A5　コンベックステープの巻き付け時の変形の理論解
Analytical Solution of Deformation of Rolled-up Convex Tape

宮崎 康行（日大），村田 亮（日大・院），井上 翔太（日大・学），鈴江隼太（日大・学）
Yasuyuki Miyazaki, Ryo Murata, Shota Inoue, and Hayata Suzue (Nihon University)

1. はじめに

この数十年の間，大型宇宙構造物の研究が盛んに行われてきているが，実現したものは，膨大なコストをかけて 100m 級のトラス構造を構築した国際宇宙ステーションくらいであり，ゴッサマー構造で世界初のソーラーセイルを 2010 年に成功させた JAXA の IKAROS も，そのサイズは 20m である．これに対し，例えば太陽発電衛星を例にとると，発電･送電用装置を含めてわずか数 kg/m^2 で十分な剛性を確保しつつ数 km 四方の大型面構造物を構築することを前提としており，従来技術ではその実現性は未だ極めて低い．これは，①現状の打ち上げ機で輸送可能，すなわち，収納性に優れていること，②必要最小限のエネルギで展開（組立）が可能であること，③必要十分な比剛性を有していること，といった条件を満たす構造／構造部材が見出されていないことによる．

これに対し，最近，コンベックステープを二本合わせたバイコンベックス構造による，収納性に優れ，かつ，比剛性の高い自己伸展ブームが渡邊らによって提案されている[1]（図 1）．

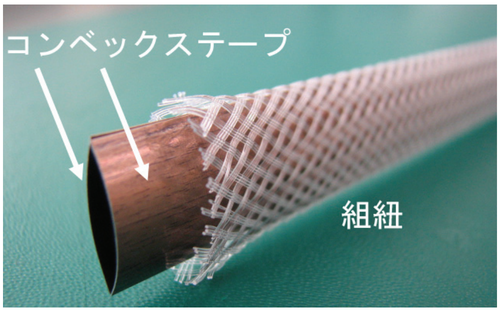
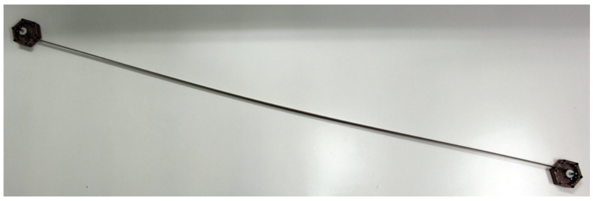
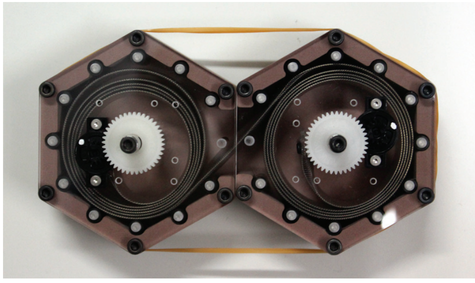


図 1　BCON ブーム

このブームは巻き付け収納時の内外周差を 2 つのテープのすべりによって吸収し，かつ，全体を組紐で覆うことで伸展時等に両者が離れずに常に接触し合うようにしたもので，組紐被覆伸展構造物 Braid Coated Bi-Convex（以下 BCON）ブームと呼ばれている．そして，この BCON ブームの両端をそれぞれ逆方向に巻き付け収納することで，内外周差を打ち消し合うことで，収納性と自己伸展性を向上させたトラス部材が提案されている．図 2 にその一例として，収納部（ノード）が 2 つで BCON ブームが 1 本の BCON 部材（以下，2N1B と呼ぶ）の試作モデルを示す．また，これを組み合わせた 3N3B, 7N12B の BCON 展開トラスの試作モデル例を図 3 に示す．

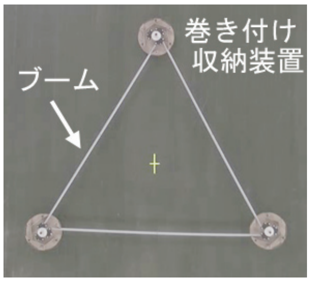


(a) 伸展時

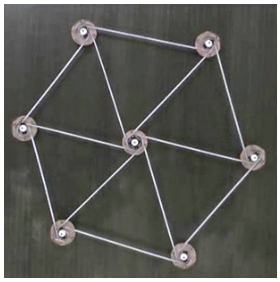


(b) 収納時

図 2　2N1B の BCON 部材



(a) 3N3B モデル



(b) 7N12B モデル

図 3　BCON トラス

このような伸展トラスの展開ダイナミクスや展開後の変形解析を行うためには，BCON ブームをある曲率で曲げた時にブームに蓄えられる歪エネルギや，曲げるために必要な曲げモーメント等を定式化する必要がある．

また，これとは別に，最近，小型衛星用のデオービットシステムとして，コンベックステープと膜面とを組み合わせた図 4 のような自己展開構造が多くの研究者により提案されてきている[2][3].

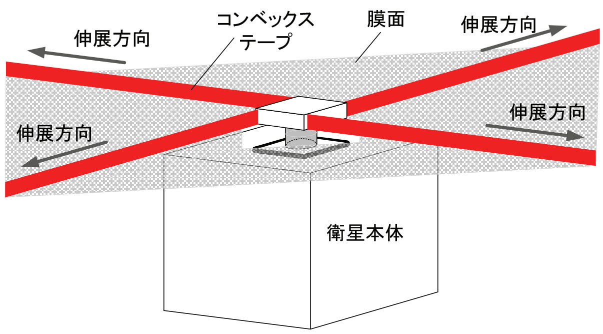


図 4　デオービット膜展開構造

このように，コンベックステープを用いた自己伸展構造は今後，構造部材として実利用されてゆくものと考えられる．そこで本小論では，コンベックステープ，あるいは，BCON ブームを曲げた際の断面の変形を「円弧状＋微小変形」と仮定し，仮想仕事の原理により平衡方程式を導出し，それを解くことで変形形状，歪エネルギ，曲げモーメント，自己伸展力等を導出する．

2. コンベックステープの巻き付け変形

BCON ブームの変形を解く前に，ここでは一枚のコンベックステープの変形を解く．この解を組み合わせることで，次章で BCON ブームの変形を解くこととする．

2.1. 変形形状

まず，変形前のテープの形状を図 5(a)の通りとする．すなわち，テープの厚さをh，凸形状を半径R，内角αの円弧とする．また，図のように円弧に沿ってx軸，テープの長手方向にy軸，円弧の半径方向で中心に向かう向きにz軸を埋め込み，これらの座標軸に沿った単位方向ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{E}_x = \boldsymbol{E}_x(x)$，$\boldsymbol{E}_y$，$\boldsymbol{E}_z = \boldsymbol{E}_z(x)$とおくと，

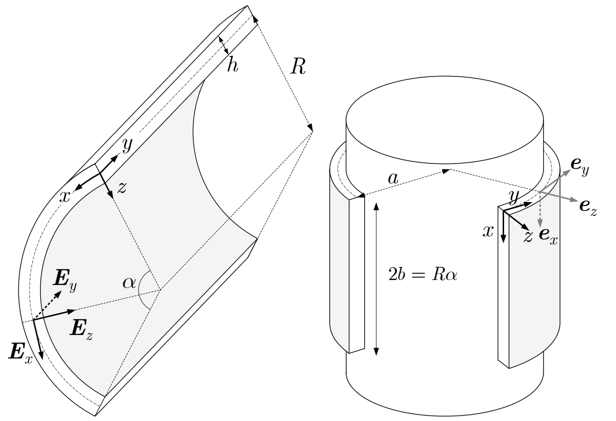
$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_x(x) = \cos\dfrac{x}{R}\boldsymbol{E}_x(0) + \sin\dfrac{x}{R}\boldsymbol{E}_z(0) \\ \boldsymbol{E}_z(x) = -\sin\dfrac{x}{R}\boldsymbol{E}_x(0) + \cos\dfrac{x}{R}\boldsymbol{E}_z(0) \end{cases} \tag{1}$$

であり，テープ内の任意の点 P の変形前の位置ベクトル$\boldsymbol{X}$は次のように書ける．

$$\boldsymbol{X} = (z - R)\boldsymbol{E}_z(x) + y\boldsymbol{E}_y \tag{2}$$

したがって，共変基底ベクトル$\boldsymbol{G}_x$，$\boldsymbol{G}_y$，$\boldsymbol{G}_z$，および，反変基底ベクトル$\boldsymbol{G}^x$，$\boldsymbol{G}^y$，$\boldsymbol{G}^z$は

$$\begin{cases} \boldsymbol{G}_x = \dfrac{R-z}{R}\boldsymbol{E}_x\ , \quad \boldsymbol{G}_y = \boldsymbol{E}_y\ , \quad \boldsymbol{G}_z = \boldsymbol{E}_z \\ \boldsymbol{G}^x = \dfrac{R}{R-z}\boldsymbol{E}_x\ , \quad \boldsymbol{G}^y = \boldsymbol{E}_y\ , \quad \boldsymbol{G}^z = \boldsymbol{E}_z \end{cases} \tag{3}$$



(a) 変形前　　　　　　(b) 変形後
図 5　コンベックステープの巻き付け（逆曲げ）

次に，変形後は，図 5(b)のように，曲率半径aの円筒に巻きつけるものとする．図 5(b)において，グレーに塗られている表面は(a)のグレーの表面に対応しており，テープの円弧を逆に折り曲げて円筒に巻きつけることで，円弧が外側に向くようにしている．この曲げ方を以後，「逆曲げ」と呼ぶことにする．これとは逆に，(a)のグレーの部分が内側にくるように曲げて円筒に巻きつける曲げ方は「順曲げ」と呼ぶことにする．

このとき，埋め込み座標x，y，zはそれぞれ図 5(b)に示すような方向を向くことになる．そして，それらの座標軸に沿った単位方向ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y(y)$，$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z(y)$とすると，

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_y(y) = -\sin\dfrac{y}{a}\boldsymbol{e}_z(0) + \cos\dfrac{y}{a}\boldsymbol{e}_y(0) \\ \boldsymbol{e}_z(y) = \cos\dfrac{y}{a}\boldsymbol{e}_z(0) + \sin\dfrac{y}{a}\boldsymbol{e}_y(0) \end{cases} \tag{4}$$

ここで，図 5(b)は，テープが円筒に沿って変形したと仮定した図になっているが，実際にはこの状態からさらに微小変位を起こすはずで，中心軸（$z=0$）でのそれぞれの方向の変位を$u = u(x)$，$v = v(y)$，$w = w(x)$とする．このとき，中心軸上の点の位置ベクトル$\boldsymbol{x}_o$は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_o = {} & [x + u(x)]\boldsymbol{e}_x + v(y)\boldsymbol{e}_y(y) \\ & + [a + w(x)]\boldsymbol{e}_z(y) \end{aligned} \tag{5}$$

これより，中央面のx軸およびy軸方向の接線ベクトルはそれぞれ次のようになる．ただし，ダッシュはxでの微分を，ドットはyでの微分を表す．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{x}_o}{\partial x} = (1 + u')\boldsymbol{e}_x + w'\boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{x}_o}{\partial y} = \left(1 + \dfrac{w}{a} + \dot{v}\right)\boldsymbol{e}_y - \dfrac{v}{a}\boldsymbol{e}_z \end{cases} \tag{6}$$

ここで，断面はせん断変形しないと仮定すると，

変形後の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_o + z \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{x}_o}{\partial x} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{x}_o}{\partial y}}{\left| \dfrac{\partial \boldsymbol{x}_o}{\partial x} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{x}_o}{\partial y} \right|} \tag{7}$$

と書ける．ここでさらに，変位 u， v， w は微小であると仮定すると，式(5)，(6)より，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= [x + u(x)]\boldsymbol{e}_x + v(y)\boldsymbol{e}_y(y) + [a + w(x)]\boldsymbol{e}_z(y) \\ &\quad + z\left[\boldsymbol{e}_z(y) + \frac{v(y)}{a}\boldsymbol{e}_y(y) - w'\boldsymbol{e}_x\right] \end{aligned} \tag{8}$$

したがって，共変基底ベクトル $\boldsymbol{g}_x$， $\boldsymbol{g}_y$， $\boldsymbol{g}_z$ は

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_x = (1 + u')\boldsymbol{e}_x + w'\boldsymbol{e}_z - zw''\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{g}_y = \left(1 + \dfrac{w}{a} + \dot{v}\right)\boldsymbol{e}_y + \dfrac{z}{a}\boldsymbol{e}_y - \dfrac{v}{a}\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{g}_z = \boldsymbol{e}_3 + \dfrac{v}{a}\boldsymbol{e}_2 - w'\boldsymbol{e}_1 \end{cases} \tag{9}$$

2.2. 変位-歪関係

埋め込み座標系におけるグリーン・ラグランジュ歪 E_{xx}， E_{yy} は次式で与えられる．

$$\begin{cases} E_{xx} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{g}_x \cdot \boldsymbol{g}_x - \boldsymbol{G}_x \cdot \boldsymbol{G}_x) \\ E_{yy} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{g}_y \cdot \boldsymbol{g}_y - \boldsymbol{G}_y \cdot \boldsymbol{G}_y) \end{cases} \tag{10}$$

これに式(3)，(9)を代入し，のちの定式化のため，

$$e_{xx} \equiv \frac{1}{(1 - z / R)^2} E_{xx} \tag{11}$$

と定義すると，微小変形の仮定より，

$$e_{xx} = u' + z\left(\frac{1}{R} - w''\right), \quad E_{yy} = \dot{v} + \frac{w}{a} + \frac{z}{a} \tag{12}$$

2.3. 応力-歪関係

ここではテープを等方性シェルとみなし，正規直交系における第二ピオラ・キルヒホッフ応力 σ^{xx}，σ^{yy} とグリーン・ラグランジュ歪 ε_{xx}， ε_{yy} との関係を次式のように仮定する．

$$\begin{cases} \sigma^{xx} = \dfrac{E}{1 - \nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma^{yy} = \dfrac{E}{1 - \nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \end{cases} \tag{13}$$

ただし， E はヤング率， ν はポアソン比である．このとき，埋め込み座標系における第二ピオラ・キルヒホッフ応力 S^{xx}， S^{yy} とグリーン・ラグランジュ歪 E_{xx}， E_{yy} との関係は次式のようになる．

$$\begin{cases} S^{xx} = \dfrac{E}{1 - \nu^2}\left[\dfrac{E_{xx}}{(1 - z / R)^2} + \nu E_{yy}\right]\dfrac{1}{(1 - z / R)^2} \\ S^{yy} = \dfrac{E}{1 - \nu^2}\left[E_{yy} + \nu\dfrac{E_{xx}}{(1 - z / R)^2}\right] \end{cases} \tag{14}$$

ここで，表記を簡潔にするため，

$$s^{xx} = S^{xx}(1 - z / R)^2 \tag{15}$$

と定義し，式(11)を用いると，式(14)より，

$$\begin{cases} s^{xx} = \dfrac{E}{1 - \nu^2}(e_{xx} + \nu E_{yy}) \\ S^{yy} = \dfrac{E}{1 - \nu^2}(E_{yy} + \nu e_{xx}) \end{cases} \tag{16}$$

2.4. 仮想仕事の原理

式(12)より，仮想歪は次のように書ける．

$$\delta e_{xx} = \delta u' - z\delta w'', \quad \delta E_{yy} = \delta\dot{v} + \frac{1}{a}\delta w \tag{17}$$

ここで，テープに作用する x， z 方向の体積力をそれぞれ q_x， q_z とすれば，仮想仕事の原理は

$$\iiint_V f\left|(\boldsymbol{G}_x \times \boldsymbol{G}_y) \cdot \boldsymbol{G}_z\right| dxdydz = 0 \tag{18}$$

と書ける．ただし，

$$\begin{aligned} f &= S^{xx}\delta E_{xx} + S^{yy}\delta E_{yy} - q_x\delta u - q_z\delta w \\ &= s^{xx}\delta e_{xx} + S^{yy}\delta E_{yy} - q_x\delta u - q_z\delta w \end{aligned} \tag{19}$$

であり，V はテープ全体の領域を表す. 式(3)より，

$$(\boldsymbol{G}_x \times \boldsymbol{G}_y) \cdot \boldsymbol{G}_z = \frac{R - z}{R} \tag{20}$$

となる．ここで，テープの長さを ℓ とし，テープの幅の半分を b とする（図 5(b)）．すなわち，

$$b = R\alpha / 2 \tag{21}$$

このとき，式(18)を積分範囲も明示して書くと，

$$\int_{-b}^{b} dx \int_0^{\ell} dy \int_{-h/2}^{h/2} f \frac{R - z}{R} dz = 0 \tag{22}$$

式(22)を部分積分して整理すると，式(23)を得る．この式から，平衡方程式や，与えるべき境界条件が導かれることになる．ただし，その前に，次の 2.5 節では，後節で必要となる合応力を定義するし，2.6 節で平衡方程式を，2.7 節で境界条件を与えることとする．

$$
\begin{aligned}
&\iint \left[s^{xx} \delta u \right]_{-R\alpha/2}^{R\alpha/2} \frac{R-z}{R} dydz \\
&+\iiint_V \left[-\frac{\partial s^{xx}}{\partial x} - q_x \right] \delta u \frac{R-z}{R} dxdydz \\
&+\iint \left[S^{yy} \delta v \right]_0^{\ell} \frac{R-z}{R} dxdz \\
&+\iiint_V \left[-\frac{\partial S^{yy}}{\partial y} \right] \delta v \frac{R-z}{R} dxdydz \\
&+\iint \left[-z s^{xx} \delta w' \right]_{-b}^{b} \frac{R-z}{R} dydz \\
&+\iint \left[z \frac{\partial s^{xx}}{\partial x} \delta w \right]_{-R\alpha/2}^{R\alpha/2} \frac{R-z}{R} dydz \\
&+\iiint_V \left[-z \frac{\partial^2 s^{xx}}{\partial x^2} + \frac{1}{a} s^{yy} - q_z \right] \frac{R-z}{R} \delta w dxdydz \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

2.5. 合応力の定義

ここでは式(23)に現れるいくつかの合応力を定義する．なお，それら合応力の作用面や方向は図6に示す通りである．

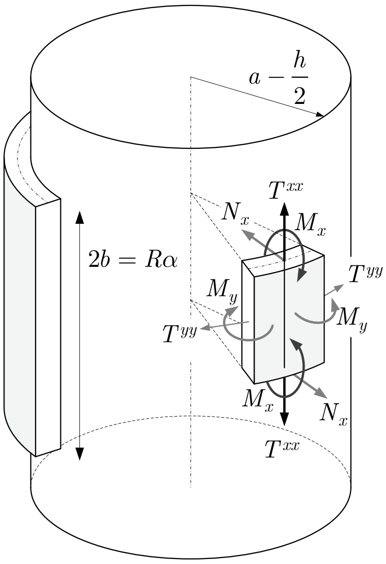


図 6　合応力等の定義

まず，x 断面での単位長さあたりの垂直力 T^{xx} は，

$$T^{xx} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} s^{xx} \frac{R-z}{R} dz \tag{24}$$

同様に，x 断面での合モーメント（単位長さあたりの曲げモーメント）M_x は，

$$M_x \equiv \int_{-h/2}^{h/2} -z s^{xx} \frac{R-z}{R} dz \tag{25}$$

x 断面での単位長さあたりのせん断力 N_x は，

$$N_x \equiv \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial s^{xx}}{\partial x} \frac{R-z}{R} dz \tag{26}$$

y 断面での単位幅あたりの軸力 T^{yy} は，

$$T^{yy} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} S^{yy} \frac{R-z}{R} dz \tag{27}$$

これを x 方向に積分した，y 断面での軸力 F^y は，

$$F^y \equiv \int_{-b}^{b} T^{yy} dx \tag{28}$$

最後に，y 断面での合モーメント（単位幅あたりの曲げモーメント）M_y は，

$$M_y \equiv \int_{-h/2}^{h/2} z S^{yy} \frac{R-z}{R} dz \tag{29}$$

2.6. 平衡方程式

式(23)より，x，y，z の各方向の平衡方程式は，

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\partial s^{xx}}{\partial x} + q_x \right] \frac{R-z}{R} dz = 0 \tag{30}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{\partial S^{yy}}{\partial y} \right] \frac{R-z}{R} dz = 0 \tag{31}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left[-z \frac{\partial^2 s^{xx}}{\partial x^2} + \frac{1}{a} S^{yy} - q_z \right] \frac{R-z}{R} dz = 0 \tag{32}$$

本小論では，体積力は作用しないと仮定する，すなわち，

$$q_x = q_z = 0 \tag{33}$$

とする．つまり，円筒に押し付けて巻きつけるのではなく，半径 a の円弧状に曲げるものとする（例えば，テープを引張ながら円筒に押し付けて巻いた場合には q_z は 0 にはならない）．

式(30), (32)に(24), (33)を代入し，また，式(16), (12)から，式(31)において $\partial S^{yy} / \partial y$ が z に依存しないことを考慮すると，平衡方程式は次式のように書けることがわかる．

$$\frac{\partial T^{xx}}{\partial x} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial S^{yy}}{\partial y} = 0 \tag{35}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left[-z \frac{\partial^2 s^{xx}}{\partial x^2} + \frac{1}{a} S^{yy} \right] \frac{R-z}{R} dz = 0 \tag{36}$$

2.7. 境界条件

テープのエッジには外力は作用していないとし，$x = \pm b$ での境界条件を以下のように与える．

$$T^{xx}(\pm b) = 0 \tag{37}$$

$$M_x(\pm b) = 0\,, \quad N_x(\pm b) = 0 \tag{38}$$

2.8. 変形解

平衡方程式(34)と境界条件(37)より，常に

$$T^{xx}=0 \tag{39}$$

またし，式(35)（と(12)，(14)）より，$\dot{v}$は一定であることがわかるので，

$$\dot{v}=\varepsilon_{yo} \tag{40}$$

とすれば，式(39)より，次式を得る．

$$u'=-\nu\varepsilon_{yo}-\nu\frac{w}{a}+\frac{h^2}{12R}\left[\frac{1}{R}-w''+\nu\frac{1}{a}\right] \tag{41}$$

これを用いて平衡方程式(36)を整理すると，

$$w_o\equiv\frac{h^2}{12R}-\varepsilon_{yo}a \tag{42}$$

$$\beta\equiv\sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{1-\dfrac{h^2}{12R^2}}}\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{ah}} \tag{43}$$

として，次式のようになる．

$$w''''+\left(\frac{\beta}{b}\right)^4(w-w_o)=0 \tag{44}$$

この式を，$x=0$に関する変形の対称性を考慮して解くと，一般解は，C_1，C_2を積分定数として，

$$w=w_o+C_1\cos\frac{\alpha x}{b}+C_2\cos\frac{i\alpha x}{b} \tag{45}$$

となる．ただし

$$\alpha=\sqrt{i}\beta \tag{46}$$

である. また, 式(41)を式(25), (26)に代入すると，x軸まわりの曲げモーメントM_xおよびx断面でのせん断力は,

$$D\equiv\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{47}$$

として,

$$\begin{cases} M_x=-D\left(1-\dfrac{h^2}{12R^2}\right)\left[\dfrac{1}{R}-w''+\nu\dfrac{1}{a}\right] \\ N_x=D\left(1-\dfrac{h^2}{12R^2}\right)w''' \end{cases} \tag{48}$$

となり，境界条件(38)より，次式を得る．

$$w''(b)=\frac{1}{R}+\nu\frac{1}{a},\quad w'''(b)=0 \tag{49}$$

これらに式(45)を適用すると，積分定数が

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{i\sin i\alpha}{\sin\alpha\cos i\alpha-i\cos\alpha\sin i\alpha}\left(\dfrac{b}{\alpha}\right)^2\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{\nu}{a}\right) \\ C_2=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos i\alpha-i\cos\alpha\sin i\alpha}\left(\dfrac{b}{\alpha}\right)^2\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{\nu}{a}\right) \end{cases} \tag{50}$$

と求まり，これを式(45)に代入して整理すると，

$$\eta\equiv\sqrt{2}\beta \tag{51}$$

として，次式を得る．

$$\begin{aligned} w=w_o-4b^2\left(\frac{1}{R}+\frac{\nu}{a}\right)&\frac{1}{\eta^2(\sinh\eta+\sin\eta)}\times \\ &\left[\left(\sin\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2}-\sinh\frac{\eta}{2}\cos\frac{\eta}{2}\right)\cosh\frac{\eta x}{2b}\cos\frac{\eta x}{2b}\right. \\ &\left.-\left(\sin\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2}+\sinh\frac{\eta}{2}\cos\frac{\eta}{2}\right)\sinh\frac{\eta x}{2b}\sin\frac{\eta x}{2b}\right] \end{aligned} \tag{52}$$

なお，式(28)を計算すると，

$$F^y=0 \tag{53}$$

つまり，周方向（y方向）の軸力は0となる．詳細は省くが，これは面外の分布外力q_zを0としていることによる．別の言い方をすれば，周方向に張力を作用させるためにはq_zが必要である．また，テープが平均的に半径aで巻き付けられるためには，たわみwのx方向の平均が0，すなわち，

$$\int_{-b}^{b}wdx=0 \tag{54}$$

である必要があり，式(44)，(49)を代入すると，

$$w_o=0 \tag{55}$$

つまり，式(42)より，

$$\varepsilon_{yo}=\frac{h^2}{12aR} \tag{56}$$

となるように巻きつける必要がある．そこで，以下では式(55)，(56)が成り立つものとする．

2.9. 歪エネルギ

変形後のy方向の単位長さあたりの歪エネルギをπとすれば,

$$\pi=\int_{-b}^{b}dx\int_{-h/2}^{h/2}\frac{1}{2}\left(s^{xx}e_{xx}+S^{yy}E_{yy}\right)\frac{R-z}{R}dz \tag{57}$$

これを部分積分し，境界条件(38)を代入すると，

$$\pi=\frac{1}{2R}\int_x M_xdx+\frac{1}{2a}\int_x M_ydx \tag{58}$$

を得る．そこで，

$$\pi_1 \equiv \frac{1}{2R}\int_{-b}^{b} M_x dx\,,\quad \pi_2 \equiv \frac{1}{2a}\int_{-b}^{b} M_y dx \tag{59}$$

と定義すれば，大まかには，π_1 は凸状のテープを平面状に曲げるためのエネルギ，π_2 は平面状になったテープを曲率半径 a で曲げるためのエネルギと理解できる．実際に式(59)を計算すると，

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{A_o}{2}\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{1}{R}+\nu\kappa\right)(1-A_1) \\ \pi_2 = \dfrac{A_o}{2}\left[(1-\nu^2)\kappa^2+\nu\kappa\left(\dfrac{1}{R}+\nu\kappa\right)(1-A_1)\right] \end{cases} \tag{60}$$

ただし，κ は変形後のテープの曲率，すなわち，

$$\kappa = \frac{1}{a} \tag{61}$$

であり，

$$\begin{cases} A_o = 2bD\left(1-\dfrac{h^2}{12R^2}\right) \\ A_1 = \dfrac{2(\cosh\eta-\cos\eta)}{\eta\left(\sinh\eta+\sin\eta\right)} \end{cases} \tag{62}$$

である．A_o はテープが平面状であった場合の単位長さあたりの曲げ剛性である（$2bD$ に余計な項 $(1-h^2/12R^2)$ がかかっているが，もともと $h \ll R$ を仮定して定式化しているので，$(1-h^2/12R^2)\approx 1$ である．ただし，ここでは，計算で求められたものをそのまま記載しておく）．

式(59)，(60)を(58)に代入すると，π が曲率 κ の関数として次式のように求められる．

$$\pi(\kappa) = \frac{A_o}{2}\left[(1-\nu^2)\kappa^2+\left(\frac{1}{R}+\nu\kappa\right)^2(1-A_1)\right] \tag{63}$$

2.10. 等価曲げモーメント

テープを梁とみなした場合，曲率 κ で曲げるのに必要な曲げモーメントは

$$M = \frac{\partial\pi}{\partial\kappa} \tag{64}$$

で求められ，実際に式(63)を用いて計算すると，

$$M = A_o\left[(1-\nu^2)\kappa+\nu\left(\frac{1}{R}+\nu\kappa\right)(1-A_1) -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\nu\kappa\right)^2\frac{A_2-A_1}{2\kappa}\right] \tag{65}$$

ただし，

$$A_2 = \frac{4\sinh\eta\sin\eta}{\left(\sinh\eta+\sin\eta\right)^2} \tag{66}$$

2.11. 自己伸展力

テープ全体の歪エネルギを Π とすれば，テープの巻き付けがほどけてゆき，巻き付け長さが ℓ から $\delta\ell$ だけ減少し，その部分が真っ直ぐ伸展する場合には，このときの歪エネルギの減少分は

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\ell}\delta\ell \tag{67}$$

と書ける．この減少分は，自己伸展力 F による仕事に相当し，移動距離が $\delta\ell$ であることから，この仕事は $F\delta\ell$ となる．したがって，

$$F = \frac{\partial\Pi}{\partial\ell} \tag{68}$$

いま，巻き付けがほどける過程で，巻き付けられている部分の曲率は κ のままと仮定すると，

$$\Pi = \pi(\kappa)\ell \tag{69}$$

したがって，式(68)より，

$$F = \pi(\kappa) \tag{70}$$

つまり，自己伸展力 F の値は π と一致する．

$$F = \pi = \frac{A_o}{2}\left[(1-\nu^2)\kappa^2+\left(\frac{1}{R}+\nu\kappa\right)^2(1-A_1)\right] \tag{71}$$

ただし，巻き付けられている部分の曲率がテープの長さ方向（y 方向）に沿って変化する場合（渦巻き状に巻かれている場合など）には式(69)は成り立たず，κ が ℓ と y の関数となるので，

$$\Pi = \int_0^{\ell}\pi(\kappa(y,\ell))dy \tag{72}$$

と表現できる．そして，κ が ℓ と y の関数として与えられれば，式(72)，(63)，(68)を用いて，伸展力 F を求めることができる．

2.12. 計算例

以上の結果を用いて，この節ではコンベックステープの変形について計算例を示し，その特徴について考察する．なお，以下に示す計算例では，文献[4]を参考に，表 1 の値を用いた．

表 1　諸元

R	14mm	E	127GPa
h	0.1mm	ν	0.3
α	1.92rad		

2.12.1. 歪エネルギ，自己伸展力

まず，曲率 κ と単位長さあたりの歪エネルギ（自己伸展力）π との関係は図 7 のようになる．

この図には，π_1（pi_1），π_2（pi_2），π（Total）

と，比較のため，テープが平面状の場合の解

$$\pi_{linear} \equiv \frac{1}{2}A_o\kappa^2 \tag{73}$$

もプロットしてある（Linear）．このグラフからわかる通り，テープの凸形状を平面状にするために大きな歪エネルギ π_1 が蓄えられていることがわかる．その傾向は曲率が小さい，すなわち，曲げ始めに強く，曲率を大きくしてゆく（曲率半径を小さくしてゆく）にしたがって，曲率をつけるための曲げエネルギが相対的に大きくなってゆくことがわかる．また，本小論では逆曲げの際の曲率を正としているので，順曲げの場合には曲率は負であり，このグラフからもわかる通り，やはり，順曲げよりも逆曲げの方が，テープに蓄えられる歪エネルギは大きい．

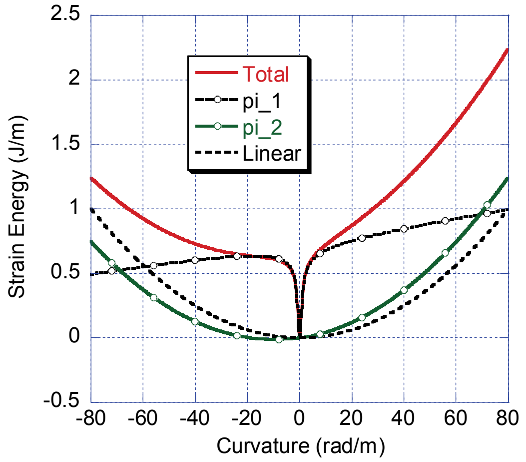


図 7　単位長さあたり歪エネルギ（自己伸展力）

また，自己伸展力という観点でこのグラフを見てみると，コンベックステープの自己伸展力が平面テープに場合に比べて大きいのは，やはり，π_1 の寄与，すなわち，凸状のものを平面状にするためのエネルギによることがわかる．

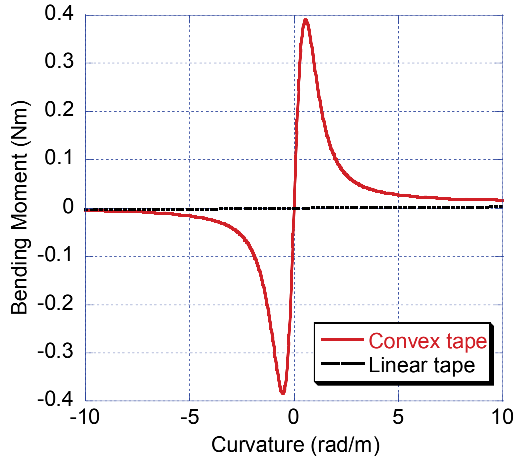
2.12.2. 曲げモーメント

次に，曲率と曲げモーメントとの関係は図 8 のようになる．図 8(a)からもわかる通り，曲げ始め（$\kappa = 0$ 付近）の曲げモーメントは平面テープの場合，すなわち，$M_{linear} = A_o\kappa$ の場合に比べて非常に大きい．ここで，曲げ始めの曲げ剛性 A_{init} は次式のように求められる．

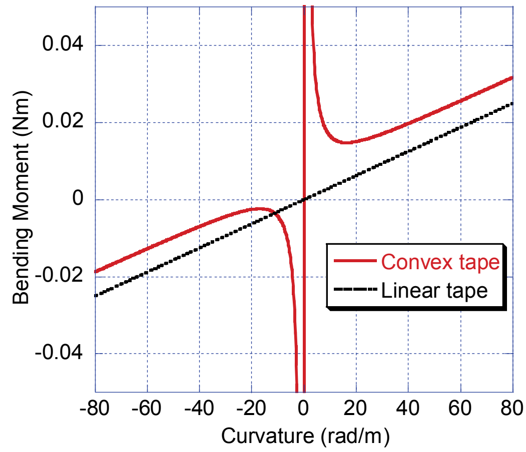
$$A_{init} = \left.\frac{\partial M}{\partial \kappa}\right|_{\kappa=0} = A_o(1-\nu^2) + \frac{2Eb^5h}{45R^2} \tag{74}$$

この式で，最右辺の第一項は平面テープの梁としての曲げ剛性に相当し，第二項は，テープが凸上であることによる剛性増加分を表している．A_o は板厚 h の三乗に比例するのに対し，この第二項は一乗に比例することから，第一項に比べて第二項は極めて大きな値であることがわかる．実際，コンベックステープを曲げようとすると，平面テープと比べて非常に大きな曲げモーメントを必要とすることは日常でも経験することである．

また，図 8(b)からもわかる通り，順曲げよりも逆曲げの方が必要な曲げモーメントが大きい．



(a)　曲げ始め付近



(b)　全体

図 8　曲げモーメント

図 8(b)で特徴的なことは，曲率が大きくなると，一端，曲げモーメントが減少し，その後，再び増加する点である．減少する範囲では，曲げれば曲げるほどモーメントが小さくなる，不安定な状態にあり，いわゆる snap-through が起こることを示している．実際，コンベックステープの両端を図 9 のように手で持って折り曲げると snap-through が起こるし，徐々に曲げてゆくと，ある曲率 κ_s まで曲げたところで準安定な状態で手にかかる負荷が極小となり，それ以上大きな曲率で曲げようとすると，手により負荷がかかるように感じる．

このような準安定な曲率κ_sは，図 8 のような S 次状の曲率-モーメント曲線を図 10 のように横軸に水平な直線で分割した際の 2 つの閉領域の面積S_1とS_2とが等しくなるときの曲率であるとされている[4]．そこで，ここでの計算例で曲げモーメントの式(65)を用いて計算してみると，逆曲げにおいては，

$$\kappa_s \approx 66.90\,, \quad a/R \approx 1.068 \tag{75}$$

となり，純曲げの場合には

$$\kappa_s \approx -68.44\,, \quad a/R \approx -1.044 \tag{76}$$

となった．つまり，逆曲げの場合も順曲げの場合も，コンベックステープの凸形状の曲率（$1/R$）とほぼ同じ曲率で曲げると準安定状態となる．これも，実際にメジャーなどで試してみるとよく経験することである．

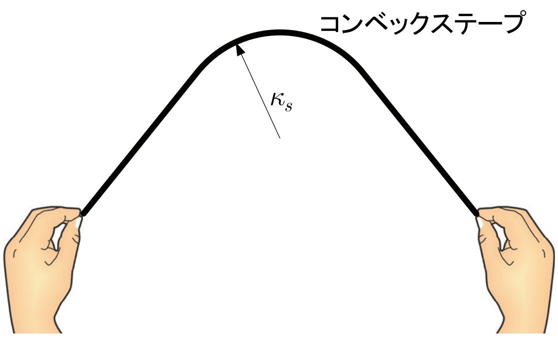


図 9　コンベックステープの折り曲げ

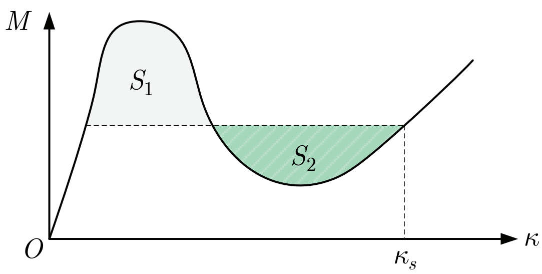


図 10　準安定点

2.12.3. たわみ

準安定点での逆曲げおよび順曲げの際のたわみwの分布は図 11 のようになる．こ逆曲げにおいては，エッジでは半径方向外側に広がる方向に反り，順曲げでは内側に食い込む．これは実際にテープを曲げたときに見られる現象である．
また，$x/b \approx 0.7$から$x/b \approx 0.9$あたりでは，逆曲げでは内側に食い込み，順曲げでは外側に広がることがわかる．次章で述べる通り，この領域は，BCON ブームの巻き付けに置いて 2 枚のテープが接触する領域に対応することとなる．

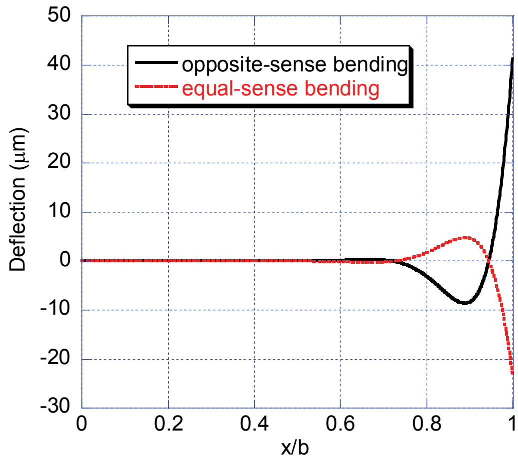


図 11　たわみ分布

3. BCON ブームの巻き付け変形

BCON ブームの変形は，前章で求めたコンベックステープの巻き付け時の変形解において，内側の逆曲げテープと外側の順曲げテープとを合わせればよい（図 12）．そこで，3.1 節では解を導出し，3.2 節では 2.12 節のコンベックステープを 2 枚用いた BCON ブームの変形の計算例を示す．

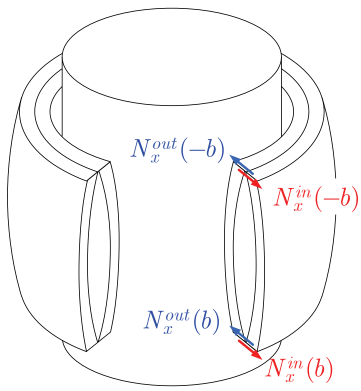


図 12　BCON ブーム

3.1.　解の導出

つまり，前章の結果において，内側，外側のテープの半径をそれぞれ

$$a^{in} = a - \frac{h}{2}\,, \quad a^{out} = a + \frac{h}{2} \tag{77}$$

とする（ただし，これ以降，内側のテープに関する量には添え字「in」を，外側のテープについては「out」を付ける）．式(77)を曲率に直せば，

$$\kappa^{in} = \frac{\kappa}{1 - h\kappa/2}\,, \quad \kappa^{out} = \frac{\kappa}{1 + h\kappa/2} \tag{78}$$

また，境界条件は，式(38)ではなく，お互いのテープがエッジで接触し，せん断力を及ぼしあうことから，以下の通りとなる（図 12）．

$$M_x^{out}(\pm b) = M_x^{in}(\pm b) = 0 \tag{79}$$

$$N_x^{in}(\pm b) + N_x^{out}(\pm b) = 0 \tag{80}$$

$$w^{in}(\pm b) = w^{out}(\pm b) \tag{81}$$

これらの境界条件のもとで解を求めると，以下の通りとなる．すなわち，まず，歪エネルギは

$$\pi^{total} = \pi(\kappa^{in}) + \pi(\kappa^{out}) + \pi_c \tag{82}$$

となる．ただし，π_c は次式で与えられ，逆曲げテープと順曲げテープの相互作用を表す項である．

$$\pi_c = \frac{A_o}{2}\frac{\gamma^2}{b^2}\left[\frac{A_3^{in}}{4(\eta^{in})^4} + \frac{A_3^{out}}{4(\eta^{out})^4}\right] \tag{83}$$

ここで，γ と A_3 は次式で定義される．

$$\gamma \equiv \frac{2b^2 N_x^{in}(b)}{D\left(1 - h^2 / 12R^2\right)} \tag{84}$$

$$A_3 \equiv \frac{\eta(\cosh\eta + \cos\eta)}{\sinh\eta + \sin\eta} \tag{85}$$

また，η^{in}，η^{out} は式(43)，(51)より，次式のように書けることがわかる．

$$\eta^{in} = p\sqrt{2\kappa^{in}}, \quad \eta^{out} = p\sqrt{2\kappa^{in}} \tag{86}$$

$$p \equiv \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{1 - h^2 / 12R^2}}\frac{b}{\sqrt{h}} \tag{87}$$

次に，式(82)を κ で微分することで，BCON ブームの等価曲げモーメントが求まる．すなわち，

$$\begin{aligned} M^{total} &= \frac{1}{(1-h\kappa/2)^2}M(\kappa^{in}) \\ &+ \frac{1}{(1+h\kappa/2)^2}M(\kappa^{out}) + M_c \end{aligned} \tag{88}$$

ただし，

$$\begin{aligned} M_c \equiv \frac{\partial \pi_c}{\partial\kappa} &= 8A_o p^4 \times \\ &\left[\left(\frac{2B_1}{B_2}\frac{\partial B_1}{\partial\kappa} - \frac{{B_1}^2}{{B_2}^2}\frac{\partial B_2}{\partial\kappa}\right)(\kappa^{in})^2 \right. \\ &\left. + \frac{1-h\kappa}{(1-h\kappa/2)^2}\frac{{B_1}^2}{B_2} \times 2\kappa^{in}\right] \end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{cases} B_1 \equiv \dfrac{1}{6}\left[\left(-\dfrac{1}{R} + \nu\kappa^{out}\right)A_4^{out} - \left(\dfrac{1}{R} + \nu\kappa^{in}\right)A_4^{in}\right] \\ B_2 \equiv A_3^{in} + \left(\dfrac{1+h\kappa/2}{1-h\kappa/2}\right)^2 A_3^{out} \end{cases} \tag{90}$$

$$A_4 \equiv \frac{6(\sinh\eta - \sin\eta)}{\eta^2(\sinh\eta + \sin\eta)} \tag{91}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_4}{\partial\kappa} = 2p^2\dfrac{3A_1 - A_4(2 + A_3)}{\eta^2} \\ \dfrac{\partial A_3}{\partial\kappa} = 2p^2\left[\dfrac{A_3(1 - A_3)}{\eta^2} + \dfrac{A_4}{6}\eta^2\right] \end{cases} \tag{92}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B_1}{\partial\kappa} \\ &= \frac{1}{(1+h\kappa/2)^2}\left[\nu A_4^{out} + \left(-\frac{1}{R} + \nu\kappa^{out}\right)\frac{\partial A_4^{out}}{\partial\kappa^{out}}\right] \\ &\quad - \frac{1}{(1-h\kappa/2)^2}\left[\nu A_4^{in} + \left(\frac{1}{R} + \nu\kappa^{in}\right)\frac{\partial A_4^{in}}{\partial\kappa^{in}}\right] \end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_2}{\partial\kappa} &= \frac{1}{(1-h\kappa/2)^2}\frac{\partial A_3^{in}}{\partial\kappa^{in}} \\ &+ \frac{1}{(1-h\kappa/2)^2}\frac{\partial A_3^{out}}{\partial\kappa^{out}} \\ &+ 2h\frac{1+h\kappa/2}{(1-h\kappa/2)^3}A_3^{out} \end{aligned} \tag{94}$$

最後に，たわみは

$$w = \frac{4b}{\eta^3(\sinh\eta + \sin\eta)}\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma \\ b\left(\dfrac{1}{R} + \nu\kappa\right)\end{bmatrix} \tag{95}$$

ただし，

$$\begin{cases} w_1 = \cosh\dfrac{\eta}{2}\cos\dfrac{\eta}{2}\cosh\dfrac{\eta x}{2b}\cos\dfrac{\eta x}{2b} \\ \qquad + \sinh\dfrac{\eta}{2}\sin\dfrac{\eta}{2}\sinh\dfrac{\eta x}{2b}\sin\dfrac{\eta x}{2b} \\ w_2 = \eta\left(\sinh\dfrac{\eta}{2}\cos\dfrac{\eta}{2} - \cosh\dfrac{\eta}{2}\sin\dfrac{\eta}{2}\right) \\ \qquad \times\cosh\dfrac{\eta x}{2b}\cos\dfrac{\eta x}{2b} \\ \qquad + \eta\left(\sinh\dfrac{\eta}{2}\cos\dfrac{\eta}{2} + \cosh\dfrac{\eta}{2}\sin\dfrac{\eta}{2}\right) \\ \qquad \times\sinh\dfrac{\eta x}{2b}\sin\dfrac{\eta x}{2b} \end{cases} \tag{96}$$

3.2. 計算例

まず，単位長さあたりの歪エネルギ（自己伸展力）は図 13 のようになる．当然のことであるが，BCON ブームの場合，逆曲げ，順曲げとも同じ値になる．このグラフには両テープの相互作用を表す項 π_c もプロットしており，両者の相互作用は曲げ始めに特に大きいことがわかる．

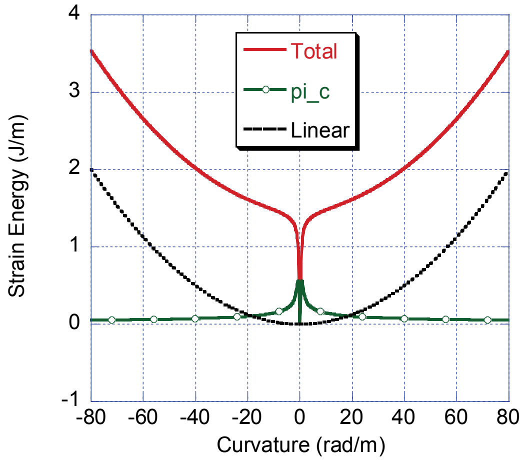
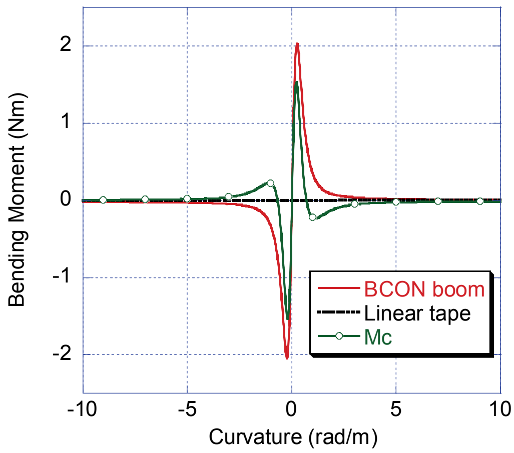
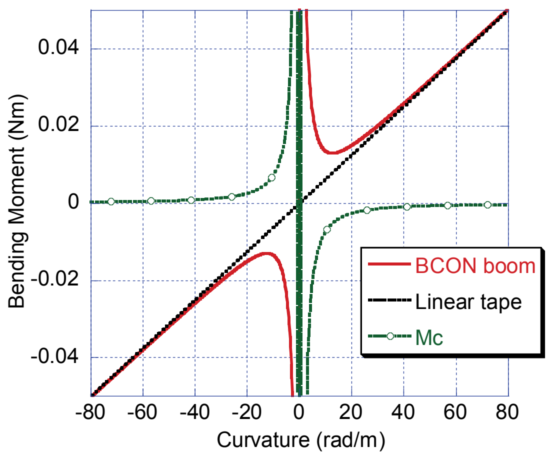


図 13　BCON ブームの歪エネルギ

次に，曲げモーメントは図 14 のようになり，両テープの相互作用を表す M_c は，曲げモーメントを減らす方向に作用する領域（$\kappa > 0$ で $M_c < 0$ となる領域と，$\kappa < 0$ で $M_c > 0$ となる領域）があることがわかる．



(a) 曲げ始め付近



(b) 全体

図 14　BCON ブームの曲げモーメント

また，曲げ始めの曲げ剛性は

$$
\begin{aligned}
A_{init} &= \frac{Ebh^3}{3}\left(1-\frac{h^2}{12R^2}\right)+\frac{8Eb^5h}{15R^2} \\
&= 2A_o(1-\nu^2)+\frac{8Eb^5h}{15R^2}
\end{aligned}
\tag{97}
$$

となり，一枚のコンベックステープの場合と同様，曲げ始めは非常に大きな曲げ剛性を有することがわかる．

最後に，準安定点でのたわみは図 15 のようになる．この図において，$x/b \approx 0.54$ あたりから $x/b \approx 0.76$ あたりまでは互いに食い込んでしまうことがわかる．したがって，実際にはこの領域で接触し，その分，たわみは図 15 とは若干異なるものとなる．ただし，図 15 の縦軸の値をみてわかる通り，板厚 100μm のテープに対し，食い込み量はせいぜい 0.9μm 程度と非常に小さく，接触の影響はほとんどないと予想される．

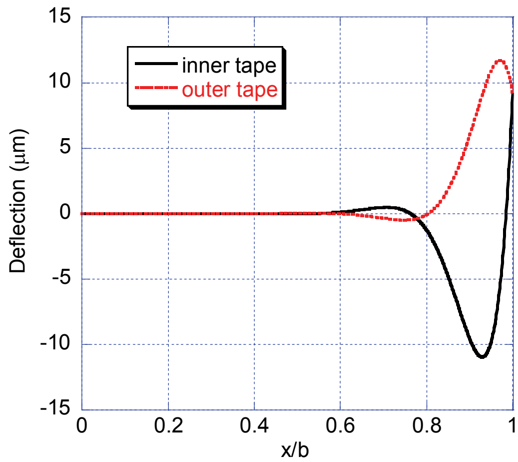


図 15　BCON ブームのたわみ

4．最後に

本小論では，まず，一枚のコンベックステープを円弧状に曲げた際の円弧からの微小変形を定式化し，仮想仕事の原理から支配方程式を導出した．そして，それらを解くことで理論解を導き，曲率と歪エネルギ・曲げモーメント・伸展力との関係，たわみ曲線の理論式を示した．次に，それらを元に，2 枚のコンベックステープから成る BCON ブームの場合の曲率と歪エネルギ・曲げモーメント・伸展力との関係，たわみ曲線を示し，2 枚のテープの相互作用の影響を示した．

本小論で導いた理論解を用いれば，コンベックステープや BCON ブームの自己伸展のダイナミクスも追うことができる．これについては別途，学会等にて報告する予定である．

謝辞

本研究は，総合科学技術会議により制度設計された最先端研究開発支援プログラムにより，日本学術振興会を通して助成されたものです．また，BCON ブームの試作モデルの開発は科研費の挑戦的萌芽研究（25630394）の助成の元で行われたものです．

参考文献

[1] 渡邊秋人, 他, 「組紐を被覆した伸展構造物の検討」, 第 56 回宇宙科学技術連合講演会講演集, JSASS-2012-4496, 2012.

[2] S.N. Adeli and V. J. Lappas, Deployment System for the CubeSail nano-Solar Sail Mission, Proc. Small Satellite Conference, SSC10-VIII-3, pp.1-12, August, 2010.

[3] 相浦, 嶋崎, 宮崎, 桑原, 「膜面構造物の伸展部材用コンベックステープの展開挙動解析」, 第 56 回宇宙科学技術連合講演会講演集, JSASS-2012-4494, pp.1-6, 2012.

[4] K.A. Seffen and S. Pellegrino, Deployment Dynamics of Tape Springs, Proc. R. Soc. Lond. A 1999 455, pp.1-47, March 1999.