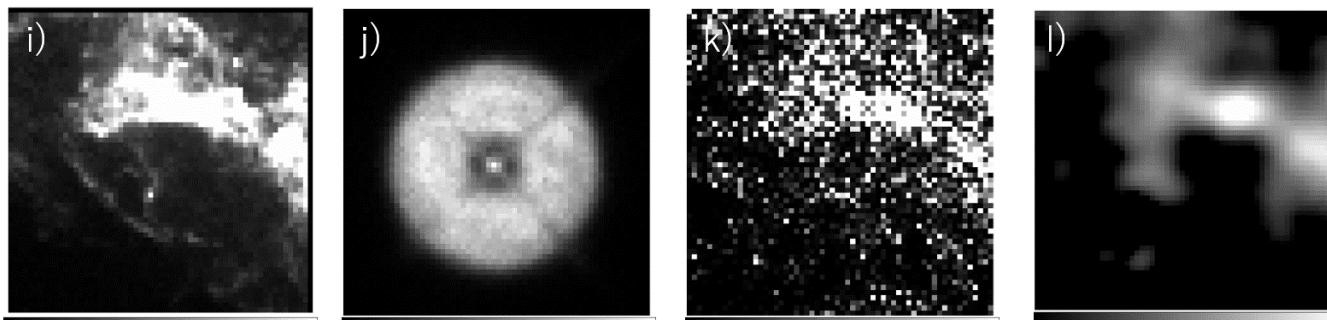
近接二重星
(離角: 4秒角)



カニ星雲



超新星残骸
Cas A

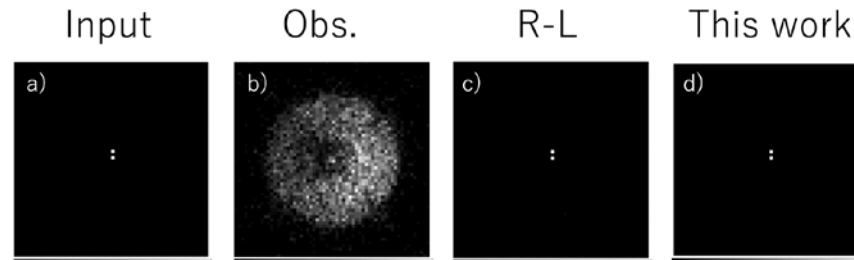


2分角

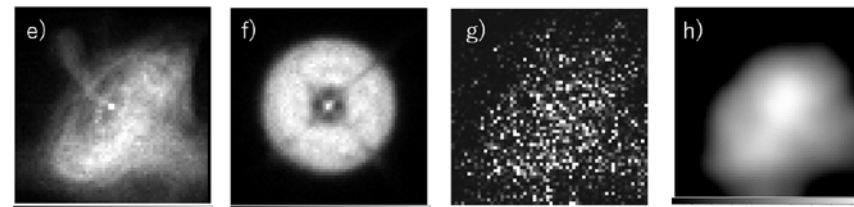


結果

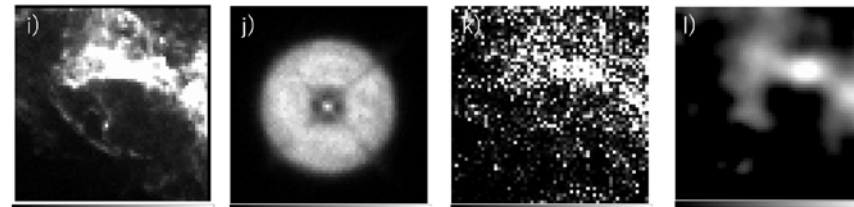
近接二重星



カニ星雲



超新星残骸
Cas A



- ✓ 4秒角しか離れていない近接二重星が分離できた。(ミラーの角度分解能は1分角)
- ✓ 拡散天体のイメージも上手く再構成できた。一方、Richardson-Lucy 法の場合はnoisy。
- ✓ Angular resolution booster によって、角度分解能が1-2 桁向上できることが示された。

まとめ

- 前田 et al. (2018)によって、Angular resolution booster を用いた新型のX線望遠鏡が提案された。
- 従来のX線望遠鏡にdouble mask を追加するだけという、簡単な改良で実現可能。しかし、イメージの再構成が必要。
- 新しいイメージ再構成法を提案した。
 - Sparsenessとsmoothnessの正則化項を加えたRichardson-Lucy 法。
- 近接二重星、カニ星雲、超新星残骸(Cas A)でデモを行った。
- ミラーの結像性能が1分角しかなくても、Angular resolution booster を用いれば、数秒角の角度分解能が達成できることを実証した。
- 将来計画
 - マスクパターン、Focus位置のデザイン
 - 再構成アルゴリズムの高速化
 - 実験: ミラー + マスク + 再構成アルゴリズム