A10　剛体要素を考慮したForce Density Methodの定式化とケーブルメッシュアンテナの設計

○安井　規泰（東京都市大学大学院），宮坂　明宏（東京都市大学大学院）
Noriyasu Yasui (Tokyo City University), Akihiro Miyasaka(Tokyo City University)

Space structures are required for the precise and large structure. Deployable antenna is used for satellite communication and synthetic aperture radar. Especially, cable mesh antenna which is one of the deployable reflector is characterized by light weight, high packing efficiency and large size. Cable mesh antenna consists of cable network structure, metal mesh and deployable truss structures. The shape of cable network structure is formed in cable tension. In addition, only if cables have tension, the shape of cable networks is stable. Moreover, cable mesh antenna is required for high precision structure. As a result, it is important for cable network structure to analyze the problem of shape determination. Force density method is suitable for analysis method of cable network structure. However, force density method does not formulate node elements. It is necessary for analysis of cable mesh antenna to consider node element. This paper described force density method considering node element. First, node element is formulated and applied to force density method. Second, force density method is formulated optimization problem. Finely, tension solution of cable network structure is optimized by non-linear programing.

Key words: Large deployable antenna, Cable network structures, Space structures, Optimization problem, Force density method

1.　緒　　言

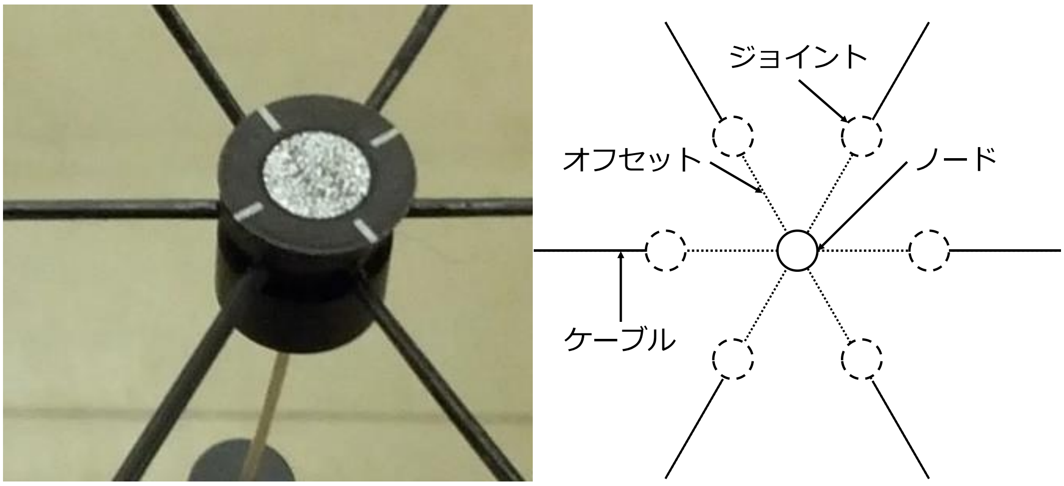
近年，宇宙ミッションの高度化に伴い，衛星搭載用アンテナの大型化と軽量化が要求されている．これらの要求を満たすために，軌道上で展開するメッシュ反射鏡が有効である [1]．メッシュ反射鏡のアンテナ反射鏡面構造は，電波反射鏡面を形成する金属メッシュと複数のケーブルでパラボラ面を形成するケーブルネットワーク構造によって構成される．ケーブルネットワーク構造は，ケーブルに張力が付加された状態で形状が安定する．そのため，一般の構造物の設計の基本となる自然形状が存在しないのが特徴である．ケーブル構造の解析手法の例として，有限要素法解析 [2]と Force Density Method(FDM) [3] [4]が挙げられる．有限要素法解析では，ケーブルを一つの有限要素として扱い，ひずみエネルギーのポテンシャルの停留点を Newton 法により平衡方程式を算出する非線形有限要素が提案されている．しかし，初期条件やケーブルの材料剛性によって，算出される平衡形状が異なるため，ケーブルネットワーク構造の理想的な初期形状を算出する形状決定問題の解法としては適していない．FDM においては，ケーブルやストラットの軸力を長さで割った比率の概念を導入し，一回の逆行列計算で形状を算出することが出来る．そのため，数値計算を簡易化しているため，ケーブルネットワーク構造における理想的な形状を算出する解析手法に優れている．しかし，ケーブルの接続点となるノードのオフセットが考慮されていない．一般的なケーブルメッシュアンテナにおいては，mm オーダーの精度が要求されるため，数値解析上に反映させる必要がある．本研究では，高精度なケーブルメッシュアンテナを設計するために，ノードの付帯条件を考慮した FDM の定式化を行う．また，数値解析精度の検証を行い，定式化の妥当性を検証する．さらに，新たに定式化した数値解析手法に基づいて，ケーブルネットワーク構造の解析を最適化問題に適用することで，最適な平衡形状を算出することを目的とする．

This document is provided by JAXA.

2.　剛体要素を考慮した Force Density Method の解析手法

2.1.　ケーブル構造の釣り合い条件とノードの付帯条件

ノードの付帯条件を考慮した FDM の定式化を行うために，ケーブル構造の釣り合い条件とノードの有限回転について整理する．そこで，図 1 にケーブルの接続点となるノードのモデルを示す．図 1(A)が構造モデルにおけるノードの図を示し，円柱状で設計される．本研究においては，図 1(B)に示すようにケーブルインターフェースをケーブルが接続されるジョイント，オフセットがノードとケーブルインターフェースの距離，ノードが力の釣り合い式を算出する上での座標点として数学モデルを定義した．また，数値解析上ではノードを剛体要素として定義して定式化した．



(A)　構造モデル　　　(B) 数値解析モデル

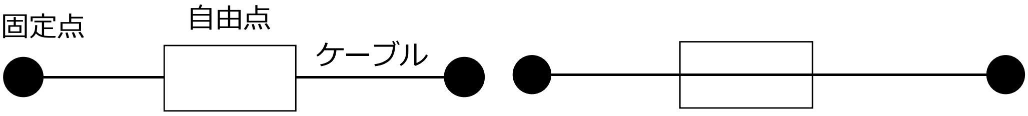
図 1　ノード

次にノードの付帯条件を考慮したケーブル構造の釣り合い条件について整理する．図 2 にノードの有限回転と釣り合い条件の関係図を示す．ノードの回転角が 0 deg と 180 deg である場合，ノードに作用する力とモーメントは釣り合っている．しかし，ノードの回転角が 180 deg の場合，ケーブルがノードを突き抜けている状態となり，図 1 に示す構造モデルにおける釣り合いの現象として現れないことがわかる．そこで，ノードの付帯条件を考慮したケーブル構造の釣り合い条件を以下のように定義する．

①　ノードにおける力とモーメントが釣り合う．

②　各ケーブル長さの 2 乗和が最小となる．

上記で示した条件を満たすようにノードの付帯条件を考慮した FDM の定式化を行う．また，剛体要素の回転姿勢はクォータニオンで定式化する．



(A) 0 deg　　　(B) 180 deg

図 2　ノードの付帯条件をケーブル構造の釣り合い状態

This document is provided by JAXA.

2.2. 剛体要素を考慮した FDM の定式化

FDM では，ケーブルの軸力と長さの比率で定義した軸力密度を変数として，数値計算を行う．そこで，剛体要素を考慮した x 座標におけるノードの力の釣り合い式は(1)式となる．

$$\boldsymbol{C}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\left(\left(\boldsymbol{C}_u\boldsymbol{x}_u+\boldsymbol{C}_f\boldsymbol{x}_f\right)+\left(\boldsymbol{J}_u\boldsymbol{r}'_{x,u}+\boldsymbol{J}_f\boldsymbol{r}'_{x,f}\right)\right)=\boldsymbol{f}_{x,u} \tag{1}$$

このとき，自由点座標について解くと，次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{x}_u=\left(\boldsymbol{C}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}_u\right)^{-1}\left(\boldsymbol{f}_x-\boldsymbol{C}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{C}_f\boldsymbol{x}_f+\boldsymbol{J}_u\boldsymbol{r}'_{x,u}+\boldsymbol{J}_f\boldsymbol{r}'_{x,f}\right)\right) \tag{2}$$

また，

$\boldsymbol{C}_u$：自由点とケーブルの接続行列

$\boldsymbol{C}_f$：固定点とケーブルの接続行列

$\boldsymbol{J}_u$：自由点のオフセットとケーブルの接続行列

$\boldsymbol{J}_f$：固定点のオフセットとケーブルの接続行列

$\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_f$：x 座標の自由点と固定点

$\boldsymbol{r}'_{x,u}, \boldsymbol{r}'_{x,f}$：回転後の x 座標のオフセット

$\boldsymbol{Q}$：張力密度の対角行列

$\boldsymbol{f}_{x,u}$：x 座標の自由点にかかる外力

と定義する．Y，Z 座標においても同様な手順で定式化した．

次に，ノードに作用するモーメントと各ケーブル長さの 2 乗和の総和が最小となるようにノードの回転角を導出する必要がある．そこで，ノードの回転角を設計変数とした制約付き非線形最適化問題 [5] に定式化した．下記に制約条件と目的関数を定義する．

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}) = \text{各ケーブル長さの 2 乗和} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta}) = \text{各剛体要素におけるモーメントの釣り合い} = 0 \tag{4}$$

上式で定義した最適化問題を解くために，最適化アルゴリズムに内点法を採用し，Matlab のサブルーチンである fmincon を使用した．

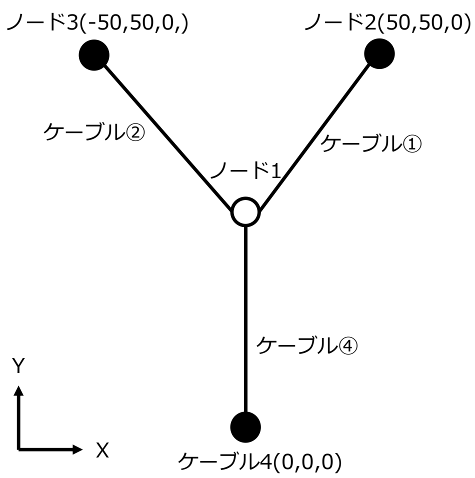
3. 数値解析による検証

前章で定式化したノードの付帯条件を考慮した FDM の定式化に基づいて，数値解析を行い解析精度の検証を行った．表 1 に解析条件，図 3 に数値解析モデル，図 4 に解析モデルの初期形状を示す．初期状態では，剛体要素を Z 軸周りに 45 deg 回転させた状態とした．

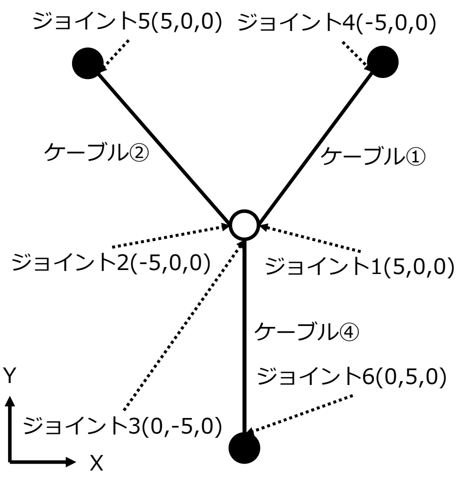
表 1 3 点固定されたケーブル構造の解析条件

軸力密度	剛体要素の回転角（初期条件）
ケーブル① ＝2 N/mm	θ_x = 0 deg
ケーブル② ＝2 N/mm	θ_y = 0 deg
ケーブル③ ＝2 N/mm	θ_z = 45 deg

This document is provided by JAXA.



(A) Relationship between nodes and cables



(B)Relationship between joints and cables

図 3　数値解析モデル

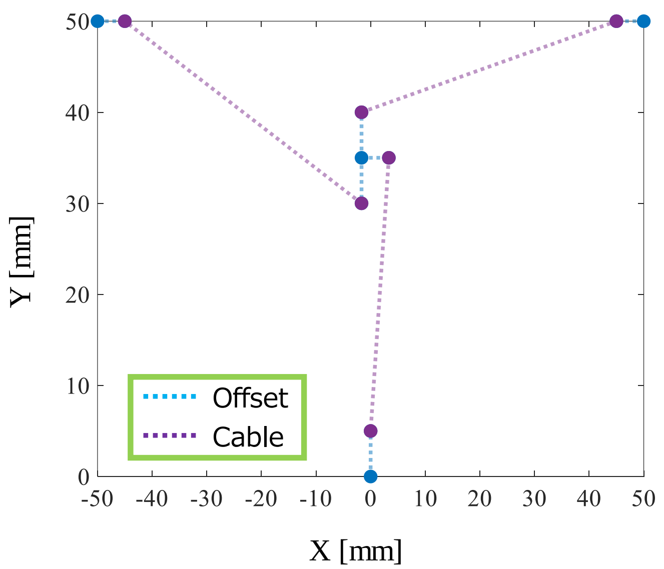


図 4　ケーブル構造の初期形状

図 5 に解析で得られたケーブル構造の形状を示す．初期形状と比較すると，剛体要素が Z 軸周りの負の方向に回転したことがわかる．また，剛体要素におけるモーメントの不釣り合い力は

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_x \\ \boldsymbol{M}_y \\ \boldsymbol{M}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.34825 \times 10^{-16} \end{bmatrix} [\mathrm{N \cdot m}] \tag{5}$$

と求まる．剛体要素におけるモーメントの不釣り合い力が 10^{-16} N·m オーダーの値であるため，精度の良い数値解析結果が得られたと言える．したがって，本稿で示した解析手法は妥当であると言える．

This document is provided by JAXA.

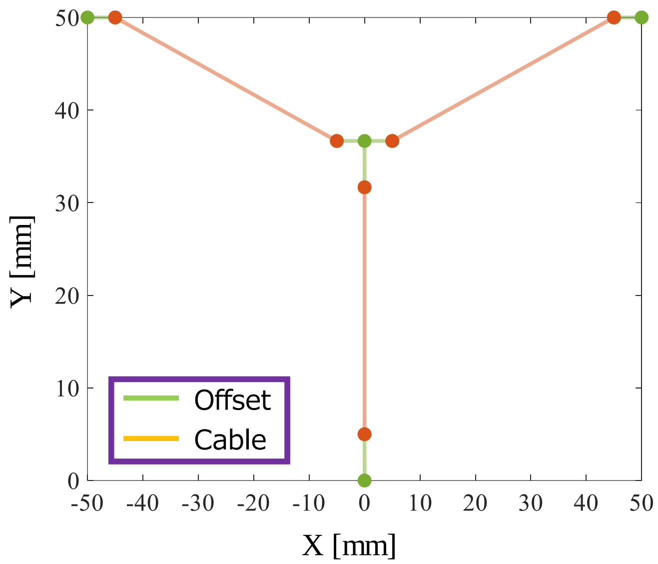


図 5　ケーブル構造の解析結果

4.　ケーブルネットワーク構造の最適設計

4.1.　ケーブルネットワーク構造の最適化問題の定式化

ケーブルネットワーク構造の設計要件として，要求する鏡面精度を満たすように鏡面を設計することが挙げられる．また，金属メッシュに張力を付与するための十分なケーブル張力が必要とされる一方で，展開支持構造の軽量化の観点から各ケーブルの低張力化が要求される．これらの設計要件を満たすように，ケーブルネットワーク構造の最適設計法を確立する．そこで，軸力密度を設計変数とするケーブルネットワーク構造の最適設計問題を，制約付き最適化問題 [5]として次式で定義する．

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{T}_{i} \geq \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{min,i}}\,, i = 1, \cdots, m \tag{7}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{E}} \\ \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{E}} \\ \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{E}} \end{pmatrix} \tag{8}$$

ただし，$\boldsymbol{T}$ はケーブルの軸力ベクトル，$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{E}}$，$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{E}}$，$\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{E}}$は各自由点座標がパラボラ面上になるように設定した理想的な自由点座標である．また，i は部材番号を示している．上式の最適化問題に定式化することで，要求する鏡面精度と各ケーブルの最小張力を満たし，かつ，ケーブルネットワーク構造の張力を均一にすることが出来る．本研究では，サーフェスケーブルとバックケーブルの最小張力が 2 N 以上となるように下限の制約を設定した．最適化アルゴリズムは内点法を使用し，Matlab のサブルーチンである fmincon を使用した．

This document is provided by JAXA.

4.2.　ケーブルネットワーク構造の最適化結果

ケーブルネットワーク構造の最適設計を評価するために，表 2 と図 6 で示されるような解析モデルを作成した．バックケーブルの構成はサーフェスケーブルと同じ構成となっている．また，図 6 の●はケーブルネットワーク構造の固定点である．ケーブルネットワーク構造の特徴として，幾何学的対称性が挙げられる． 図 7 にケーブルネットワーク構造の 1/6 モジュールを示す．ケーブルネットワーク構造は図 7 に示すモジュールが 6 個連結させた構成となっている．そのため，図 7 に示されるケーブルの部材番号の数だけ，独立な軸力密度の数に制約を設定することで，対称性がある張力解を導出することが出来る．したがって，前節で示した最適化問題の設計変数の数は，サーフェスケーブルとバックケーブルで 10 本，タイケーブルが 5 本となる．

表 2　アンテナの主要諸元

アンテナ開口径	5000 mm
焦点距離	4000 mm
オフセット角	0 deg
ファセット分割数	3

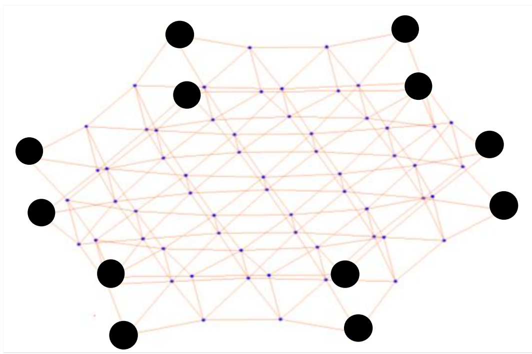
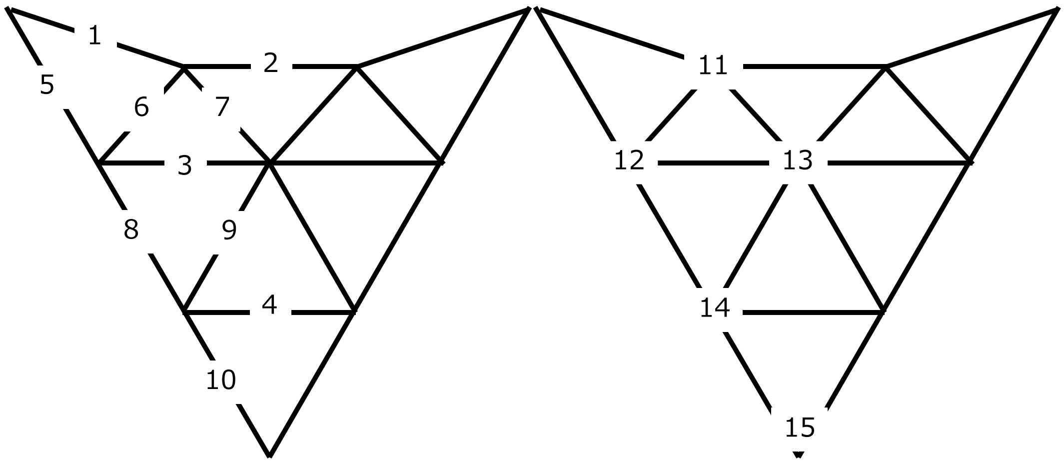


図 6　ケーブルネットワーク構造の解析モデル



(A)　サーフェス・バックケーブル　　(B)　タイケーブル

図 7　軸力密度を指定するのケーブルの配置

This document is provided by JAXA.

図 8 にケーブルネットワーク構造の最適化で得られた張力分布を示す．サーフェスケーブルとバックケーブルの張力の最大値は 22.6 N，最小張力は 2.00 N であった．また，サーフェスケーブルにおける最外周部のケーブルを除いた張力の分散値は，0.139 N であった．したがって，制約条件を満たし，かつ，サーフェスケーブルの張力が均一となる解が得られたと言える．

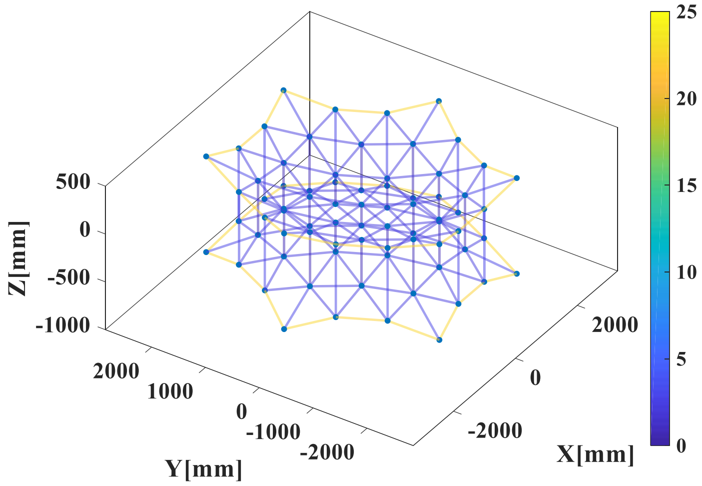


図 8　ケーブルネットワーク構造の張力分布

5.　結言

本稿では，高精度なケーブルネットワーク構造の設計法を確立するために，ノードの付帯条件を考慮した FDM の解析手法を新たに提案した．剛体要素を考慮した FDM の定式化に基づいて，数値解析精度の検証を行った結果，精度の良い数値解析結果を得ることが出来た．提案した解析手法をケーブルネットワーク構造の最適設計問題に定式化することで，要求精度を満たし，均一な張力分布となる解が得ること出来た．以上より，剛体要素を考慮した FDM の定式化はケーブルネットワーク構造の設計をする上で，有効な手段であると言える．

文　　献

[1] Thomson, M. W., "AstroMesh™ Deployable Reflectors for Ku and Ka Band Commercial Satellites," in *20th AIAA International Communication Satellite Systems Conference and Exhibit*, 2002.

[2] 三次　仁, "ケーブル構造の数値解析に関する研究," 1996.

[3] H. -J. Schek, "The Force Density Method for Form Finding and Computation of General Networks," vol. 3, no. 1, pp. 115-134, January 1974.

[4] Tanaka, H., and Natori, M., "Shape Control of Space Antennas Consisting of Cable Networks," *Acta Astronautica,* vol. 55, no. 3-9, pp. 519-527, August-November 2004.

[5] 山川宏, 最適設計ハンドブック一基礎・戦略・応用一, 株式会社朝倉書店, 2003.

This document is provided by JAXA.