

固体ロケットモータの機軸方向の振動燃焼に関する考察

東海大 森田 貴和

IHI エアロスペース 山本 研吾

1. はじめに

固体ロケットモータの機軸方向の振動燃焼において、圧力振動に応答して燃焼速度が変動する振動燃焼 (pressure-coupled oscillation, 以降 PCO と略記) と速度振動に応答して燃焼速度が変わる振動燃焼 (velocity-coupled oscillation, 以降 VCO と略記) については、古くから調べられているのにも関わらず今日でも不明な点が多い。特に VCO とそれへの遷移過程については、速度振動に対する燃焼速度の応答が閾値をもっているため、非線形的な応答を示す場合があり、理論解析が困難である。そのため十分な研究が行われているとは言い難い。また、実験的な面でも、VCO に関連する速度応答関数 (velocity-coupled response function) に対して近年も研究が続けられているが、測定および評価結果にばらつきがあり、定量的に満足いく結果が必ずしも得られていない。IHI エアロスペース社の社内実験で発生した速度結合型の振動燃焼(VCO)において、その直前に生じていた微小圧力振動がトリガーになっていることが推察された。これは、異物等がノズルから飛び出すようなことが無かったため、モータの内在不安定 (intrinsic instability) によるものと判断された^(1,2)。この際に発生した微小な圧力振動は、その振幅がほぼ一定であった。ある程度、長秒時に亘っていたので、これは単なる中立安定状態ではなく、なんらかの散逸的な作用によりリミットサイクルが生じているものと考えられる。他に、トロイダル点火器の単体試験等において発生した VCO でも、その直前に微小圧力振動のリミットサイクルのようなものが発生しており、これは、ある程度普遍的に存在するものと推定される^(3,4)。固体ロケットモータに発生するリミットサイクルについて、正弦波的な振動波形から歪んでいる振幅の大きな振動燃焼に関しては Culick⁽⁵⁾や Flandro ら⁽⁶⁾の研究が存在するが、微小振幅の圧力振動において生じる散逸的な効果に関する文献は見当たらなかった。本研究では、前述のリミットサイクルの存在を仮定し、解析を行った。著者および共同研究者の以前の論文では、散逸的な作用について表面摩擦のみを取り上げて解析を行ったが⁽⁷⁾、今回はこれに加えて粒子摩擦および粒子物質の分散燃焼の効果を加え、ノズル入口部での圧力振幅値を解析的に求め、考察を行った。

2. 支配方程式

上記の Velocity Coupled Oscillation (VCO)を生じさせる直前の比較的振幅の小さい圧力振動については、何らかの非線形的な現象によりリミットサイクルが生じていると思われる

が，本研究ではその非線形要因として燃焼表面での摩擦による音響エネルギーの散逸と粒子物質に作用するストークス力による摩擦仕事に着目した．そして，振幅が一定の定常的な振動を対象とし，ノズル入口部での圧力振幅値を解析的に求めた．使用した支配方程式の一覧を以下に示す．まず，燃焼室内において気相の連続の式は以下のように表される．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S_c) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u S_c) = (1 - X)\dot{m}_s \ell_c + w_p S_c \quad (1)$$

ここで， w_p は単位時間あたりに，単位体積の粒子物質がガスに転化した質量を表す．粒子相の連続の式は，以下のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_p S_c) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_p u_p S_c) = X\dot{m}_s \ell_c - w_p S_c \quad (2)$$

準一次元のエネルギー保存式は以下のように表される．

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho S_c e_t) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u S_c e_t) + \frac{\partial}{\partial x}(p u S_c) \\ & = (1 - X)\dot{m}_s e_{t,s} \ell_c + p v_s \ell_c - \dot{W}_f - \dot{W}_p + Q S_c \end{aligned} \quad (3)$$

ここで，上式中の表面摩擦の仕事による音響エネルギーの散逸 \dot{W}_f は以下のように表される．

$$\dot{W}_f = \frac{1}{2} \rho u |c_f \ell_c u \quad (4)$$

ただし，固体推進薬はその表面上で燃焼し，主流に燃焼ガスを供給しているため，同推進薬表面上の境界層はわき出しの効果を考慮する必要がある．ゆえに，振動燃焼時も定常燃焼時の境界層を基準として慣性的な効果が働くと考えるのが自然である．ここでは \dot{W}_f の摂動量に対して絶対値を取り，その効果とした．また，粒子摩擦による仕事である \dot{W}_p は以下のように表される．

$$\dot{W}_p = \frac{1}{2} \rho (u - u_p) |u - u_p| c_D \frac{\pi}{4} d_p^2 n_p S_c (u - u_p) \quad (5)$$

粒子表面上に形成される境界層では湧き出しが小さいので，表面摩擦の時のような効果は無く，上式がそのまま用いられる．それから， Q は単位時間あたりに単位体積の粒子物質が燃焼ガスに転化した際に発生する熱量を表す．ただし，本解析ではこの効果が圧力振幅に及ぼす影響は小さいとみなして省略した．また，以下の理想気体の状態方程式が用いられる．

$$p = \rho \frac{R_u}{W_m} T \quad (6)$$

準一次元の運動量保存式は次式で表される．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u S_c) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 S_c) + \frac{\partial p}{\partial x} S_c = -F_f - F_p \quad (7)$$

ここで，上式中の表面摩擦力の項は以下のように表される．

$$F_f = \frac{1}{2} \rho u |u| c_f \ell_c \quad (8)$$

また、粒子に働く抗力は以下のように表される。

$$F_p = \frac{1}{2} \rho (u - u_p) |u - u_p| c_D \frac{\pi}{4} d_p^2 n_p S_c \quad (9)$$

式(3)に対して式(1), (2), (5)を適用し, さらに摂動展開を行った. その結果は次節にまとめた. なお, 粒子物質の摩擦力による項と摩擦仕事の項は相殺するため, その効果は無視できる. ただし, 上記の結果は理想化した状態での話で, 実際の物理現象としては粒子による摩擦仕事の影響も少ないながら存在すると考えられる.

3. ノズル入口部の圧力振幅の導出

簡単化のためにポート断面積と周囲長が機軸方向に対して一定で, 燃焼室前端からのガスの湧き出しの効果が無視できるモータを対象として解析を行う. その仮定の下で式(3)を摂動展開して整理すると, 詳細な導出過程については別の機会に譲るが, 結果は以下のようになる.

$$\begin{aligned} P_N |\hat{p}_e^*|^2 &= P_{FL1} |\hat{p}_e^*|^2 + P_{FL2} |\hat{p}_e^*|^2 + P_{b1} |\hat{p}_e^*|^2 + P_{b2} |\hat{p}_e^*|^2 \\ &\quad + P_{fM} |\hat{p}_e^*|^2 + P_{DC1} |\hat{p}_e^*|^2 + P_{DC2} |\hat{p}_e^*|^2 - P_{fE1} |\hat{p}_e^*|^3 - P_{fE2} |\hat{p}_e^*|^3 \end{aligned} \quad (10)$$

上式において, P_N はノズルの寄与, P_{FL1} と P_{FL2} は流れの寄与, P_{b1} と P_{b2} は燃焼の寄与, P_{fM} は表面摩擦力による寄与, P_{fE1} と P_{fE2} は表面摩擦による音響エネルギーの散逸, P_{DC1} と P_{DC2} は粒子物質の分散燃焼による寄与を示しており, 各項の具体的な中身は以下のように表される.

$$P_N = \frac{I_\gamma}{\gamma - 1} \quad (11)$$

$$P_{FL1} = \int_0^1 |\mu^*| \left| \frac{d}{dx^*} \left(\frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right) \right| \cos(\theta_M - \theta_{dp}) dx^* \quad (12)$$

$$P_{FL2} = \frac{1}{2} (1 - X) \gamma M_e^2 \int_0^1 |\mu^*|^2 dx^* \quad (13)$$

$$P_{b1} = (1 - X) \gamma M_e^2 |R_p| \int_0^1 \bar{u}^* |\mu^*| \left| \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right| \cos(\theta_M - \theta_m) dx^* \quad (14)$$

$$P_{b2} = \text{Re}(R_p) \int_0^1 \left| \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right|^2 dx^* \quad (15)$$

$$P_{fM} = \frac{3}{2\gamma} M_e^2 c_f \frac{L\ell_c}{S_c} \int_0^1 \bar{u}^* |\mu^*|^2 dx^* \quad (16)$$

$$P_{fE1} = \frac{12}{\pi} \gamma M_e^2 c_f \frac{L\ell_c}{S_c} \int_0^1 \bar{u}^{*2} |\mu^*| dx^* \quad (17)$$

$$P_{fE2} = \frac{4}{3\pi} \gamma M_e^2 c_f \frac{L\ell_c}{S_c} \int_0^1 |\mu^*|^3 dx^* \quad (18)$$

$$P_{DC1} = \frac{1}{2} X \gamma M_e^2 \int_0^1 |\mu^*|^2 dx^* \quad (19)$$

$$P_{DC2} = X \gamma M_e^2 |R_p| \int_0^1 \bar{u}^* |\mu^*| \left| \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right| \cos(\theta_M - \theta_m) dx^* \\ - \frac{C_m}{1+C_m} \gamma M_e^2 |R_p| \int_0^1 \bar{u}^* |\mu^*| \left| \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right| \cos(\theta_M - \theta_m) dx^* + \frac{C_m}{1+C_m} M_e^2 \frac{I_\gamma^2}{\gamma} \quad (20)$$

上記の各項の中の μ^* , $\frac{\hat{p}}{\hat{p}_e}$, $\frac{d}{dx^*} \left(\frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right)$, $\cos(\theta_M - \theta_{dp})$, $\cos(\theta_M - \theta_m)$ については, 振動振幅が微小なので線形解析の結果を利用することができる. また, 式(20)の右辺第2項と第3項を無視すると, 残りの項で構成される式(10)は粒子の影響を加味しないモデルと同一になる. 次に, 式(10)に対し $|\hat{p}_e^*|$ について整理すると, 以下の二次方程式を得る.

$$P_{fE2} |\hat{p}_e^*|^2 - \delta P |\hat{p}_e^*| + P_{fE1} = 0 \quad (21)$$

ここで,

$$\delta P = P_{b1} + P_{b2} - P_N + P_{FL1} + P_{FL2} + P_{fM} + P_{DC1} + P_{DC2} \quad (22)$$

とおいた. したがって, ノズル入口部での無次元圧力振幅 \hat{p}_e^* について以下の2式が求められる.

$$|\hat{p}_e^*| = \frac{1}{2P_{fE2}} \left[\delta P + \sqrt{(\delta P)^2 - 4P_{fE1}P_{fE2}} \right] \quad (23)$$

$$|\hat{p}_e^*| = \frac{1}{2P_{fE2}} \left[\delta P - \sqrt{(\delta P)^2 - 4P_{fE1}P_{fE2}} \right] \quad (24)$$

なお, 上記の2つの解の内どちらが実際の解に相当するかは解の安定性を調べる必要がある.

4. 結果と考察

ノズル入口部での圧力振幅の解は式(23)と式(24)の2つがあるが, 数値計算して解の挙動の安定性を調べることにより, 式(24)が物理的に有意な解であることが分かった. 以降はこの解を基に計算を進める. またこの事実は, 同解の根号の前の符号が正の場合はパラメータが少しでも変わると根号の部分が増幅に寄与するが, 根号の前の符号が負の場合は, 相

殺して解が安定化するように働くので、このことによっても推察できる。ここでは、まず粒子減衰の効果を除いてノズル入口部での圧力振幅の周波数特性の計算を行った。表面摩擦係数 c_f を 0.0001 とし、圧力応答関数の実部を 1.5, 1.6, 1.7 と変えた時の計算結果を以下に示す。なお、圧力応答関数の虚部については 0 とした。同図の縦軸は、圧力振幅値を平均内圧で割って無次元化した量を示している。図 1 と同じ条件で、圧力応答関数の値のみを 2.0, 2.1, 2.2 と変えて計算した結果が図 2 である。同様に、表面摩擦係数を 0.005 とし、圧力応答関数の値のみを 1.8, 1.9, 2.0 と変えた結果が図 3 である。

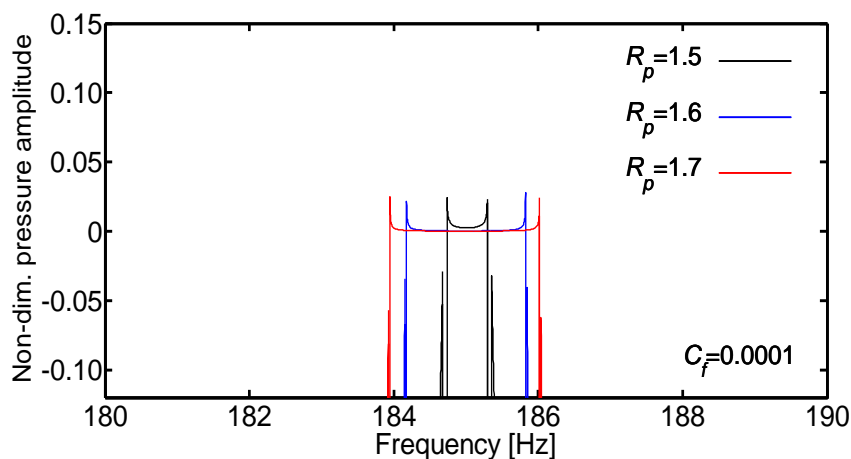


図 1 ノズル入口部での圧力振幅の周波数特性 ($c_f = 0.0001$, $R_p = 1.5 \sim 1.7$)

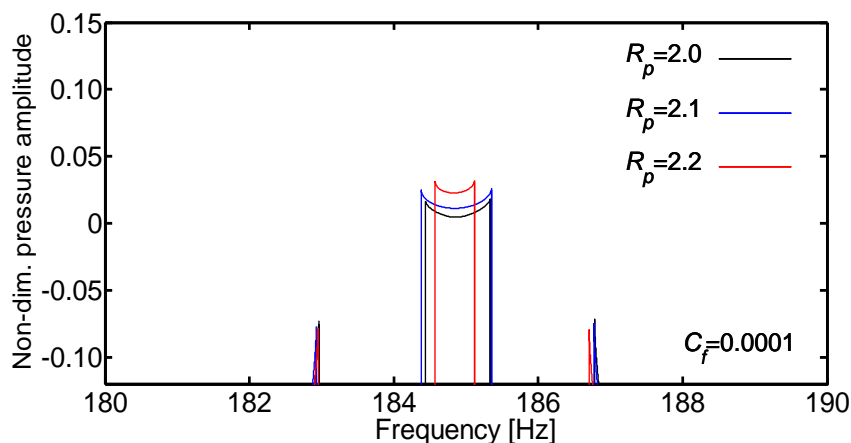


図 2 ノズル入口部での圧力振幅の周波数特性 ($c_f = 0.0001$, $R_p = 2.0 \sim 2.2$)

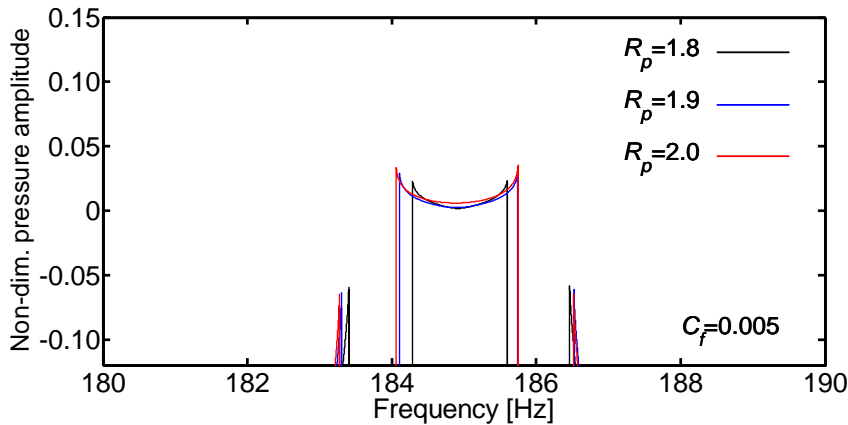


図3 ノズル入口部での圧力振幅の周波数特性 ($c_f = 0.005$, $R_p = 1.8 \sim 2.0$)

P_{b1} , P_{b2} , P_{FL1} , P_{FL2} の各無次元音響パワーの周波数特性について図4に示す。燃焼による影響は P_{b1} , P_{b2} で表され、全体的にみると正の寄与をなしている。流れによる影響 P_{FL1} , P_{FL2} は、全体的には負となり、減衰として働くことが同図より分かる。 P_{JE1} , P_{JE2} , P_{JM} の各無次元音響パワーの周波数特性について図5に示す。表面摩擦による散逸仕事は P_{JE1} , P_{JE2} で表され、それぞれ負となるため減衰として働いていることが確認できる。 P_{JM} は、表面摩擦力による寄与を表している。ただし、これらの三つの項は圧力振幅値のベキ乗が乗算されてはじめて大小関係が比べられるので、この図から周波数の変化に対する傾向は分かるが、大きさの比較はできない。

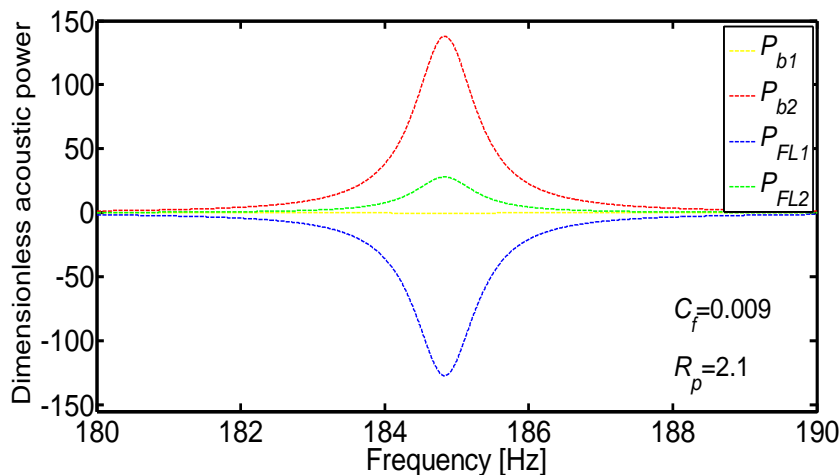


図4 音響パワー P_{b1} , P_{b2} , P_{FL1} , P_{FL2} の周波数特性 ($c_f = 0.009$, $R_p = 2.1$)

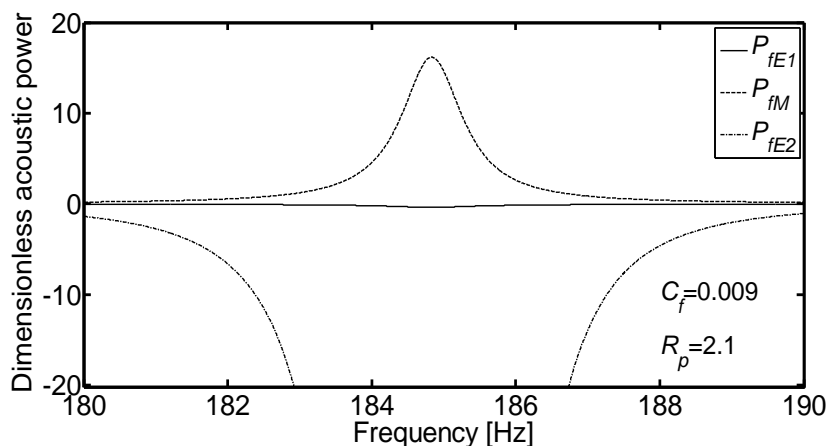


図5 音響パワー P_{fE1} , P_{fE2} , P_{fM} の周波数特性 ($c_f = 0.009$, $R_p = 2.1$)

表面摩擦係数を一定にした時の圧力応答関数の実部による圧力振幅への影響を見たものが図6である。なお、ここでは圧力応答関数の虚部は全て0としている。黒色の実線が解の左端の値を、青色の線が解の右端の値を、赤色の線が極小値をそれぞれ示す。なお、両端の値は急激に変化するので評価しにくいいため、圧力振幅の解を重根として計算した結果から求めている。したがって、計算結果の読み取り誤差のため若干大きめの値になる可能性がある。 c_f が大きくなるにつれて黒色および青色の線で表される圧力振幅値は小さくなるが、赤色の線は増大している。これより、圧力振幅値の評価を考えた場合、赤色の線の特性は物理的に誤った傾向を持っており、黒色もしくは青色の線の方が圧力振幅の物理的特性として素直に理解できる性質を持っている。また、赤色の線とその他の2つの線が接近した所からさらに広げて計算をすると、物理的に有意な解は得られなくなった。したがって、この線が交わる所までの範囲が解の領域となることが分かった。 $c_f = 0.0001$ の曲線は、多少ジグザグしているが、これは数値的な誤差ではなく実際の計算でも解が不安定に変化していることによる。図6と同じ条件で、基本モードについて圧力応答関数の実部（虚部は0）を一定とした上で、表面摩擦係数を変化させてその影響をみたものが図7である。同図において圧力応答関数の実部が2.3となる曲線より上側では、物理的に有意な解が消失した。ここでも赤い線と他の2つの曲線が交わろうとする地点より外側の領域では、解が無くなった。IHIエアロスペース社の社内研究で実施された燃焼試験では、長秒時に亘りPCOの振幅が一定の状態が続いた。その間、燃焼中にポート断面積が変化することにより、流速が変わり c_f 値も変化していたはずである。それにも関わらず無次元圧力振幅値が一定であったということは、図7において赤色の線、つまり極小値を振幅の解とみなすのが妥当であることを意味していると思われる。このことは図6における説明とは相違するが、リミットサイクルによる非線形性の影響によるものと考えられる。

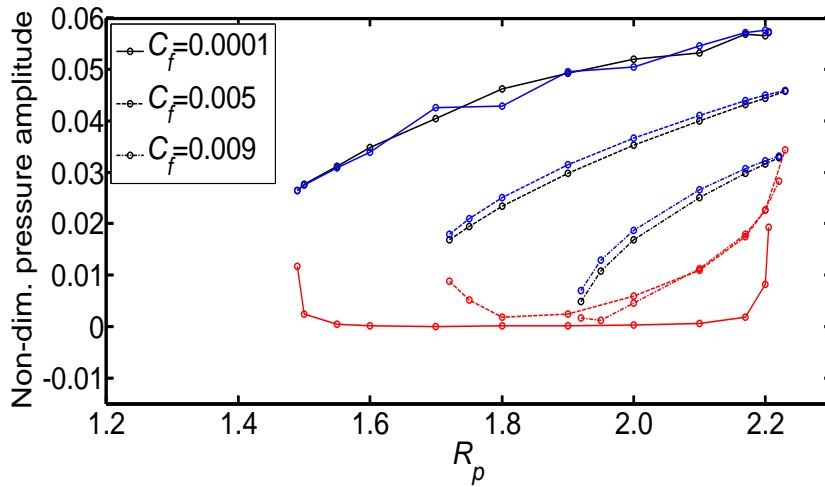


図6 ノズル入口部での圧力振幅と圧力応答関数の実部の関係

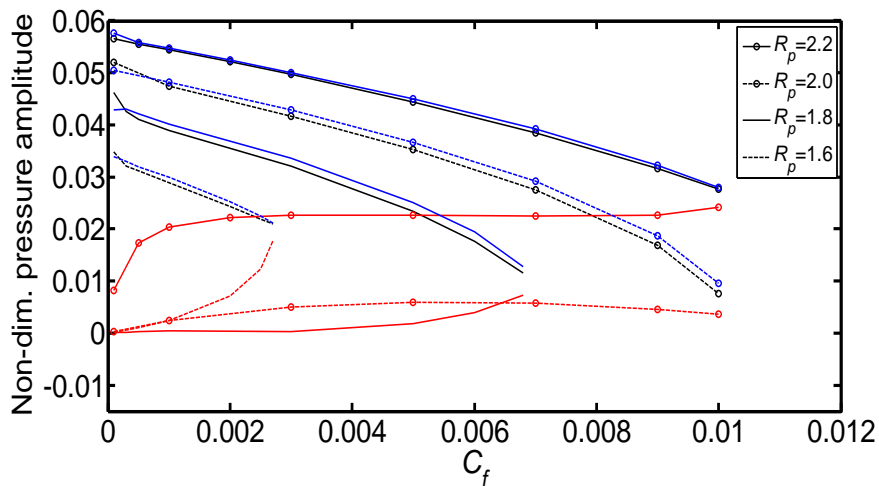


図7 ノズル入口部での圧力振幅と表面摩擦係数の関係

なお、 c_f 値が変化しても無次元圧力振幅が一定であるということは、 c_f 値はモータ作動時における大体の範囲が把握できれば十分で、その正確な値については必要ないため、圧力振幅値の評価は簡単になる。

結論

従来の研究では無視されることの多かった表面摩擦の効果を本研究では注目し解析を行ってきたが、今回は粒子物質の効果（摩擦力、摩擦仕事、分散燃焼）を含め、VCO のトリガーとなりうる直前の微小圧力振動に対してノズル入口部での圧力振幅を求めた。そしてその計算結果から考察することにより、粒子減衰の効果はほぼ無視できることがわかった。

ただし、粒子との作用については Culick の理論をベースとしてストークス力のみを取り上げて解析を進めており、他の効果は考慮していない。Culick の式と Coates & Horton の実験式の相違が存在する以上、未だ考慮されていない作用があるはずで、これによる非線形的な散逸があるかどうかを調べる必要がある。また、粒子の分散燃焼については 0 ではないが、圧力振幅に及ぼす影響は十分小さかった。VCO の発生以前に長秒時に亘って続く微小圧力振動の振幅はほぼ一定であることが実験的に分かっているが、これより圧力振幅は c_f が変化しても変わらないということになり、 c_f 値のおおよその範囲が分かればその正確な値については必要としないため、圧力振幅値の評価が簡単になった。

記号表

C_D	: 粒子の抵抗係数
C_m	: $C_m = 1.89X / (1 - 1.89X)$
d_p	: 平均粒子径
c_f	: 表面摩擦係数
e	: 比内部エネルギー
e_s	: 燃焼表面上での比内部エネルギー
e_t	: よどみ点比内部エネルギー
$e_{t,s}$: 燃焼表面上でのよどみ点比内部エネルギー
F_f	: 表面摩擦による抗力
F_p	: 粒子摩擦による抗力
I_γ	: $I_\gamma = (\gamma + 1) / 2$
L	: ポート長
ℓ_c	: ポート周囲長
\dot{M}	: ポート断面を通過する気相のガスの質量流量
\dot{M}^*	: $\dot{M}^* = \dot{M} / \dot{M}_e$
\dot{M}_e	: ノズル入口部を通過する燃焼ガスの質量流量
M_e	: ノズル入口マッハ数
\dot{M}_p	: ポート断面を通過する粒子相の流体の質量流量
\dot{m}_s	: 燃焼表面上での燃焼ガスの質量流束
n_p	: 粒子の数密度
P_{b1}	: 式(14)で定義される。
P_{b2}	: 式(15)で定義される。
P_{DC1}	: 式(19)で定義される。
P_{DC2}	: 式(20)で定義される。

- P_{FL1} : 式(12)で定義される.
 P_{FL2} : 式(13)で定義される.
 P_{JE1} : 式(17)で定義される.
 P_{JE2} : 式(18)で定義される.
 P_{JM} : 式(16)で定義される.
 P_N : 式(11)で定義される.
 p : 圧力
 p_e : ノズル入口部での圧力
 \hat{p}_e^* : $\hat{p}_e^* = \hat{p}_e / \bar{p}$
 R : $R = R_u / W_m$
 Re_d : 粒子レイノルズ数
 R_p : 圧力応答関数, $R_p = \frac{\hat{m}_s / \bar{m}_s}{\hat{p} / \bar{p}}$
 R_u : 普遍気体定数
 Q : 単位時間当たりに単位体積の粒子物質が燃焼ガスに転化した際に発生する熱量
 S_c : ポート断面積
 s : ラプラス変換のパラメータ
 T : 温度
 t : 時間
 u : ポート断面を通過する気相のガスの流速
 u_{cr} : 侵食燃焼のしきい値に相当する流速
 u_p : ポート断面を通過する粒子相の流体の流速
 \bar{u}^* : $\bar{u}^* = \bar{u} / \bar{u}_e$
 \bar{u}_p^* : $\bar{u}_p^* = \bar{u}_p / \bar{u}_e$
 v_s : 燃焼表面上における垂直方向のガスの流速
 \dot{W}_f : 表面摩擦によるエネルギーの散逸
 W_m : 燃焼ガスの平均分子量
 \dot{W}_p : 粒子摩擦によるエネルギーの散逸
 w_p : 単位時間当たりに、単位体積の中の粒子がガスに転化する質量
 X : 固体推進薬中のアルミニウムの配合率
 x : 燃焼室前端を原点とし、下流方向を正の向きとした時の距離
 x^* : $x^* = x / L$

ギリシャ文字

- γ : 燃焼ガスの比熱比
 δP : 式(22)で定義される.
 θ_M : 燃焼ガスの質量流量振動の位相角

θ_m : 燃焼表面上でのガスの質量流束振動の位相角

θ_p : 圧力振動の位相角

θ_u : 気相の速度振動の位相角

θ_{up} : 粒子相の速度振動の位相角

$$\mu^* : \mu^* = \frac{\hat{M}/\bar{M}_e}{\hat{p}_e/\bar{p}}$$

ρ : 気相の密度

ρ_p : 粒子相の密度

ω : 角振動数

添え字等

c : 燃焼室

e : ノズル入口部

s : 燃焼表面

' : 微小摂動量

— : 定常燃焼

^ : 微小摂動量に対するラプラス変換量

Re() : 実部

| | : 絶対値

< > : 時間平均

参考文献

- [1] 森田貴和, 福地亜宝郎, 小田島広明, 大野健: 平成 23 年度宇宙輸送シンポジウム, STCP-2011-010.
- [2] 森田貴和, 臼井雄太郎, 藤松清人, 山本研吾, 福地亜宝郎: 平成 25 年度宇宙輸送シンポジウム, STCP-2013-058.
- [3] 矢代顕慎, 他 6 名: 平成 22 年度宇宙輸送シンポジウム, STCP-2010-058.
- [4] 森田貴和, 徳留真一郎, 矢代顕慎, 中野信之, 反野春仁: 平成 22 年度宇宙輸送シンポジウム, STCP-2010-059.
- [5] F. E. C. Culick and V. Yang, "Prediction of the stability of unsteady motions in solid propellant rocket motors," in Nonsteady Burning and Combustion Stability of Solid Propellants, edited by L. De Luca, E. W. Price, and M. Summerfield, AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics Vol.143 AIAA, Washington, DC, 1992, pp. 719–779.
- [6] G. A. Flandro, S. R. Fischbach, and J. Majdalani, "Nonlinear Rocket Motor Stability Prediction : Limit Amplitude, Triggering, and Mean Pressure Shift," Physics of Fluid, 19, 094101 (2007)

- [7] 森田貴和, 笹山容資, 山本研吾, 福地重宝郎 : 平成 26 年度宇宙輸送シンポジウム, STCP-2014-037.
- [8] M. A. Karabeyoglu, "Transient Combustion in Hybrid Rockets," Ph.D. Dissertation, Stanford University, Department of Aeronautics and Astronautics, Aug. 1998.