Transformation between Surface Spherical Harmonic Expansion of Arbitrary High Degree and Order and Double Fourier Series on Sphere

あるいは

球面か四角四面か、それが問題ぢゃ

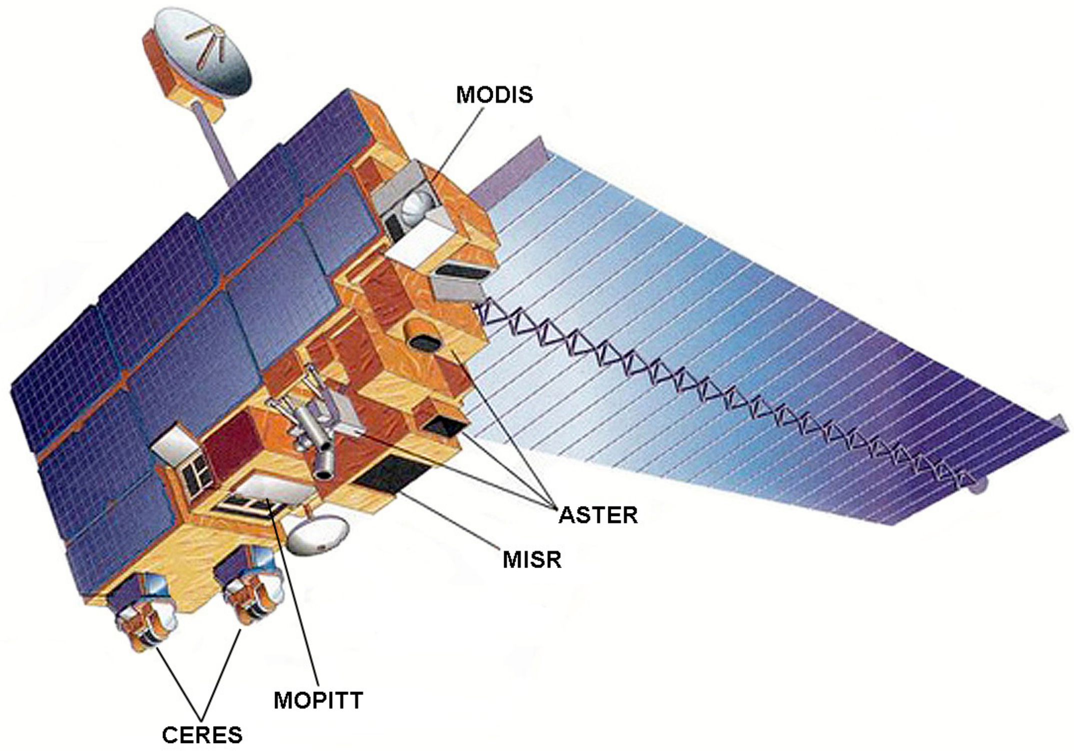
福島登志夫
（国立天文台）

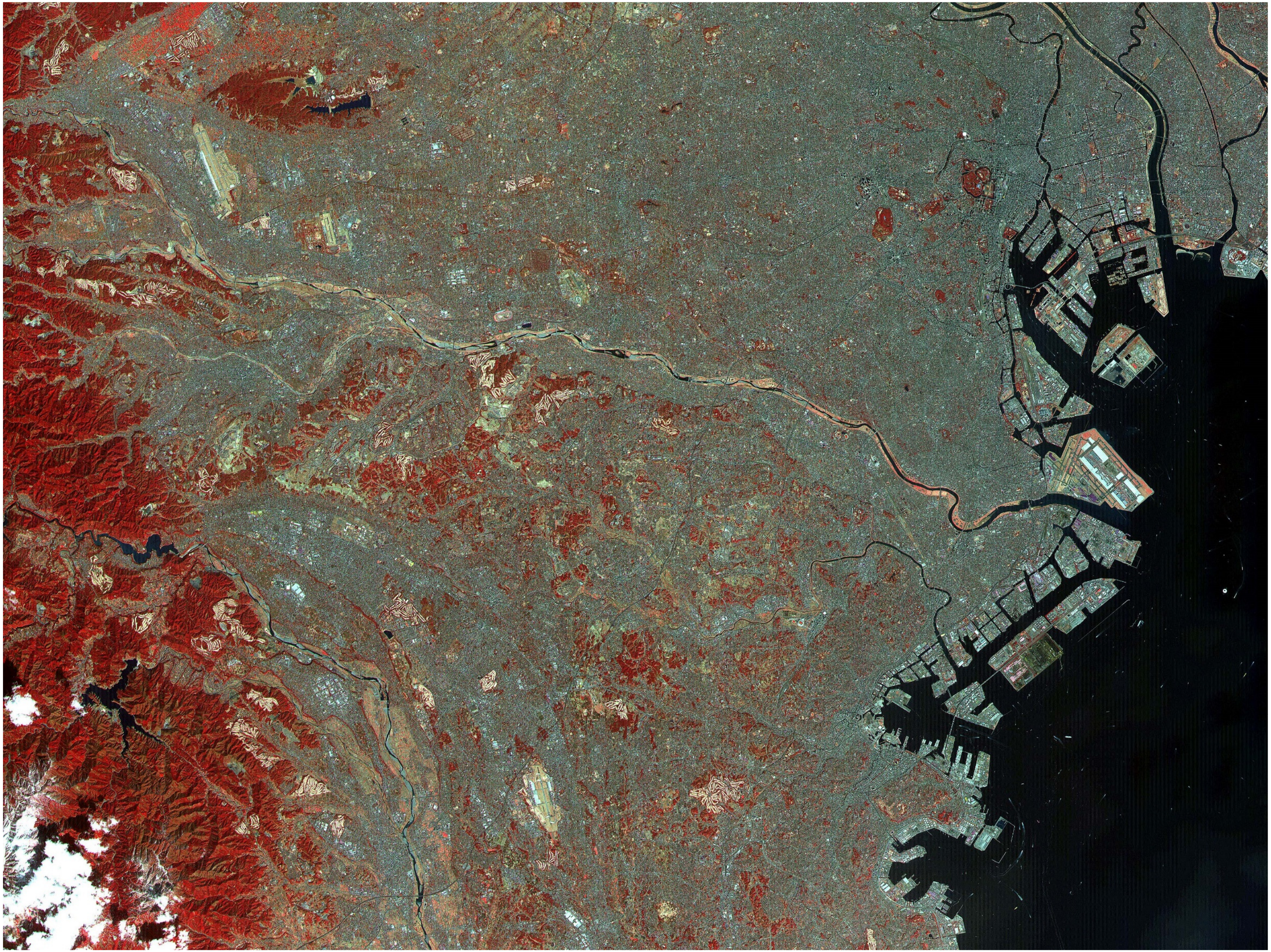
J Geodesy, 2018, 92:123-130

ResearchGate Fukushima 検索

超高分解能衛星データ

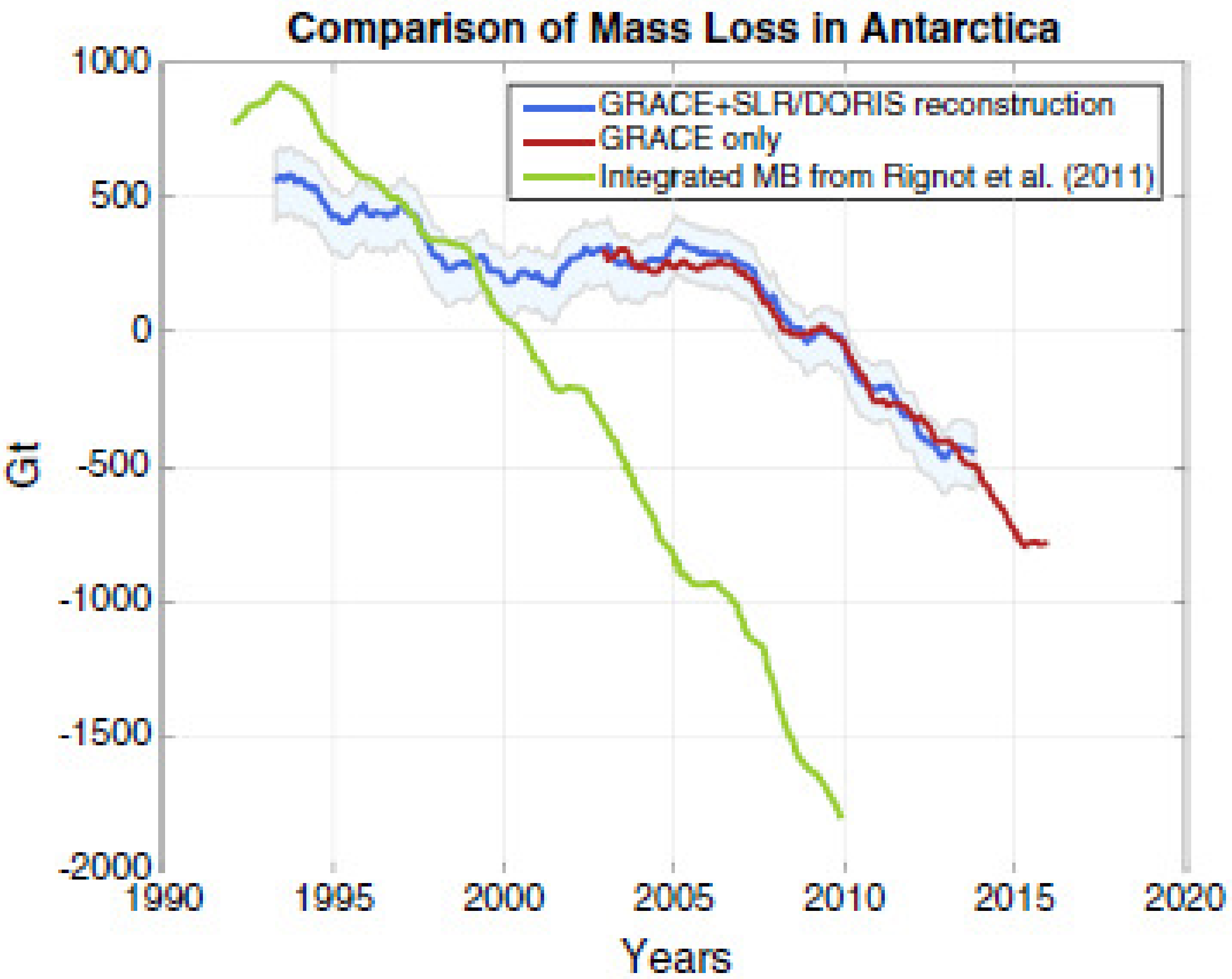
- Tachikawa et al (2011)
- Terra/ASTER: 米＋通産省
  - 15x90m
  - 全地球域デジタル高度データ





南極冠の質量減少

- Talpe et al. (2017)
- Rignot et al. (2011) との大きな差異



基本の
「き」

ルジャンドル対フーリエ

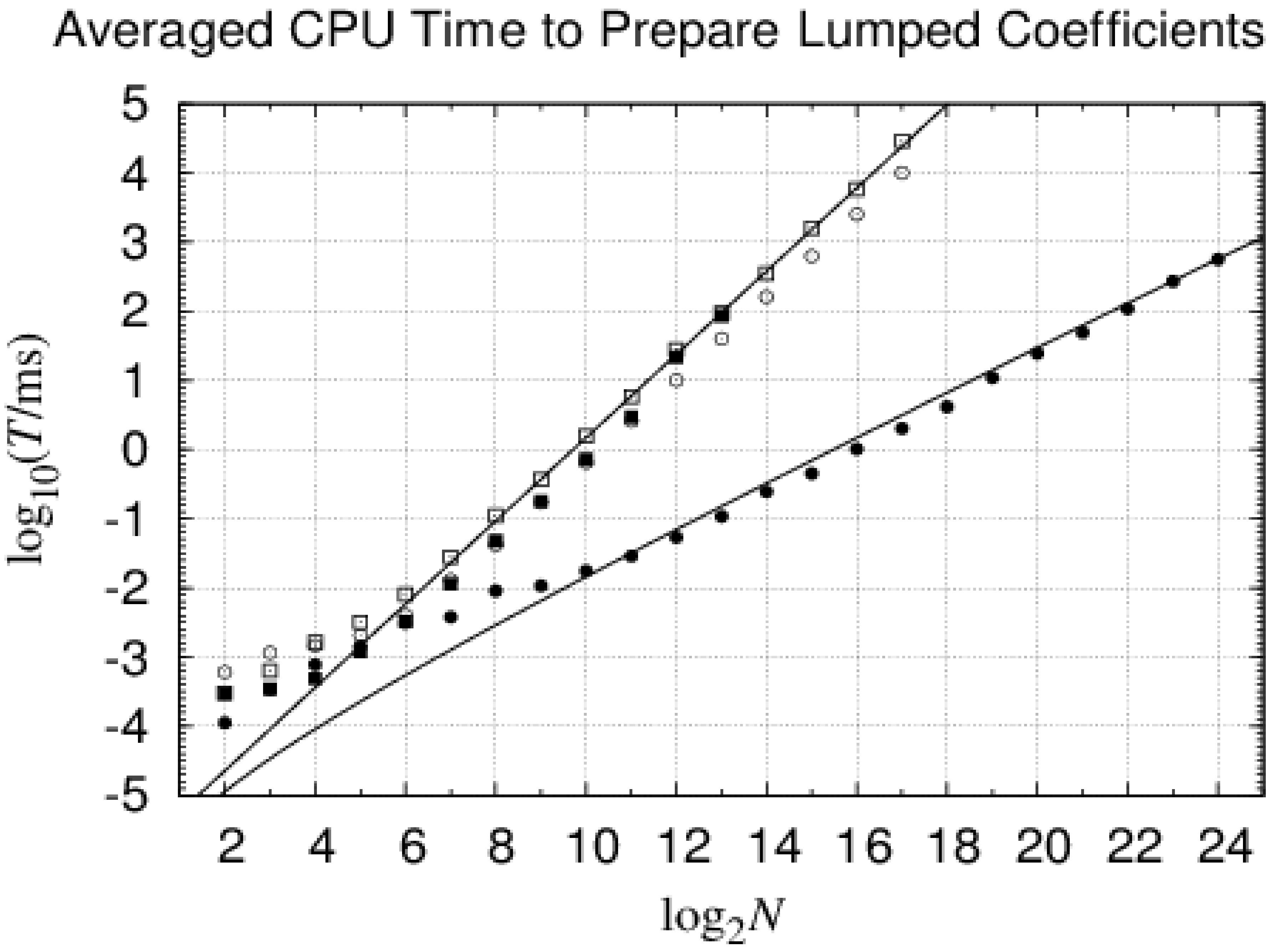
球面調和展開

- 球面上の任意関数

$$F(\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\left(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda+\bar{S}_{nm}\sin m\lambda\right)$$

  - フーリエ級数展開 $\cos m\lambda, \sin m\lambda$
  - 完全規格化ルジャンドル陪関数 $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$
  - 完全規格化球面調和係数 $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$

次数の
呪い



Averaged CPU Time to Prepare Lumped Coefficients
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
$\log_{10}(T/\mathrm{ms})$
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
$\log_2 N$

球面上の二重フーリエ級数展開

- 球面上の任意関数の別表現

$$F(\theta,\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}h_m(k\theta)\left(A_{km}\cos m\lambda+B_{km}\sin m\lambda\right)$$

  - 混合三角関数 $h_m(\psi)\equiv\begin{cases}\cos\psi & (m:\mathrm{even})\\ \sin\psi & (m:\mathrm{odd})\end{cases}$
  - フーリエ展開係数 A_{km}, B_{km}
- 致命的欠点:非一意性

展開係数の変換

- 球面調和関数 -> ２次元フーリエ級数

$$A_{km} = \sum_{n=\max(k,m)}^{\infty} p_{nmk} \bar{C}_{nm}$$

$$B_{km} = \sum_{n=\max(k,m)}^{\infty} p_{nmk} \bar{S}_{nm}$$

- ２次元フーリエ級数 -> 球面調和関数

$$\bar{C}_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{nmk} A_{km}$$

$$\bar{S}_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{nmk} B_{km}$$

- 難問: 非一意変換

変換係数の定義

- 前方変換係数p_{nmk}

$$\bar{P}_{nm}(\cos\theta) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_{nmk} h_m(k\theta)$$

- 後方変換係数q_{nmk}

$$q_{nmk} \equiv \frac{1+\delta_{m0}}{4} \int_0^{\pi} h_m(k\theta)\, \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$

新しい
計算法

前方変換係数計算

- ウィグナー表現

$$p_{nmk} = (-1)^{[m/2]}(2-\delta_{k0})\sqrt{(2-\delta_{m0})(2n+1)}E_{nkm}E_{nk0}$$

- ウィグナーd関数の直角値

$$E_{nkm} \equiv d_{nkm}(\pi/2)$$

- E_{nkm}の漸化式計算 (Fukushima 2017, J. Geodesy)

ウィグナー

- E. Wigner (1902-1995)
- ノーベル物理学賞 (1963)
  - 群論と量子力学 (1931)
- マンハッタン計画に関与
- ウィグナーD行列
- ウィグナーd関数
- その他多数の予想・定理

後方変換係数計算

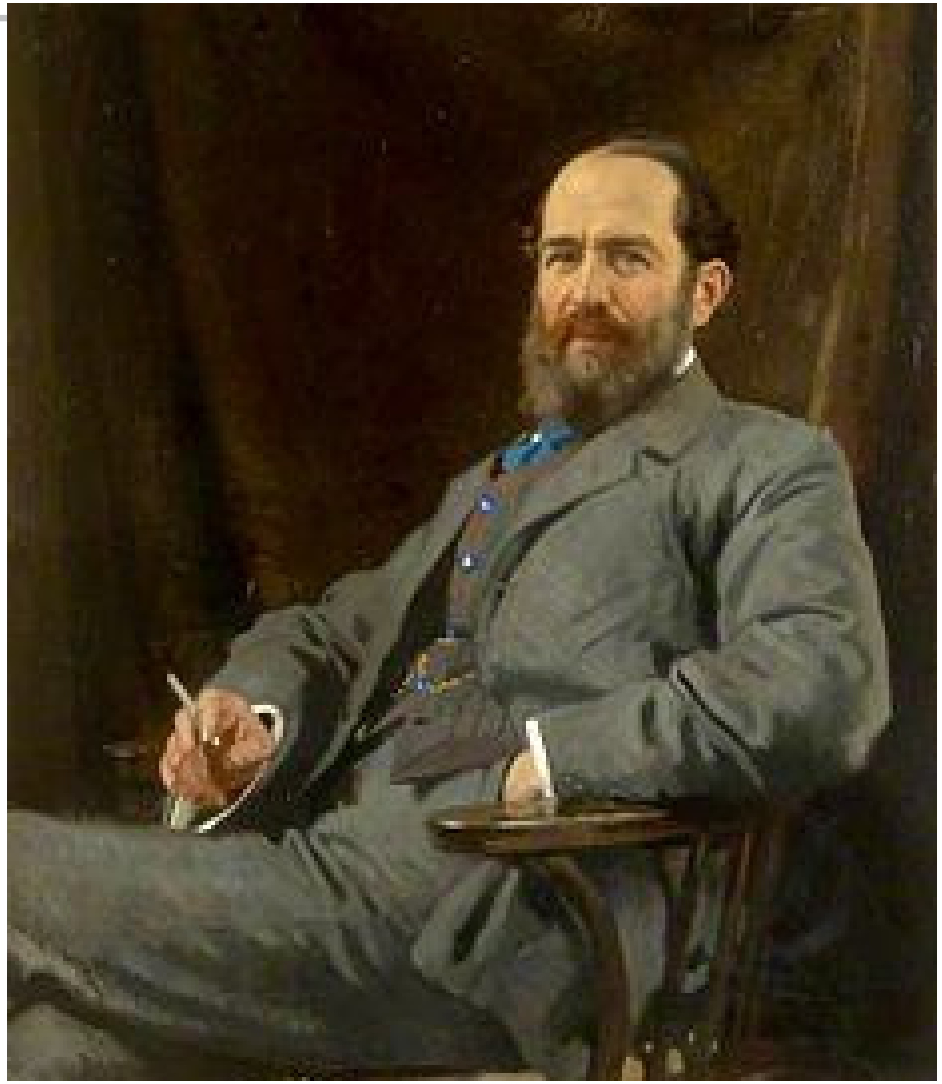
- シュスター(1902,1903)の無名公式

$$\frac{\mathrm{d}\left[P_{nm}(\cos\theta)\sin\theta\right]}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{(m-1)P_{n,m+1}(\cos\theta)-(m+1)(n+m)(n-m+1)P_{n,m-1}(\cos\theta)}{2m}$$

- q_{nmk}の積分定義式に代入
  -> q_{nmk}の新しい漸化式

シュスター

- Arthur Schuster (1851-1934)
- 調和解析の達人
- 分光学の権威
- ペリオドグラムを創始
  - 太陽黒点データ
- 反物質概念を提案



q_{nmk}の漸化式計算: 主要項

- 位数mに関する後退漸化式

$$q_{nmk} = k(-1)^m f_{nm} q_{n,m+1,k} + g_{nm} q_{n,m+2,k}$$

$$q_{n,n-1,k} = k(-1)^{n-1} f_{n,n-1} q_{nnk}$$

$$f_{nm} = \frac{2(m+1)}{m+2} \sqrt{\frac{1+\delta_{m0}}{(n-m)(n+m+1)}}$$

$$g_{nm} = \frac{m}{m+2} \sqrt{\frac{(n-m-1)(n+m+2)}{(n-m)(n+m+1)}}$$

q_{nmk}の漸化式計算:対角項

- 次数・位数に関する前進漸化式

$$q_{nnk} = e_{nk} q_{n-2,n-2,k}$$

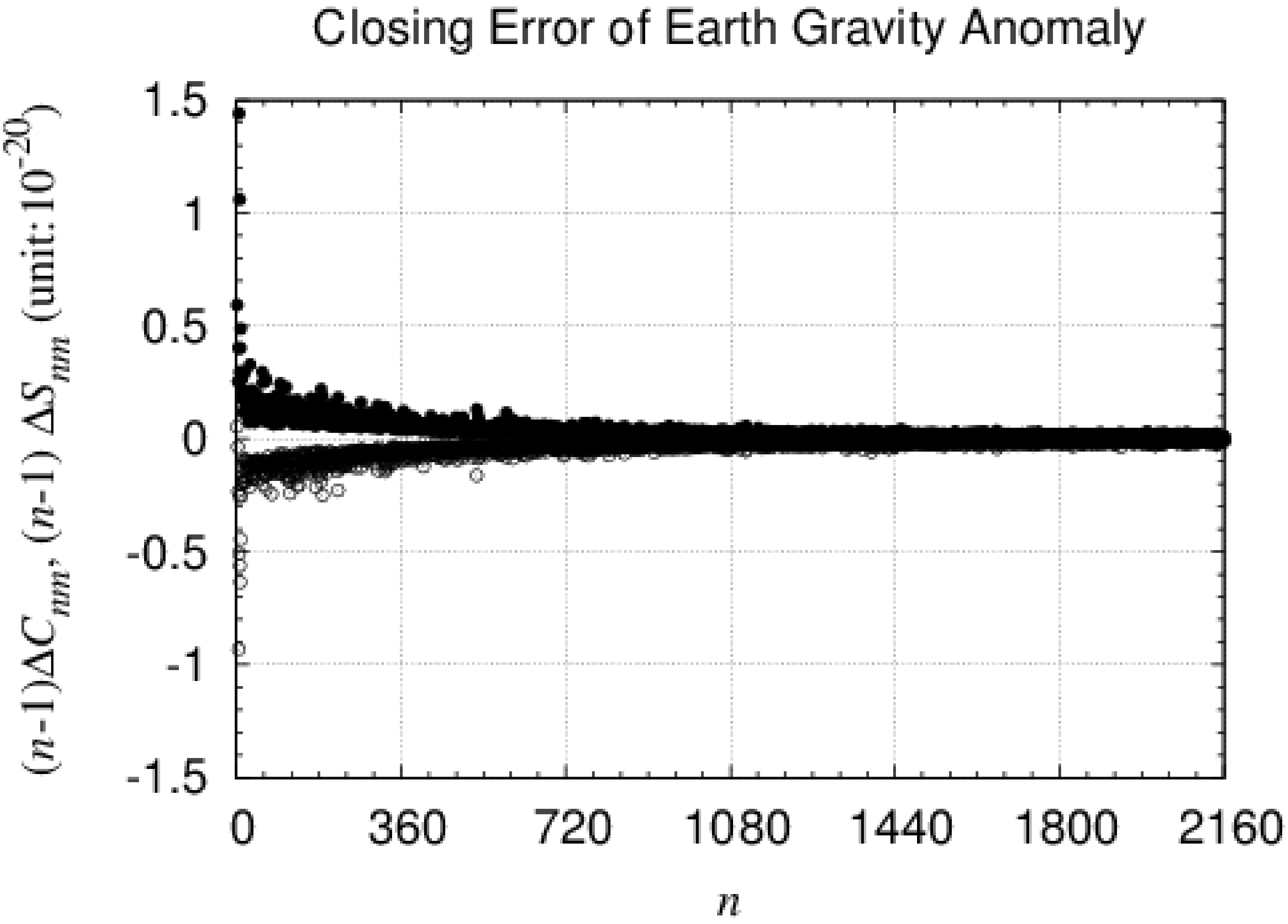
$$e_{nk} = \frac{n+1}{2(n-k+1)(n+k+1)} \sqrt{\frac{n(2n-1)(2n+1)}{(1+\delta_{n2})(n-1)}}$$

- 初期値

$$q_{00k} = \frac{-1}{(k-1)(k+1)}$$

$$q_{11k} = \frac{-\sqrt{3}}{k(k-2)(k+2)}$$

閉合差
検査


Closing Error of Earth Gravity Anomaly
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
360
720
1080
1440
1800
2160
n
(n-1)ΔC_nm, (n-1) ΔS_nm (unit:10^-20)

結論

- 球面調和関数展開と球面上の２重フーリエ級数展開の間を自由自在に変換
- 漸化式の完全活用
- 任意(~10^9)次数・位数に適用可能
- 超高次数球面調和解析の高速化を実現

参考文献

- Schuster (1902) Proc. Royal Soc. London, 71:97
- Schuster (1903) Philos. Trans. Royal Soc. London A, 200:181
- Fukushima (2017) J. Geodesy, 91:995
- Fukushima (2018) J. Geodesy, 92:123
- Rignot et al. (2011) Geophys. Res. Lett., 38:L05503
- Tachikawa et al. (2011) Proc. IEEE Int’l Geosci. Rem. Sens. Symp., 3657
- Talpe et al. (2017) J. Geodesy, 91:1283
- Wigner (1931) Gruppentheorie und ihre anwendungen auf die quantenmechanik der atomspektren, Vieweg Verlag