

Persistent Homologyを用いた 宇宙の大規模構造の定量化

2016年2月12日

木村雄喜（スマートスケープ株式会社）

今井弘二（JAXA/ISAS）

目次

1. 宇宙の大規模構造とTDA

1-1. 宇宙の大規模構造

1-2. TDA（位相的データ解析）とは

1-3. トポロジーとは

1-4. ジーナス統計とは

2. Persistent Homologyの紹介

2-1. Persistent Homologyの計算

2-2. Persistent Homologyの解釈の仕方

2-3. PHを用いた定量化の方法

3. 適用例

4. まとめ&今後

1-1. 宇宙の大規模構造

銀河は宇宙全体に一様に散らばっているわけではない。

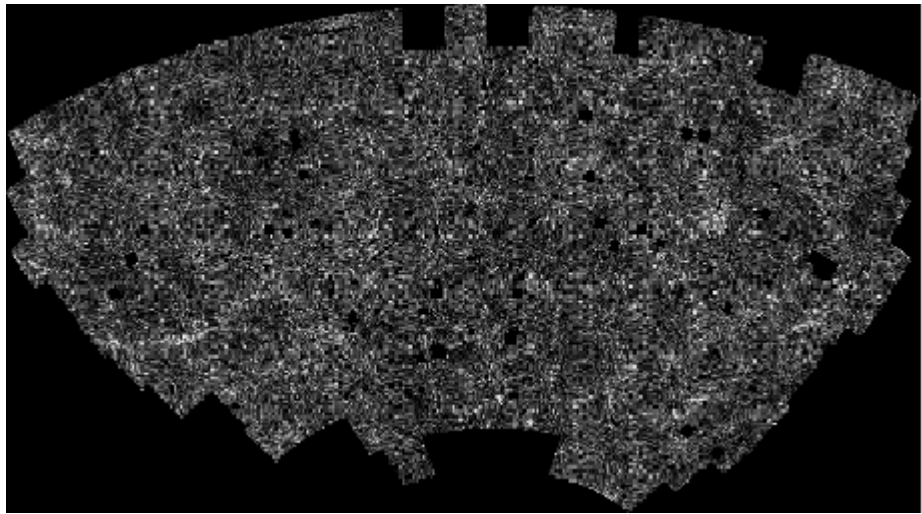
- 銀河が狭い範囲に集中している場所（銀河群/銀河団）
- ほとんど銀河存在しない場所（ボイド）

がある。

このような銀河群/銀河団とボイドが複雑に入り組んであたかも巨大な網の目のように見える構造を

「宇宙の大規模構造」

と呼ぶ。



APMサーベイによる天球面上における2次元銀河分布 (Maddox et al. 1990より転載)

1-2. TDA (位相的データ解析) とは

TDA (Topological Data Analysis)

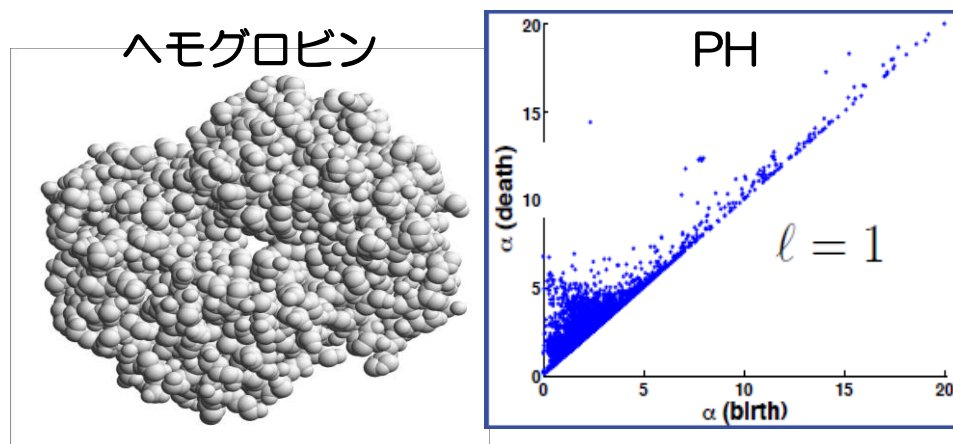
対象データの持つ情報をTopologicalな道具で取り出すことを研究する分野。Topologicalな道具として最も有名なものが **Persistent Homology** である。

PH適用例

- タンパク質構造解析
- センサネットワーク
- デジタル画像解析

etc

ヘモグロビン立体構造への適用例



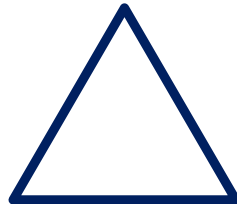
平岡裕章先生の資料より転載

1-3. トポロジーとは

連続変形（伸ばしたり曲げたりすることはできるが切ったり貼ったりはしない）によって保たれる空間の性質を探る学問。
トポロジーを使うことにより、構造の本質的な違いに情報が集約される。



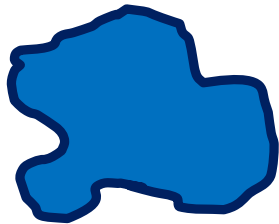
\approx



\approx



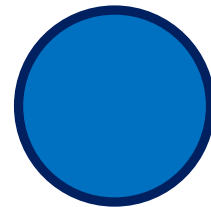
\neq



\approx



\approx



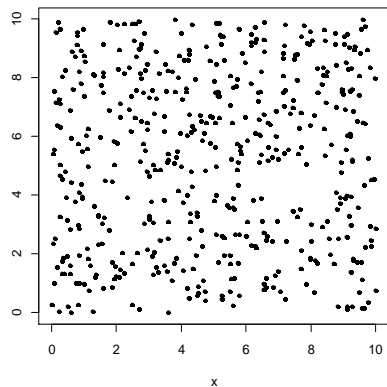
特に、Homologyは「穴」の数の違いを区別する。

1-4. ジーナス統計とは

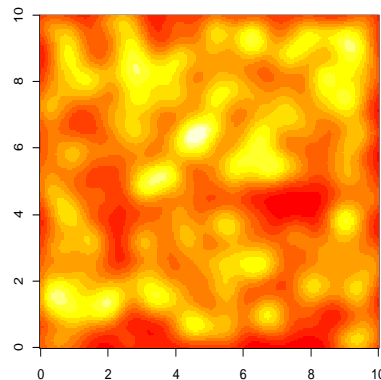
ジーナス統計

大規模構造のトポロジを解析する手法の一つ。(Gott et al .1986)
銀河分布にスムージング処理(各点を膨らませる)し、得られた曲面に対して各等高線(等密度面)ごとにHomologyを計算する。

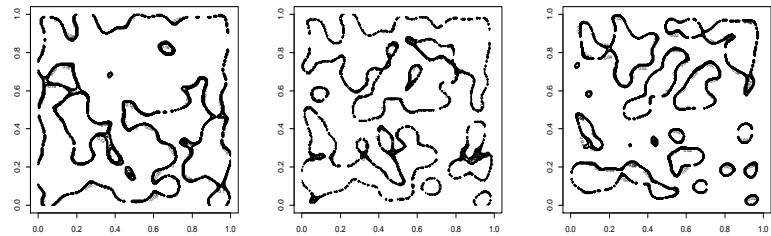
スムージング処理



銀河の分布



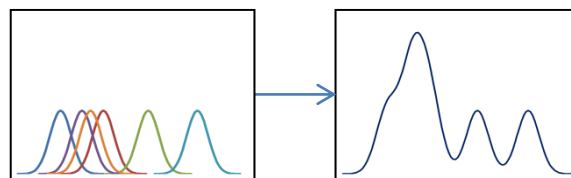
各等高線(等密度面)ごとにHomologyを計算し、その分布を出力する。



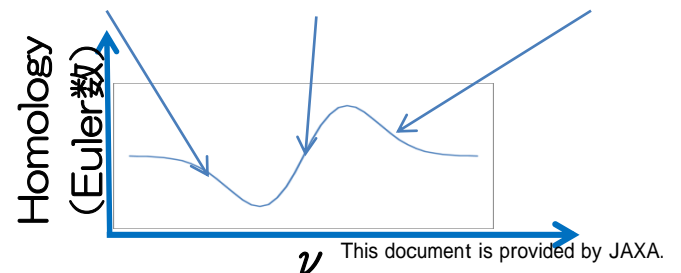
$\nu = -0.5$

$\nu = 0$

$\nu = 0.5$



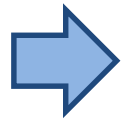
各点に山を配置し足し込む



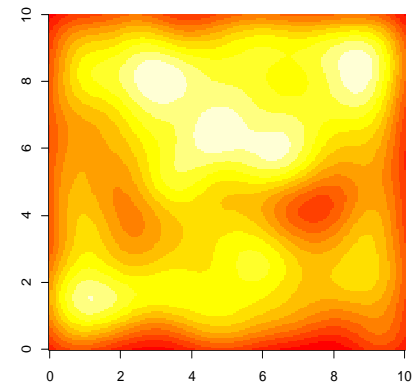
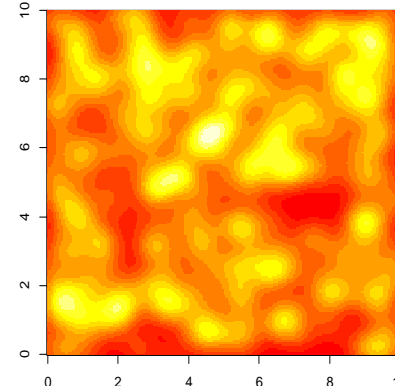
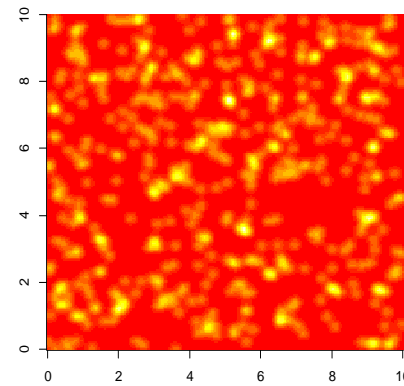
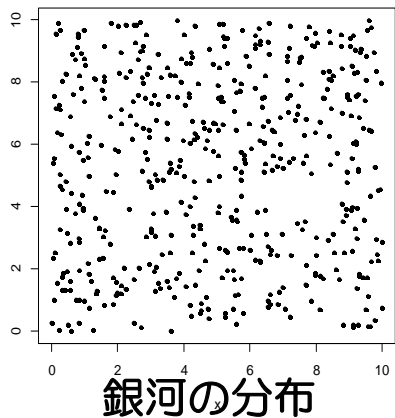
1-4. ジーナス統計とは

ジーナス統計の問題点

スムージング処理時の分散パラメータ(1点をどれだけ膨らませるか)に結果が大きく左右される。



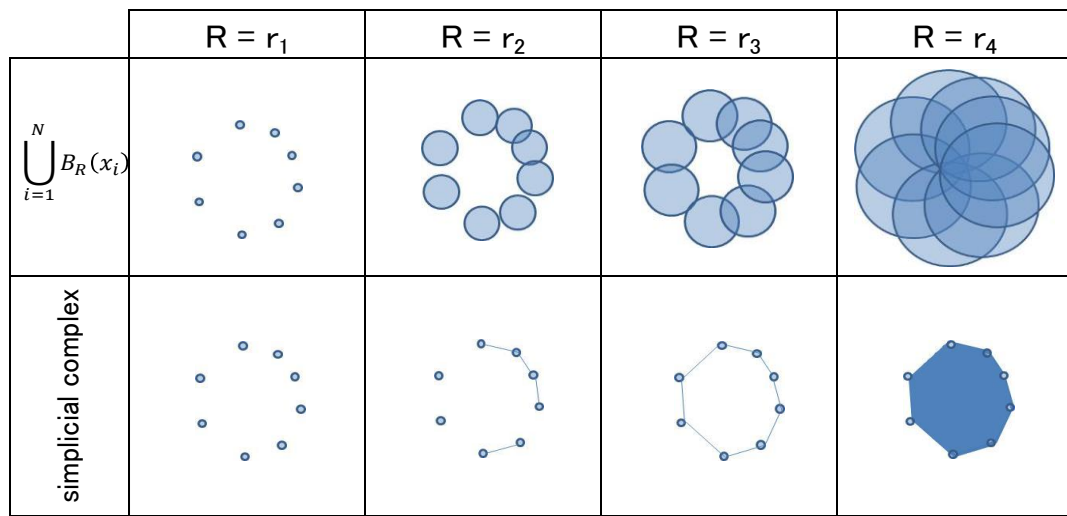
Persistent Homologyの方法は、分散パラメータを変化させたときのトポロジーの変化をトレースする手法であるため、分散パラメータを決定する必要がない。



2-1. Persistent Homologyの計算

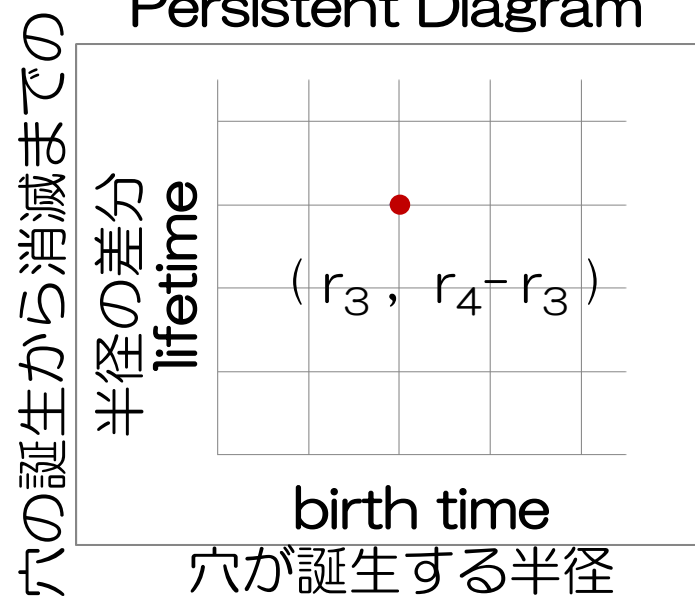
各銀河の半径を徐々に大きくしてゆき、対応するグラフ(単体的複体)の穴(Genus)の生成/消滅を記録する。

Filtration of Simplicial Complex



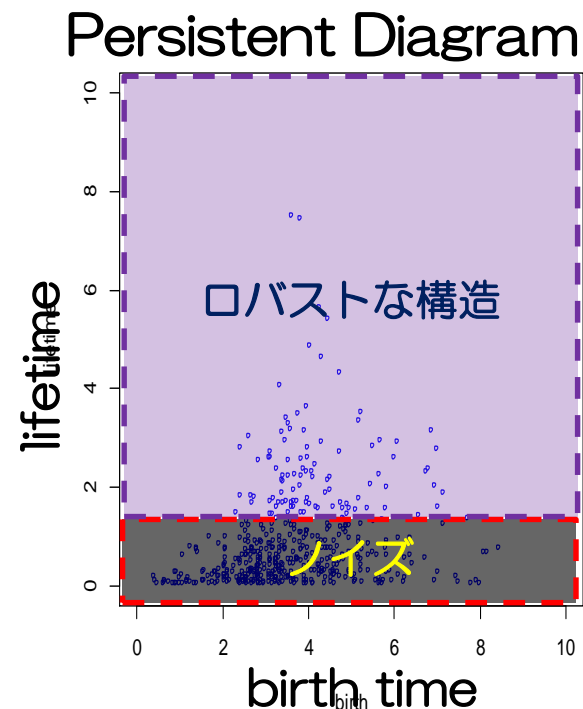
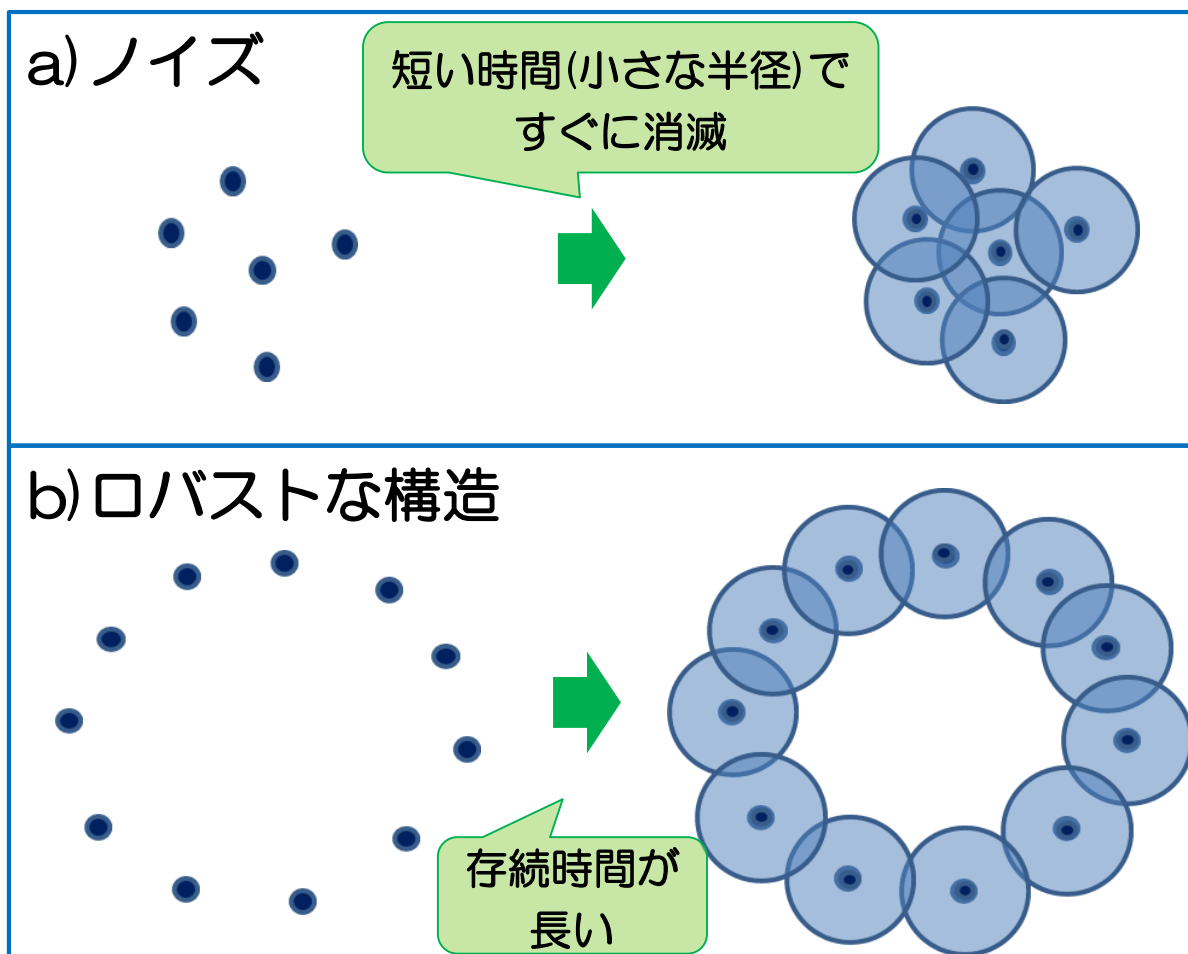
$R=r_3$ で穴が生まれ、 $R=r_4$ で穴が消滅。

Persistent Diagram



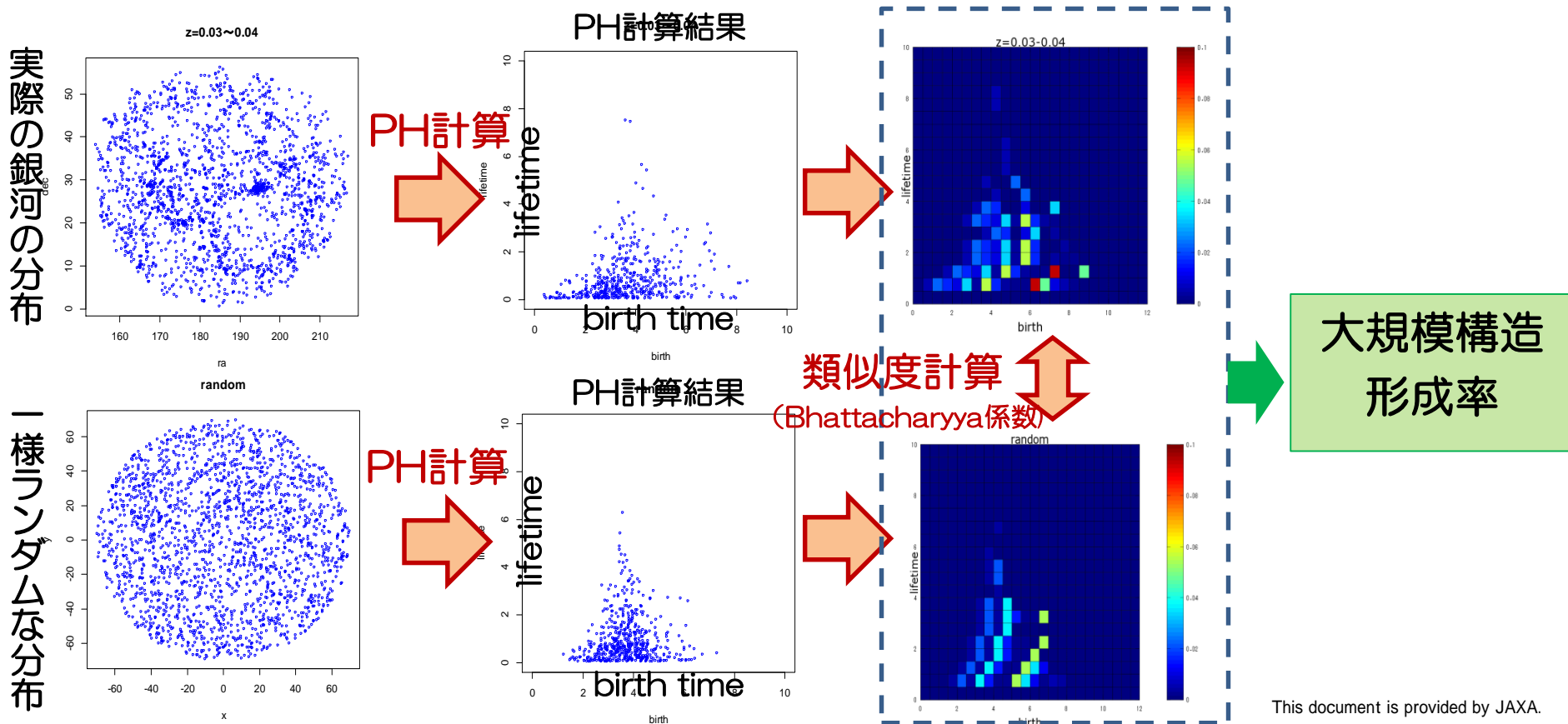
2-2. Persistent Homologyの解釈の仕方

本質的な構造は存続時間(生成から消滅までの時間)が長い。



2-3. PHを用いた定量化の方法

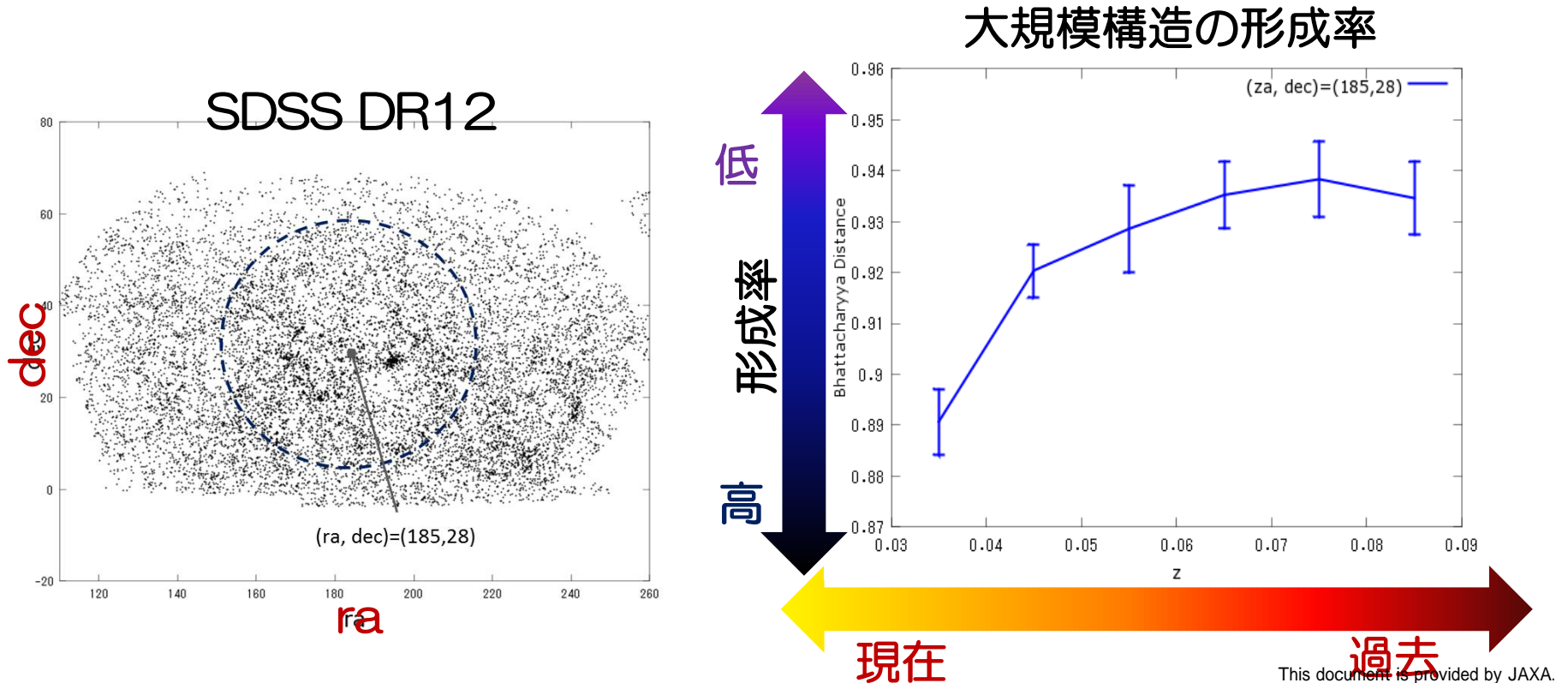
実際の銀河分布と一様ランダムな分布とのPHを比較することにより、大規模構造の形成率を定量化



3. 適用例

以下は、SDSS(Sloan Digital Sky Survey) DR12に適用した結果。

過去から現在に近づくにつれて、大規模構造の形成率が上がっている傾向が見て取れる。



4. まとめ&今後

まとめ

TDAの一つの手法であるPersistent Homologyを使って大規模構造の形成率を定量化する方法を示した。

現在に近づくに連れて大規模構造の形成が進むという結果が有意に示された。

今後

1. 適用範囲の拡大

遠い銀河、クエーサーなど、本手法の適用対象を拡げる。

2. シミュレーションデータとの比較

Millenium Simulationなどのシミュレーションデータに適用し、宇宙パラメータを色々変えたサンプルのPHと比較することで、宇宙パラメータの決定に役立てる。