

# A12 伸展式構造物のモデル化におけるヒステリシス特性について

仙場淳彦 (名城大), 郁 凱俊 (名城大・院)  
Atsuhiko Senba and Gaishun Iku (Meijo University)

## 1. 序論

次世代の宇宙天文観測を支える大型かつ高精度の伸展式光学架台を実現するためには、軌道上の静的・動的挙動を高精度に予測する技術が不可欠である。特に、伸展式構造物に備わる伸展機構に内在する摩擦やガタの影響によるヒステリシス特性を主とした非線形性を予測可能な非線形数学モデルの同定が重要かつ困難な課題である。

伸展式構造物の中で本稿では、軽量かつ高剛性の伸展式トラス構造を扱う。伸展式トラス構造は、棒部材と伸展機構からなる。棒部材の応力ひずみ関係は、微小変位内を仮定すると線形モデルで扱えることが知られているが、伸展機構の摺動部においては摩擦やガタが存在し、本質的に非線形性を有する。したがって、構造全体としては、局所的に非線形の強い構造と考えることができ、局所非線形性のモデル化が最も重要課題となる。

構造ならびに材料内部のヒステリシス特性を現す数学モデルに関する研究の歴史は長く、これまで多くの研究が報告されている。多くのモデルは、クーロン摩擦要素を含むものである [1]。クーロン摩擦要素を含む場合、最大静止摩擦を超えると要素に滑りが生じることでエネルギー散逸を表現でき、物理的解釈が容易である。しかし、荷重変位関係が不連続関数であるため、摩擦要素を持つ系の運動方程式は摩擦要素に作用する力が最大静止摩擦力より大きい場合分けを必要とする。一方、ヒステリシスループの形状を様々な形にすることのできる Bouc-Wen モデル [2, 3] に代表される微分方程式により表現されるモデルは、クーロン摩擦のような不連続な挙動がなく、運動方程式が一つの微分方程式で表現できる。

以上の背景から、まず非線形性を適切にモデル化することが不可欠な課題であると考えられる。また、その結果得られる数学モデルを、軌道上で必要に応じて更新することを予め念頭に置くと、可能な限り低次のモデルであることが望ましい。そこで本稿では、従来提案されているヒステリシスモデルの数値解析による比較を行うことにより、各モデルの特性を把握し、後述する伸展式トラスモデルの実験データを考察することにより、伸展式構造物のモデル化に関する基礎的知見を得ることを目的とする。

## 2. 摩擦およびヒステリシスモデル

ここでは、1 自由度振動系の数値解析を通して、伸展機構のモデル化を行うための基本的方針を得るため、Fig. 1 に示す三つのモデルを比較する。モデル 1 は、線形バネとクーロン摩擦（乾燥摩擦）要素の並列結合モデルであり、その運動方程式は次式で表される。

$$x = \text{const.}, \quad \text{for} \quad |f - (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)| < c_F \quad (1)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + F_c = f, \quad \text{for} \quad |f - (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)| \geq c_F \quad (2)$$

ここで、 $x$  は質点の変位、 $\{\dot{\cdot}\}$  は時間による微分、 $m, c, k$  は質量、減衰係数、バネ定数、 $F_c$  は摩擦力、 $f$  は外力である。また、運動方程式の場合分けに用いられる  $c_F$  は最大静止摩擦力であり、次式のように、符号関数、 $\text{sgn}$  を用いて、速度  $\dot{x}$  の符号により、以下のように定義される。

$$F_c = c_F \text{sgn}(\dot{x}) \quad (3)$$

次に、モデル 2 は、線形バネといわゆる Jenkins 要素（線形バネとクーロン摩擦要素の直列結合）の並列結合モデルであり、運動方程式は次式で表される。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = f, \quad \text{for} \quad |k_2x| < c_F \quad (4)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + F_c = f, \quad \text{for} \quad |k_2x| \geq c_F \quad (5)$$

ここでも運動方程式の場合分けは最大静止摩擦力によりなされる。両モデルも、変位と共にエネルギー散逸があり、非線形減衰特性を生じるため摺動部のモデル化に利用できる可能性を持つ。一方、モデル 3 は、ヒステリシス特性を微分方程式で表した Bouc-Wen モデル [2] であり、エネルギー散逸は、次式のような内部変数  $z$  の微分方程式から生じるヒステリシスループにより定義される。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + z = f, \quad (6)$$

$$\dot{z} = A\dot{x} - \beta\dot{x}|z|^n - \gamma z|\dot{x}|z^{n-1} \quad (7)$$

ここで、内部変数  $z$  に関する微分方程式の各項の係数  $A, \beta, \gamma, n$  は、実験による得られたヒステリシス特性に基づき適切に決定する必要がある [4]。

上記のように、モデル1とモデル2では、振動系のエネルギー散逸は、粘性減衰によるものと、クーロン摩擦要素での滑りが生じた場合の摩擦力と変位の積による外部への仕事の和と考えられるのに対し、モデル3の場合には、粘性減衰以外のエネルギー散逸の物理的解釈は容易にできない特徴がある。しかしながら、係数の調整次第で様々なヒステリシス特性の表現しうる点で他の二つのモデルに比べ適応範囲が広い。また、他の二つのモデルの場合、伸展式構造物の伸展機構が多数存在する場合に、 $c_F$  の決定方法は、別途検討する必要がある。

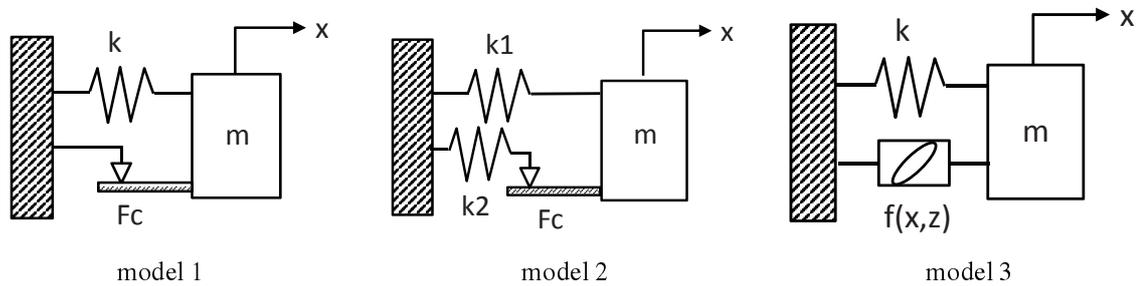


Fig 1: Three different hysteresis models: model 1; model 2 and model 3.

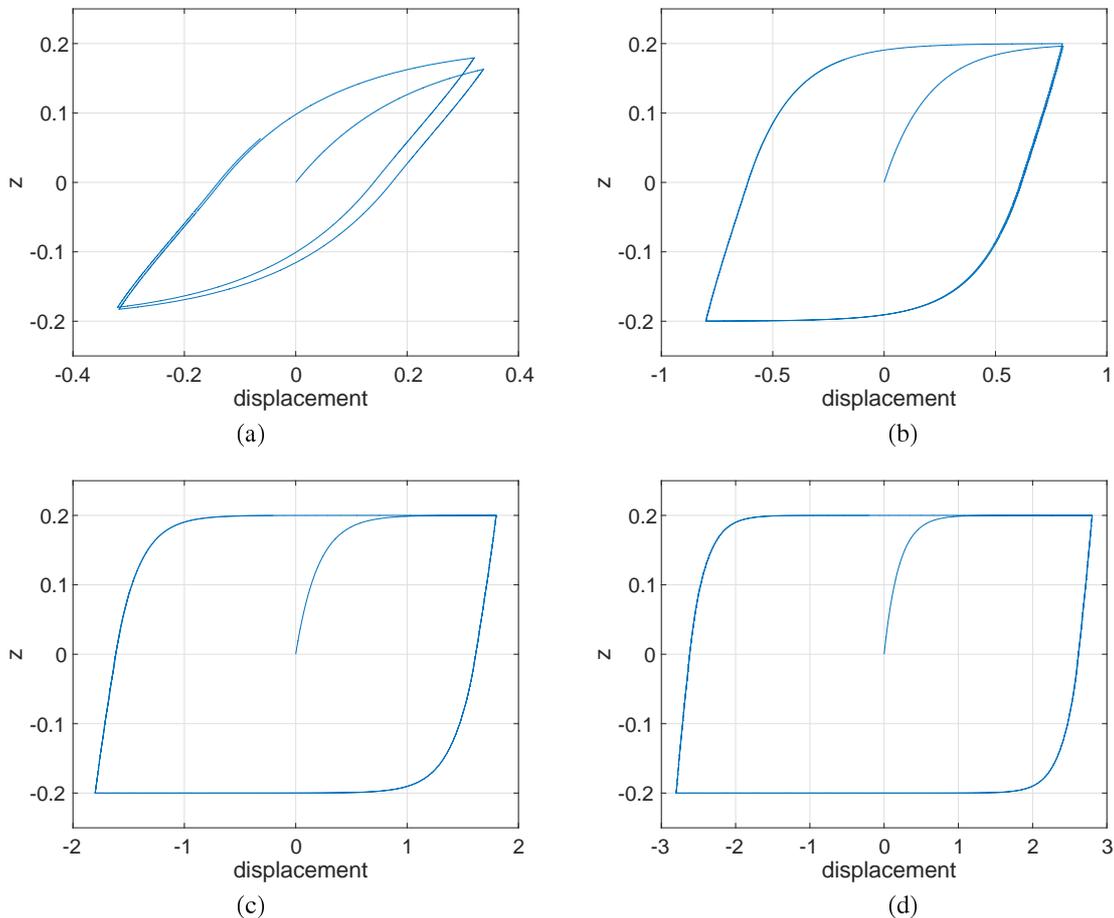


Fig 2: Hysteresis loops for the model 3 for different loads: (a)  $f=0.5$ ; (b)  $f=1$ ; (c)  $f=2$ ; (d)  $f=3$ .

### 3. 数値解析

前節で示した三つのヒステリシス表現可能な1自由度系の振動応答を解析する。各モデルの微分方程式の解析には、汎用ソフト Matlab (ODE 関数) を用いた。

各モデルの応答を比較のため、パラメータを以下のように設定した。まず各モデルの線形部分については、 $m = 1$ ,  $c = 0$ ,  $k = 1$ ,  $k_1 = k_2 = 1$  とした。またモデル1とモデル2の最大静止摩擦力は、 $c_F = 0.2$  とした。モデル3の

Bouc-Wen モデル要素の各係数は,  $A = 1, \beta = 2, \gamma = 3, n = 1$ . 以上のような設定において, モデル1とモデル2は, 摩擦要素が滑るときに等しいバネ定数となり, モデル3の線形部分のバネ定数も等しい. 粘性減衰は, 今回の解析では全てないものとしているが, ヒステリシス特性により全てのモデルで減衰が生じる.

まず, モデル1とモデル2に比較し, 直感的にヒステリシス特性を把握できないモデル3について, Fig. 2 (a)-(d) にヒステリシスループを示す. 荷重は系の慣性力の影響はないと考えられる程度のひずみ速度とした. Fig. 2 (a)-(d) の各図から, 荷重を増加させるに従いヒステリシスループに囲まれた面積が大きくなっていることがわかる. このことは, 系の振幅が増加するにつれ, エネルギー散逸が連続的に増加することを示している.

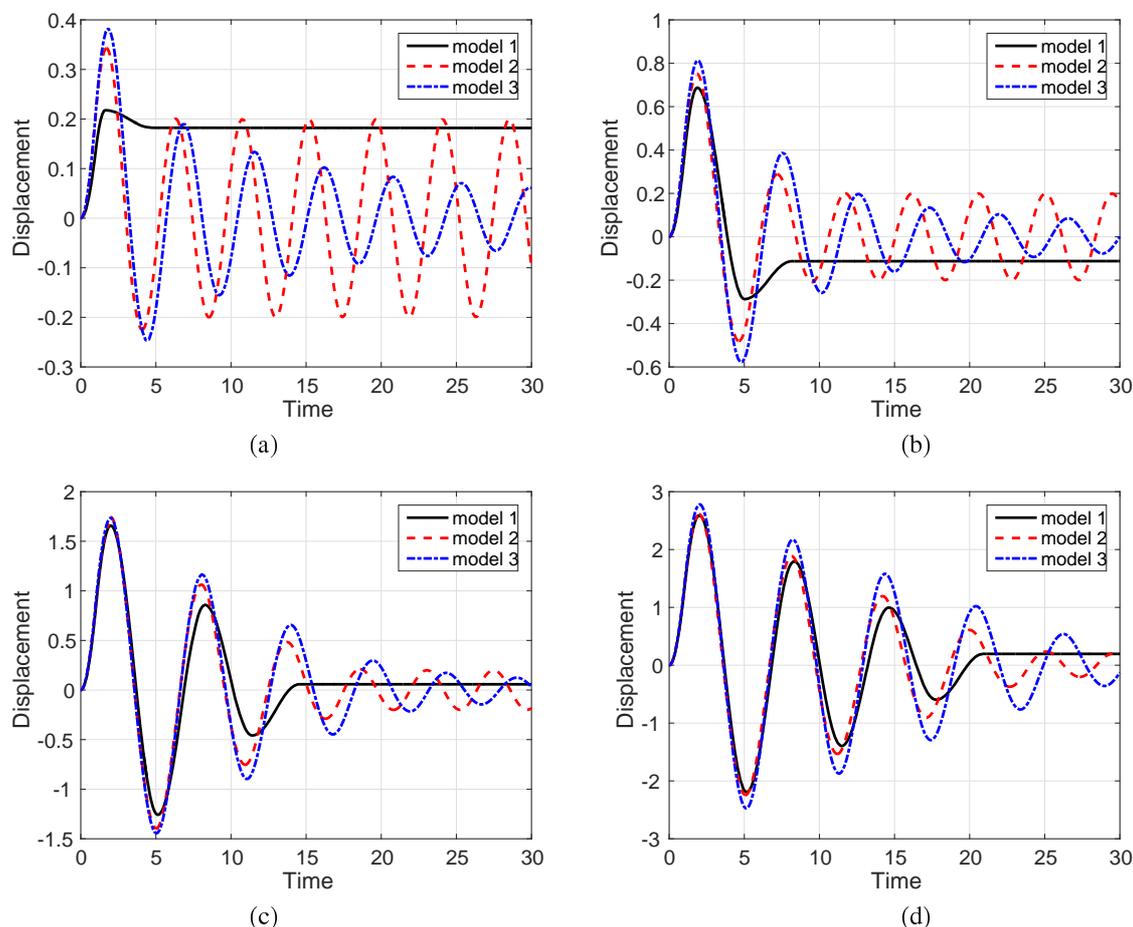


Fig 3: Free vibration responses for the three different hysteresis models and different loads: (a)  $f=0.5$ ; (b)  $f=1$ ; (c)  $f=2$ ; (d)  $f=3$ .

### 3.1 振動応答の解析結果

Fig. 3 に上記三つのモデルの自由振動応答を示す. 解析の初期条件として,  $x = \dot{x} = 0$  とし, 各モデルとも  $t = 0$  から  $t = 1$  まで4通りの定荷重 ( $f = 0.5, 1, 2, 3$ ) を与えた後, 除荷し, その後, 自由振動するものである.

まず各モデルの残留変位と減衰特性を比較する. Fig. 3 (a)-(d) に示されたように, モデル1, すなわちクーロン摩擦要素と線形バネの並列モデルのみに残留変位が生じた. 同じクーロン摩擦要素が含まれるモデル2では, 摩擦要素の存在により減衰振動が生じる時間があるが, 振幅が小さくなると摩擦要素の滑りがロックされ, 不減衰振動となるため, Fig. 3 (a)-(d) のいずれの結果も途中から減衰が極端に小さくなり, 振幅が0.2に近づくのみで残留変位が生じないことができないことが確認された. 一方, Fig. 3 (a)-(d) において, モデル1の残留変位の大きさとその符号は荷重ごとに異なる値であることが示された. また, モデル3の応答も同様に残留変位が生じないが, モデル2のように一定の振幅になる時間帯はなかった. モデル3では, クーロン摩擦はないが, Eq. (7) の内部ヒステリシスにより, 減衰波形となった.

モデル3の残留変位が生じなかった理由として, Bouc-Wen モデルのヒステリシス特性が挙げられる. Bouc-Wen モデルの特性の一つとして, Fig. 2 に示されたように, 振幅が小さいほどヒステリシス (閉ループ面積) が小さくなる特性があり, このため, 振動初期段階の方が減衰が大きい. したがって, 時間が経過するにつれヒステリシスの影響が小さくなるため, モデル1のように残留変位が生じなかったものと考えられる.

次に各モデルの振幅と振動数に関して比較する。振動初期の応答は各モデルのバネ定数を等しく設定しているため定荷重が作用する  $0 \leq t \leq 1$  において動的応答は似ている。モデル2とモデル3は、振幅が大きい範囲で類似した波形となったが、Fig. 3(d)のように、振幅が小さくなるとモデル2とモデル3の振動数が異なり、モデル3の方が振動数が小さいことが明らかとなった。

以上から、実際の伸展式構造物のモデル化において、残留変位を表せるモデルが必要である場合、モデル2またはモデル3では十分ではなく、モデル1の特性を含むようなモデル化を行う必要がある。



Fig 4: Truss model for experiment.

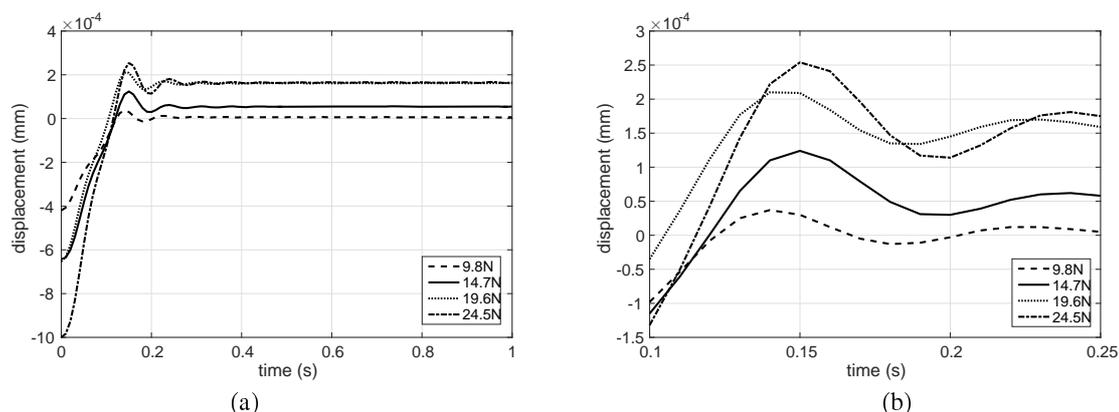


Fig 5: Free vibration data after unloading by the weight of water: (a) vibration data; (b) data for the time from  $t=0.05$  (s) to  $0.15$  (s)

## 4. 伸展式トラスモデル実験

### 4.1 実験モデルと内容

Fig. 4 にヒステリシス特性を調べるための基礎実験に用いるトラスモデルを示す。本モデルは、アルミ合金部材とチタン合金製ピンからなり、斜め材には 1mm のステンレスワイヤーに張力を与えている。トラスの三つの横部材はヒンジのない正三角形一体部材であり、アルミ合金を加工して製作されている。また縦部材は計 6 本あり、横部材とチタン合金のピンで結合している。本モデルのヒステリシス特性が生じると考えられる箇所は、ピンとトラス部材の接触部であり、ピン半径方向と軸方向の 2 方向に存在する。ピン半径方向においては、ピンと縦部材の穴に、意図的に 0.1mm のガタが設けてある。また、ピン軸方向には、三角形部材と縦部材の間に 1 mm 程度のガタを設けてある。

なお、伸展機構によるヒステリシス特性を把握することおよびそのモデル化が本研究の目的ではあるが、トラスモデルには伸展機構は備わっておらず、摺動部は縦部材とピンの半径方向のガタおよびピンの軸方向のガタのみとなる。

Fig. 4 の振動応答を調べるために、今回は、トラスの最上段の三角形部材の頂点付近に糸を介しておもりを吊り下げる方法で初期荷重を与え、糸を切ることにより、その後の自由振動をえ計測した。おもりとして、ペットボトルに入れた水を用いており、9.8 N、14.7 N、19.6 N、24.5 N の計 4 通りの荷重に対する振動応答を調べた。本実験では、自由振動後に残留変位が生じることが分かっており、今回の計測においては、小さい荷重から順次調べた。この際、前の実験で生じた残留変位を残したまま、次の荷重を負荷した。

## 4.2 結果と考察

Fig. 5 はトラスの上段に与えた荷重を除いた後の自由振動応答である。まず減衰が大きいことが明らかであり、各アルミ合金部材内部の減衰が大きいと考えられることから、エネルギー散逸のほとんどはピン部の摩擦によるものと考えられる。また、荷重の大きさにより初期の振幅が変化していることがわかるが、線形でないことが示された。特に、14.7N と 19.6N の各応答では初期の振幅に差がほとんどなく、他の荷重との差が明確であった。また、振動が収束した後の残留変位が明らかに存在し、その大きさについては、9.8N の場合ほとんど残留変位がなかったが、その他の三つの荷重では明らかに存在し、19.6N と 24.5N の両データの残留変位は近い値となった。加えて、荷重が大きくなるにつれ、振動の平衡点（基線）が初期の変位ゼロの点から変位が正の側に移動した。本実験結果の再現性はこれまで十分に考察できておらず、実験初期のトラスの状態をどのように管理するかについても検討の余地が残る。

以上の結果は、トラスモデルの様々な非線形性を表すものであり、前節までに示したヒステリシスモデルで表しうる特性と表すことのできないものに分けられる。まず減衰特性については、上述のいずれのモデルも変数の設定次第で表現できる。また、残留変位についてはクーロン摩擦要素のあるモデル 1 で解析結果に示されたような残留変位が表せる。一方、振動平衡点の移動については、今回の 3 モデルではいずれも表せない。従って、この点についてのみは、少なくともモデルの変更が必要であり、実験をさらに行う必要もあると考えられる。

## 5. 結論

伸展式構造物の中で伸展式トラスを用いた光学架台に着目して、その高精度な挙動を予測可能な数学モデルの同定の第一段階として、三つの異なる 1 自由度ヒステリシスモデルの特性を比較した。また、簡易なトラス実験モデルにより、摺動部において局所的に存在する非線形性が振動応答に与える影響に関して基礎的データを取得し、ヒステリシスモデルで表現しうる非線形性とそうでないものが存在する実験結果となることが明らかになった。

今後は、実験的検討をまず進め、摺動部で発生する各種の非線形性を詳細に把握すると共に、できるだけ低次の数学モデルでそれらの挙動を表現することを目的とした数学モデル同定のプロセス確立を行っていく予定である。

## 謝辞

本研究は、H28 年度 JAXA 戦略的開発研究費“大型高精度光学架台の研究”、および、JSPS 科研費（26249131）の助成を受けて行われた。

## 参考文献

- [1] Iwan, W. D., “A Distributed-Element Model for Hysteresis and Its Steady-State Dynamic Response,” ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, 1966, pp. 893–900.
- [2] Bouc, R., “Froced Vibration of Mechanical Systems with Hysteresis,” Proc. of the fourth conference on non-linear oscillation, Prague, Czechoslovakia, 1967.
- [3] Wen, Y. K., “Method for Random Vibration of Hysteretic Systems,” Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 102(2), 1976, pp. 249–263.
- [4] Ismail, M., Ikhouane, F., and Rodellar, J., “The Hysteresis Bouc-Wen Model, a Survey,” Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 16, 2009, pp. 161–188.