

# 固体ロケットモータに関する機軸方向の音響振動の解析

東海大・工 森田 貴和  
IHI エアロスペース 笹山 容資  
IHI エアロスペース 山本 研吾  
IHI エアロスペース 福地 垂宝郎

## 1. 緒言

機軸方向に段階的にポート断面積が増加する内面燃焼型固体ロケットモータ（ $\phi 320$  モータ，IHI エアロスペースの社内研究用）で生じた振幅の大きな velocity-coupled oscillation（以降 VCO と略記）は、それ以前に生じていた pressure-coupled oscillation（以降 PCO と略記）を含む微小な圧力振動により励起されたと推察されている<sup>(1)</sup>。VCO が発生したケースについて模式図で表すと図 1 のようになる。ここで、黄色の線が微小振動の部分であり、単一の周波数でほぼ正弦波的な内圧振動が生じている。また圧力振幅は時間的にはほぼ一定の状態推移しているため、何らかの散逸的な物理的現象によりリミットサイクル振動を起こしていると思われる。一方、赤色の線が VCO の部分である。圧力振幅はそれ以前と比べるとかなり大きくなり、複数の振動モードが出現する。特に、固相の熱的特性時間の逆数に対応するモードが強く励起される。また、振幅もほぼ一定のため、ここでも別のリミットサイクル振動が形成されている。これ以外にも固形物の排出等のトリガーにより発生する VCO も存在するが、これに対しては固形物の塊を排出しないようにすることで VCO の発生を防ぐことができる。本研究の対象となる VCO は、ロケットモータの内部安定性が不安定側に推移して振動燃焼が励起されるため、VCO の発生機構を理解した上で対策を立てる必要がある、そのためにより難しい問題になっている。

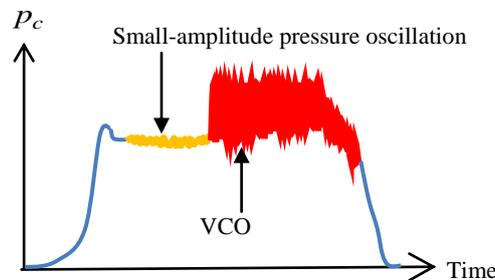


図 1 VCO とそれ以前に発生している微小振動

これまでに VCO の発生機構を調べるために、それ以前に生じる微小振動に対して Karabeyoglu らがハイブリッドロケットの燃焼不安定の問題に用いた解析手法<sup>(2)</sup>を適用してきた<sup>(1),(3)</sup>。本手法を使って VCO が発生する前の速度振動を求め、微小振動から VCO へ遷移する過程に関して考察してきたが、線形解析をベースとするため圧力振幅値はわからないので実験値を用いていた。本研究では、この圧力振幅値に関して燃焼室全体のエネルギー保存を考慮して算出を試みた。ここで各物理量は微小振動しているため線形解析の結果を近似的に用いた。

## 2. VCO 発生メカニズム

外部からのトリガーが無い時に、VCO が発生するメカニズムについて著者らの一部は考察を進めてきた<sup>(1)</sup>。これについてわかりやすく説明するために、以下で簡単な例として内孔断面積一定の円管型内面燃焼グレインの固体ロケットモータにおいて VCO が発生する前に生じている速度振動を考える。瞬間速度の最大値と最小値を速度振動の振幅を使い空間分布として表すと、図 2 のようになる。ここで、真ん中の直線は定常流速の分布を表している。

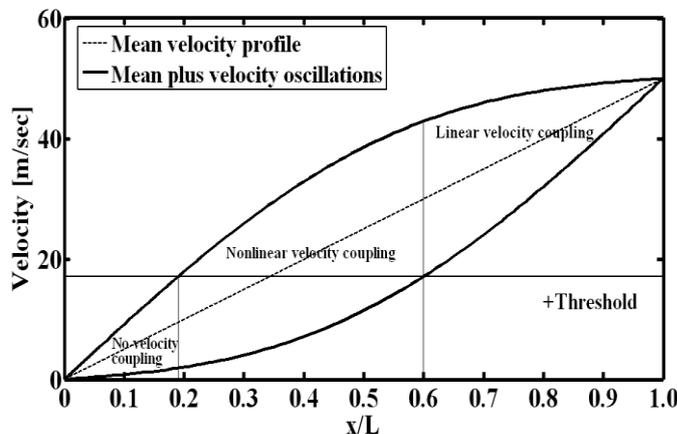


図 2 円管型内面燃焼グレインの固体ロケットモータ内の速度振動の様子

内孔内を流れる燃焼ガスの質量流束が侵食燃焼の閾値を超えた時、燃速が速度振動に感応するようになるが、閾値より低い場合は速度振動に対し不感となる。したがって、変動成分も含めた全速度が閾値を超えた場合、燃速振動も正弦的に変動する。この場合を **linear velocity coupling** と呼んでいる。反対に変動成分も含めた全ての流速が閾値より低い場合は **velocity coupling** は生じない。このいずれでもない中間の場合は、閾値を挟んで感応する領域と不感の領域を1サイクルの間に行き来するようになり、燃速の変動は正弦的ではなくなり、振動波形は広範囲の周波数成分を含むようになる。このような場合を **nonlinear velocity coupling** と呼んでいる。通常の場合、燃焼が進行するにつれて内孔内の流速は低下してくる。したがって、燃焼初期には **linear velocity coupling** の状態が多くを占めていたとしても、時間が経つにつれて **nonlinear velocity coupling** の状態の方が占有度を増してくるために広範囲の周波数域の振動が励起されるようになる。この時に固相の熱的特性時間の逆数に相当する周波数と機軸方向の基本モードの周波数が近い場合は振幅の大きな **VCO** が発生するようになる。

### 3. ノズル入口断面での圧力振幅

本研究では、速度振動に対し線形計算で求めたため、そのままでは振幅値を求めることはできない。そこで、燃焼室内全域に対して音響エネルギーの釣り合い式を考え、それから振幅値を求めることにした。音響エネルギーを供給する源としては、図3に示すように推進薬の燃焼の応答、**acoustic boundary layer pumping**, **vortex shedding**, 燃焼室内に分散した燃焼がある。一方、音響エネルギーを失う要因としては、粘性減衰、ノズルによる減衰、粒子減衰、**flow turning** がある。本研究ではこれらの中でも推進薬の燃焼の応答、**flow turning**, 粘性減衰、ノズルによる減衰の四つに要因に絞って音響エネルギーの釣り合いを考える。

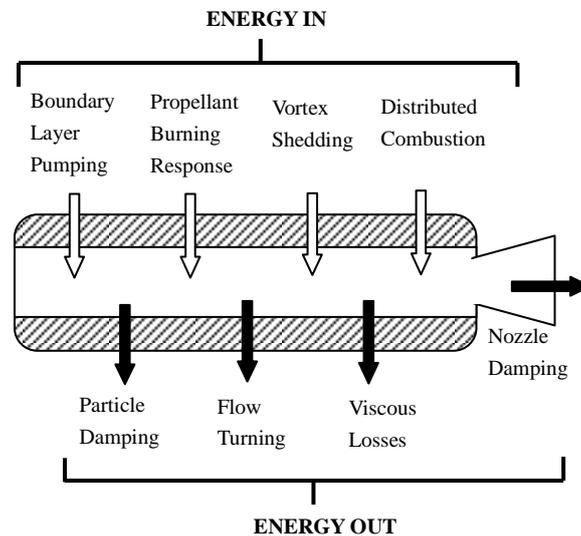


図3 燃焼室内での音響エネルギーの釣り合い

**VCO** を生じさせる以前の比較的振幅の小さい圧力振動について実験的に調べた結果、ある特定の周波数でほぼ正弦的に振動していることがわかった。この振幅の小さい圧力振動は、ほぼ一定の振幅を保ちながら時間的に推移しているので何らかの非線形的な現象によりリミットサイクル振動が生じていると思われる。本研究ではその非線形要因としてグレイン燃焼表面での摩擦による音響エネルギーの散逸に注目した。そして、振幅が一定の定常的な振動を対象とし、ノズル入口断面での圧力振幅値を解析的に求めた。以下にその詳細を記す。燃焼室内において準一次元のエネルギー保存式は以下のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S_c e_t) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u S_c e_t) + \frac{\partial}{\partial x}(p u S_c) = \dot{m}_s e_{t,s} l_c + p v_s l_c - (\bar{W}_f + |\dot{W}'_f|) \quad (1)$$

ここで、上式中の表面摩擦による仕事に関連した  $\dot{W}_f$  は以下のように表され、これが全て散逸すると考える。

$$\dot{W}_f = \frac{1}{2} \rho u |u| c_f l_c u = \frac{1}{2 \rho^2 S_c^3} \dot{M}^2 |\dot{M}| c_f l_c \quad (2)$$

また、定常流速は到る所で摂動成分より速いとし、瞬時の流速が負になる場合(速度ベクトルが上流方向に向くこと)は無いとす。式(1)における表面摩擦による音響エネルギーの散逸は、一周期に亘り常に正の値を持ち、振動の様子は電気回路でいう所の全波整流に相当する状態になっている。したがって、式(1)において摂動成分である  $\dot{W}'_f$  に対し絶対値を付けて区別した。また、本研究では熱音響現象が発生して圧力振動を起こすような場合は除外した。次に、式(1)を変形して解きやすくするために、以下の準一次元の運動量保存式を使用する。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u S_c) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 S_c) + \frac{\partial p}{\partial x} S_c = -F_f \quad (3)$$

ここで、上式中の表面摩擦力の項は以下のように表される。

$$F_f = \frac{1}{2} \rho u |c_f \ell_c = \frac{1}{2 \rho S_c^2} \dot{M} |\dot{M}| c_f \ell_c \quad (4)$$

連続の式は以下のように表される.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho S_c) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u S_c) = \dot{m}_s \ell_c \quad (5)$$

また, 以下の理想気体の状態方程式も使用される.

$$p = \rho \frac{R_u}{W_m} T \quad (6)$$

式(1)に対し, 式(3), (5), (6)を適用して変形する. さらに比内部エネルギー  $e$  の代わりに比エンタルピー  $h$  で表記すると, 次式で表される.

$$\frac{1}{\gamma-1} S_c \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u S_c h) = u S_c \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u^2}{2} \dot{m}_s \ell_c + \dot{m}_s e_s \ell_c + p v_s \ell_c + u F_f - (\bar{W}_f + |\dot{W}'_f|) \quad (7)$$

ここで, 燃焼表面から噴出するガスの運動エネルギーはその内部エネルギーに比べて十分小さいものとして無視した ( $e_{t,s} \approx e_s$ ).

$$\frac{1}{\gamma-1} S_c \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} (p u S_c) = u S_c \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u^2}{2} \dot{m}_s \ell_c + \dot{m}_s e_s \ell_c + p v_s \ell_c + u F_f - (\bar{W}_f + |\dot{W}'_f|) \quad (8)$$

上式を摂動展開するために, 各物理量を下記のように平均値と微小変動量の和で表す.

$$u = \bar{u} + u', \quad p = \bar{p} + p', \quad \dot{m}_s = \bar{\dot{m}}_s + \dot{m}'_s, \quad v_s = \bar{v}_s + v'_s, \quad F_f = \bar{F}_f + F'_f \quad (9)$$

これを式(8)に適用した結果は以下の通りである.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma-1} S_c \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} [(p' \bar{u} + \bar{p} u' + p' u') S_c] &= u' S_c \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{u} S_c \frac{\partial p'}{\partial x} + u' S_c \frac{\partial p'}{\partial x} \\ &+ \frac{\bar{u}^2}{2} \dot{m}'_s \ell_c + \frac{u'^2}{2} \bar{\dot{m}}_s \ell_c + \bar{u} u' \bar{\dot{m}}_s \ell_c + \bar{u} u' \dot{m}'_s \ell_c \\ &+ \dot{m}'_s e_s \ell_c + (p' \bar{v}_s + \bar{p} v'_s + p' v'_s) \ell_c \\ &+ u' \bar{F}_f + \bar{u} F'_f + u' F'_f - |\dot{W}'_f| \end{aligned} \quad (10)$$

なお, 上式中の  $e_s$  については火炎温度の変化が小さいためにここでは一定と見なした. 一次の微小量は一周期あたりの時間平均を取ると消えてしまうので, 上式から予め取り除いておくこと次式を得る.

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} (p' u' S_c) = u' S_c \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{u'^2}{2} \bar{\dot{m}}_s \ell_c + \bar{u} u' \dot{m}'_s \ell_c + p' v'_s \ell_c + \bar{u} F'_f + u' F'_f - |\dot{W}'_f| \quad (11)$$

上式において  $F'_f$  や  $\dot{W}'_f$  は二次以上の微小量も含んでいるため消去されない. 上式をグレイン内孔上流端 ( $x=0$ ) からノズル入口断面 ( $x=L$ ) まで積分すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma-1} p'_e u'_e S_c &= \int_0^L u' S_c \frac{\partial p'}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \bar{\dot{m}}_s \int_0^L u'^2 \ell_c dx + \int_0^L \bar{u} u' \dot{m}'_s \ell_c dx \\ &+ \int_0^L p' v'_s \ell_c dx + \int_0^L \bar{u} F'_f dx + \int_0^L u' F'_f dx - \int_0^L |\dot{W}'_f| dx \end{aligned} \quad (12)$$

上式を一周期に亘って時間積分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma-1} \langle p'_e u'_e S_c \rangle &= \int_0^L \langle u' S_c \frac{\partial p'}{\partial x} \rangle dx + \frac{1}{2} \bar{\dot{m}}_s \int_0^L \langle u'^2 \rangle \ell_c dx + \int_0^L \bar{u} \langle u' \dot{m}'_s \rangle \ell_c dx \\ &+ \int_0^L \langle p' v'_s \rangle \ell_c dx + \int_0^L \langle \bar{u} F'_f \rangle dx + \int_0^L \langle u' F'_f \rangle dx - \int_0^L \langle |\dot{W}'_f| \rangle dx \end{aligned} \quad (13)$$

が成り立つ. ここで, 括弧  $\langle \rangle$  は時間平均を表す. さらに上式の計算を進めると, 以下の結果を得る. なお, この計算過程は長いので別の機会に譲る.

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{p}\bar{M}_e}{2\bar{\rho}} \frac{I_\gamma}{\gamma-1} |\hat{p}_e^*|^2 &= \frac{\bar{p}\bar{M}_e}{2\bar{\rho}} |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 |\mu| \left| \frac{d}{dx^*} \left( \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right) \right| \cos(\theta_M - \theta_p) dx^* \\
&+ \frac{\bar{M}_e^2 \bar{m}_s}{4\bar{\rho}^2} |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 |\mu|^2 \frac{\ell_c L}{S_c^2} dx^* \\
&+ \frac{\bar{M}_e \bar{m}_s \bar{u}_e}{2\bar{\rho}} |R_p| |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 \bar{u}^* |\mu| \left| \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right| \cos(\theta_M - \theta_m) \frac{\ell_c L}{S_c} dx^* \\
&+ \frac{\bar{p} \bar{m}_s L}{2\bar{\rho}} \operatorname{Re}(R_p) |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 \left| \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right|^2 \ell_c dx^* \\
&+ \frac{3}{4} \bar{\rho} c_f \bar{u}_e^3 L |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 \bar{u}^* |\mu|^2 \ell_c dx^* \\
&- \frac{6}{\pi} \bar{\rho} c_f \bar{u}_e^3 L |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 \bar{u}^{*2} |\mu| \ell_c dx^* - \frac{2}{3\pi} \bar{\rho} c_f \bar{u}_e^3 L |\hat{p}_e^*|^3 \int_0^1 |\mu|^3 \ell_c dx^* \tag{14}
\end{aligned}$$

ここで、 $|\hat{p}_e^*|$  はノズル入口断面での圧力振幅  $|\hat{p}_e|$  を平均内圧  $\bar{p}$  で割り、無次元化したものである。上式の両辺に  $2\bar{\rho}/(\bar{p}\bar{M}_e)$  を掛けると、次式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{I_\gamma}{\gamma-1} |\hat{p}_e^*|^2 &= |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 |\mu| \left| \frac{d}{dx^*} \left( \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right) \right| \cos(\theta_M - \theta_p) dx^* + \frac{\bar{M}_e \bar{m}_s}{2\bar{\rho}\bar{p}} |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 |\mu|^2 \frac{\ell_c L}{S_c^2} dx^* \\
&+ \frac{\bar{m}_s \bar{u}_e}{\bar{p}} |R_p| |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 \bar{u}^* |\mu| \left| \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right| \cos(\theta_M - \theta_m) \frac{\ell_c L}{S_c} dx^* + \frac{\bar{m}_s L}{\bar{M}_e} \operatorname{Re}(R_p) |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 \left| \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right|^2 \ell_c dx^* \\
&+ \frac{3}{2} \frac{\bar{\rho}^2}{\bar{p}\bar{M}_e} c_f \bar{u}_e^3 L |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 \bar{u}^* |\mu|^2 \ell_c dx^* \\
&- \frac{12}{\pi} \frac{\bar{\rho}^2}{\bar{p}\bar{M}_e} c_f \bar{u}_e^3 L |\hat{p}_e^*|^2 \int_0^1 \bar{u}^{*2} |\mu| \ell_c dx^* - \frac{4}{3\pi} \frac{\bar{\rho}^2}{\bar{p}\bar{M}_e} c_f \bar{u}_e^3 L |\hat{p}_e^*|^3 \int_0^1 |\mu|^3 \ell_c dx^* \tag{15}
\end{aligned}$$

上式の段階では、内孔断面積や内孔周囲長さについては特に制限を設けていない。以降では簡単化のために内孔断面積と内孔周囲長さが機軸方向に対して一定で、燃焼室前端からのガスの湧き出しの効果が無視できるモータを対象として解析を進める。その仮定の下でさらに上式を変形して無次元量で表すと、次式を得る。ここで、各項は音響パワーを無次元化したものに相当する物理量である。

$$P_N |\hat{p}_e^*|^2 = P_{FL1} |\hat{p}_e^*|^2 + P_{FL2} |\hat{p}_e^*|^2 + P_{b1} |\hat{p}_e^*|^2 + P_{b2} |\hat{p}_e^*|^2 + P_{fM} |\hat{p}_e^*|^2 - P_{JE1} |\hat{p}_e^*| - P_{JE2} |\hat{p}_e^*|^3 \tag{16}$$

上式において、 $P_N$  はノズルの寄与、 $P_{FL1}$  と  $P_{FL2}$  は流れの寄与、 $P_{b1}$  と  $P_{b2}$  は燃焼の寄与、 $P_{fM}$  は表面摩擦力による寄与、 $P_{JE1}$  と  $P_{JE2}$  は表面摩擦による音響エネルギーの散逸を示しており、各項の具体的な中身は以下のように表される。

$$P_N = \frac{I_\gamma}{\gamma-1} \tag{17}$$

$$P_{FL1} = \int_0^1 |\mu| \left| \frac{d}{dx^*} \left( \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right) \right| \cos(\theta_M - \theta_p) dx^* \tag{18}$$

$$P_{FL2} = \frac{\gamma}{2} M_e^2 \int_0^1 |\mu|^2 dx^* \tag{19}$$

$$P_{b1} = \gamma M_e^2 |R_p| \int_0^1 \bar{u}^* |\mu| \left| \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right| \cos(\theta_M - \theta_m) dx^* \tag{20}$$

$$P_{b2} = \text{Re}(R_p) \int_0^1 \left| \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right|^2 dx^* \quad (21)$$

$$P_{fM} = \frac{3}{2\gamma} M_e^2 c_f \frac{L \ell_c}{S_c} \int_0^1 \bar{u}^* |\mu|^2 dx^* \quad (22)$$

$$P_{fE1} = \frac{12}{\pi} \gamma M_e^2 c_f \frac{L \ell_c}{S_c} \int_0^1 \bar{u}^{*2} |\mu| dx^* \quad (23)$$

$$P_{fE2} = \frac{4}{3\pi} \gamma M_e^2 c_f \frac{L \ell_c}{S_c} \int_0^1 |\mu|^3 dx^* \quad (24)$$

式(16)に対し $|\hat{p}_e^*|$ について整理すると、以下の二次方程式を得る。

$$P_{fE2} |\hat{p}_e^*|^2 - \delta P |\hat{p}_e^*| + P_{fE1} = 0 \quad (25)$$

ここで、

$$\delta P = P_{b1} + P_{b2} - P_N + P_{FL1} + P_{FL2} + P_{fM} \quad (26)$$

とおいた。したがって、ノズル入口断面での無次元圧力振幅 $\hat{p}_e^*$ は以下の二式が求められる。

$$|\hat{p}_e^*| = \frac{1}{2P_{fE2}} \left[ \delta P + \sqrt{(\delta P)^2 - 4P_{fE1}P_{fE2}} \right] \quad (27a)$$

$$|\hat{p}_e^*| = \frac{1}{2P_{fE2}} \left[ \delta P - \sqrt{(\delta P)^2 - 4P_{fE1}P_{fE2}} \right] \quad (27b)$$

解の安定性を調べていないので、両者の解の内どちらが実際の解に相当するかは本研究の範囲内ではわからない。式(27)を見ると、燃焼応答関数が大きくなると( $P_{b1}$ や $P_{b2}$ が大きくなることに相当)、ノズル入口断面での圧力振幅が大きくなるのが分かる。反対にノズルでの減衰が大きくなったり( $P_N$ が大きくなることに相当)、表面摩擦による音響エネルギーの散逸が大きくなったりすると( $P_{fE2}$ が大きくなることに相当)、圧力振幅は小さくなるのが分かる。ノズル入口断面での圧力振幅を求めるためには、式(27)の中に $\mu$ 、 $\bar{u}^*$ 、 $\hat{p}/\hat{p}_e$ 、 $x^*$ に関する $\hat{p}/\hat{p}_e$ の導関数の値を代入する必要がある。これらはすでに線形解析等を用いて計算できることがわかっている。ここでは単純なケースについて考察するため、内孔断面面積と内孔周囲長さが軸方向に一定で、内孔内の軸方向の流速が線形的に増大する場合の線形解析を以下に記す。まず、連続の式を無次元化すると、次式を得る。

$$\frac{\tau_r s}{\gamma} \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} + \frac{d\mu}{dx^*} = R_p \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \quad (28)$$

上式を得る際に、等エントロピーの関係 $\hat{p}/\bar{p} = \gamma \hat{\rho}/\bar{\rho}$ を使った。また、上式においてラプラス変換のパラメータ $s$ については $s = i\omega$ とする。また、 $\tau_r$ は以下のように定義される。これは推進薬ガス滞留時間に相当するが、ノズル入口断面からスロートまでの体積は無視されている。

$$\tau_r = \frac{\bar{\rho} S_c L}{\dot{M}_e} \quad (29)$$

以前著者らの一部の者により、固体モータの機軸方向の音響的燃焼不安定を調べるための線形安定性解析が実施され、そこで $\mu$ を求めるための微分方程式が導出された<sup>(1)(3)</sup>。その結果を以下に記す。

$$\frac{d^2 \mu}{dx^{*2}} = f_1 \frac{d\mu}{dx^*} + f_0 \mu \quad (30)$$

この微分方程式を解くと、直ちに以下の解が得られる。

$$\mu = C_1 \exp(\lambda^+ x^*) + C_2 \exp(\lambda^- x^*) \quad (31)$$

ここで、 $C_1$ 、 $C_2$ は未定定数である。また、 $\lambda^+$ 、 $\lambda^-$ 等は下記のように定義される。

$$\lambda^\pm = \frac{1}{2} \left( f_1 \pm \sqrt{f_1^2 + 4f_0} \right) \quad (32)$$

$$f_0 = L^2 \frac{\langle C_{M0} \rangle}{\langle C_{M2} \rangle} \quad (33)$$

$$f_1 = L \frac{\langle C_{M1} \rangle}{\langle C_{M2} \rangle} \quad (34)$$

上記の  $\langle C_{M0} \rangle$ ,  $\langle C_{M1} \rangle$ ,  $\langle C_{M2} \rangle$  の中身については付録 A で述べる．式(30)の境界条件は以下の 2 式で与えられる．式(35)がグレイン内孔上流端での条件であり，式(36)はノズル入口断面での条件である．

$$x^* = 0 \text{ で, } \mu = 0 \quad (35)$$

$$x^* = 1 \text{ で, } \mu = \frac{I_\gamma}{\gamma} \quad (36)$$

これらの境界条件を式(31)に適用すると，

$$C_1 + C_2 = 0 \quad (37)$$

$$C_1 \exp(\lambda^+) + C_2 \exp(\lambda^-) = \frac{I_\gamma}{\gamma} \quad (38)$$

が得られる．式(37)と式(38)から，直ちに以下に示すような  $C_1$ ,  $C_2$  が求められる．

$$C_1 = \frac{I_\gamma}{\gamma F_1} \quad (39)$$

$$C_2 = -\frac{I_\gamma}{\gamma F_1} \quad (40)$$

ここで， $F_1$  は次式で定義される．

$$F_1 = \exp(\lambda^+) - \exp(\lambda^-) \quad (41)$$

式(28)を  $\hat{p}/\hat{p}_e$  について整理し，式(31)の結果を適用すると次式を得る．

$$\frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} = -\frac{1}{\frac{\tau_r s}{\gamma} - R_p} \frac{d\mu}{dx^*} = -\frac{1}{\frac{\tau_r s}{\gamma} - R_p} [\lambda^+ C_1 \exp(\lambda^+ x^*) + \lambda^- C_2 \exp(\lambda^- x^*)] \quad (42)$$

上式に対し，さらに  $x^*$  で微分すると，以下ようになる．

$$\frac{d}{dx^*} \left( \frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} \right) = -\frac{1}{\frac{\tau_r s}{\gamma} - R_p} [\lambda^{+2} C_1 \exp(\lambda^+ x^*) + \lambda^{-2} C_2 \exp(\lambda^- x^*)] \quad (43)$$

また， $\bar{u}^*$  については燃焼室の側面からの燃焼ガスの湧き出しは機軸方向に対し一定とし，またグレイン内孔上流端からの湧き出しは無視できるものとする， $\bar{u}^* = x^*$  で表される．その際，グレイン内孔の断面形状は円形でなくてもよい．他に， $|\hat{p}_e^*|$  を計算する上で必要となるパラメータとして圧力応答関数  $R_p$  や表面摩擦係数  $c_f$  がある．圧力応答関数  $R_p$  は通常 T バーナ等の燃焼試験から評価される．表面摩擦係数  $c_f$  については，半経験式や実験から得られた値が用いられる．

#### 4. 計算結果

IHI エアロスペースの社内研究として実施された燃焼試験データを基に，内孔断面積が一定の固体モータについて圧力振幅の計算を行った．使用するパラメータを表 1 に示す．なおこのモータのグレインは，前光芒，または後光芒の形態となっているため，本計算ではポート径を平均化している．また定式化の段階から固体推進薬の燃焼における侵食燃焼の影響は，簡単化のために省略し，燃焼速度はチャンバー内で一様としている．さらに，燃焼面は側面のみとし，グレイン内孔上流端面での燃焼の効果を無視している．なお，固体推進薬の密度，燃焼ガスの平均比熱比と平均分子量，断熱火炎温度，特性排気速度，圧力指数，燃速（参照値）は上述の燃焼試験のデータを利用している．

表1 計算で使した値

項目	値	単位
グレイン内径	200	mm
グレインの長さ	2908	mm
平均内圧	7.0	MPa
表面摩擦係数	0.0001	

まず、線形解析で求めた  $\mu$  の絶対値の周波数特性について図4に示す。なお、圧力応答関数  $R_p$  は 1.49, 1.50, 1.51 のそれぞれの値を使つた。表面摩擦係数については Karabeyogulu がハイブリッドロケットの計算に用いた値を使用した<sup>(2)</sup>。また  $\mu$  については、 $x^* = 0.9$  で評価した。

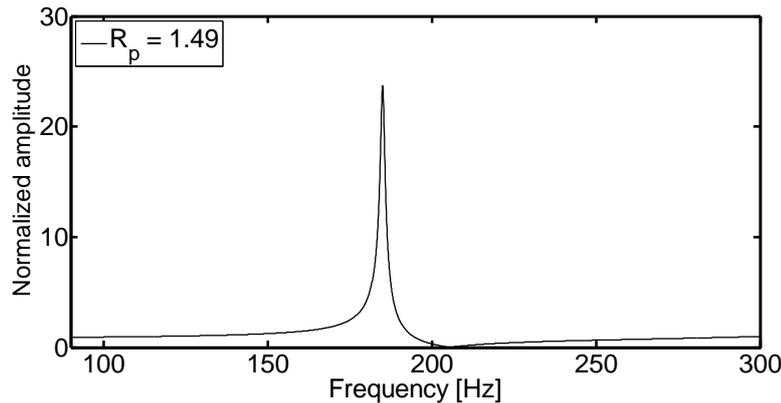


図4  $\mu$  の絶対値の周波数特性 ( $x^* = 0.9$ )

$\mu$  の絶対値が最大となる周波数はおよそ 185Hz である。一方、固体モータのグレインの長さ  $L$  と等しい閉管の気柱振動における最低次の周波数もこれとほぼ一致した。また、表面摩擦の効果は共鳴周波数の位置にはほとんど影響しなかった。また、圧力応答関数の値を 1.49, 1.50, 1.51 の3つのケースで行つたが、グラフの上ではほとんど違いが見られなかった。

次に、図4と同じ条件で式(27a)で表される  $|\hat{p}_e^*|$  について周波数特性を算出した結果が図5である。なお、 $|\hat{p}_e^*|$  はノズル入口断面での圧力振幅を平均内圧で無次元化した値である。

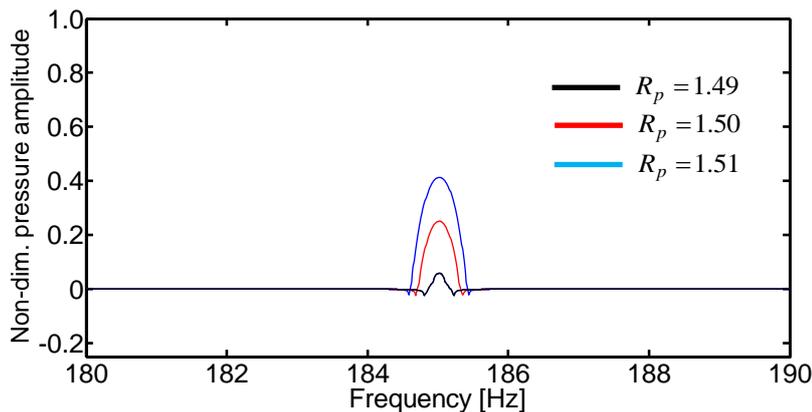


図5 ノズル入口断面での無次元圧力振幅  $|\hat{p}_e^*|$  の周波数特性[式(27a)で計算]

上図より、圧力応答関数が増大するにつれて振幅も大きくなるのがわかる。特に  $R_p = 1.49$  の場合、 $\mu$  の絶対値が最大となる周波数近傍で  $|\hat{p}_e^*|$  の極大値を見ると、0.059であった。この値は実験値( $\approx 0.01$ )と比べると大きい、現用のモデルが粒子減衰効果を見逃していることに起因する可能性がある。また、他の条件は一定とした上で  $R_p$  を 1.48 以下にすると、リミットサイクルの圧力振幅の解はなくなる。

一方、式(27b)で計算した結果が図6である。同図では圧力応答関数が増加してもノズル入口断面での圧力振幅はほぼ一定となった。また、 $R_p = 1.47$  以下では、リミットサイクルの圧力振幅の解はなくなった。こちらは  $R_p = 1.49$  の場合、 $|\hat{p}_e^*|$  の極大値が 0.025 程度となった。この無次元振幅値は比較的实验値に近い。

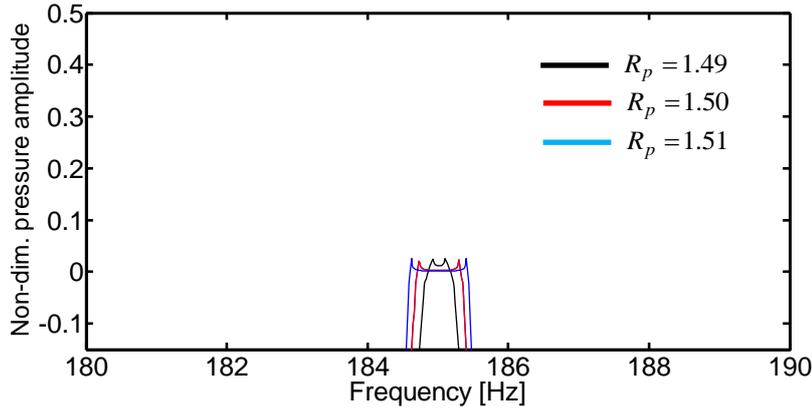


図6 ノズル入口断面での無次元圧力振幅 $|\hat{p}_e^*|$ の周波数特性[式(27b)で計算]

## 5. 結言

VCO 発生以前に存在し、その後 VCO を励起する機軸方向の微小圧力振動について線形解析を行い、関連する物理量の周波数特性を求めた。ノズル入口断面での圧力振幅については燃焼室全体のエネルギー保存を考慮して計算式を導出した。それに上記の線形解析の結果を適用することで、その圧力振幅を計算で求めた。得られた結果は実験値と比べて大きい値になったものの、オーダー的には一致した。この原因としては、アルミナ粒子等による音波の減衰効果を含めていなかったことが考えられる。また、グレイン内孔表面での摩擦力は共鳴周波数等の線形解析の結果にはほとんど影響を及ぼさなかった。

## 記号表

$a$	: 音速
$C_1$	: 式(31)で定義される。
$C_2$	: 式(31)で定義される。
$C_{M0}$	: 式(A1)で与えられる。
$C_{M1}$	: 式(A2)で与えられる。
$C_{M2}$	: 式(A3)で与えられる。
$C_s$	: 式(A4)で与えられる。
$c_f$	: 表面摩擦係数
$e$	: 比内部エネルギー
$e_s$	: 燃焼表面上での比内部エネルギー
$e_t$	: よどみ点比内部エネルギー
$e_{t,s}$	: 燃焼表面上でのよどみ点比内部エネルギー
$F_1$	: 式(41)で定義される。
$F_f$	: 表面摩擦力
$f_0$	: 式(33)で定義される。
$f_1$	: 式(34)で定義される。
$h$	: 比エンタルピー
$I_\gamma$	: $I_\gamma = (\gamma + 1)/2$
$L$	: グレインの長さ
$\ell_c$	: 内孔周囲長さ
$\dot{M}$	: 内孔断面を通過する燃焼ガスの質量流量
$\dot{M}^*$	: $\dot{M}^* = \dot{M}/\dot{M}_e$
$\dot{M}_e$	: ノズル入口断面を通過する燃焼ガスの質量流量
$M_e$	: ノズル入口マッハ数
$\dot{m}_s$	: 燃焼表面上での燃焼ガスの質量流束
$\dot{m}_s^*$	: $\dot{m}_s^* = \dot{m}_s/\bar{\dot{m}}_s$
$P_{b1}$	: 式(20)で与えられる。
$P_{b2}$	: 式(21)で与えられる。

$P_{FL1}$	: 式(18)で与えられる.
$P_{FL2}$	: 式(19)で与えられる.
$P_{JE1}$	: 式(23)で与えられる.
$P_{JE2}$	: 式(24)で与えられる.
$P_{JM}$	: 式(22)で与えられる.
$P_N$	: 式(17)で与えられる.
$P$	: 圧力
$p_e$	: ノズル入口断面での圧力
$\hat{p}_e^*$	: $\hat{p}_e^* = \hat{p}_e / \bar{p}$
$R$	: $R = R_u / W_m$
$R_p$	: 圧力応答関数, $R_p = \frac{\hat{m}_s / \bar{m}_s}{\hat{p} / \bar{p}}$
$R_u$	: 普遍気体定数
$S_c$	: 内孔断面積
$s$	: ラプラス変換のパラメータ
$T$	: 温度
$t$	: 時間
$u$	: 内孔断面を通過するガスの流速
$\bar{u}^*$	: $\bar{u}^* = \bar{u} / \bar{u}_e$
$v_s$	: 燃焼表面上でのガスの流速
$\dot{W}_f$	: 表面摩擦によるエネルギーの散逸
$W_m$	: 燃焼ガスの平均分子量
$x$	: グレイン内孔上流端を原点とし, 下流方向を正の向きとした時の距離
$x^*$	: $x^* = x / L$

#### ギリシャ文字

$\gamma$	: 燃焼ガスの比熱比
$\delta P$	: 式(26)で定義される.
$\theta_M$	: 内孔断面を通過する燃焼ガスの質量流量振動の位相角
$\theta_m$	: 燃焼表面上でのガスの質量流束振動の位相角
$\theta_p$	: 圧力振動の位相角
$\lambda$	: 式(32)で定義される.
$\mu$	: $\mu = \frac{\hat{M} / \bar{M}_e}{\hat{p}_e / \bar{p}}$
$\mu_e$	: ノズル入口断面での $\mu$
$\rho$	: 燃焼ガスの密度
$\tau_r$	: $\tau_r = (\bar{\rho} S_c L) / \bar{M}_e$
$\omega$	: 角振動数

#### 添え字等

$c$	: 燃焼室
$e$	: ノズル入口断面
$s$	: 燃焼表面
'	: 微小摂動量
—	: 定常燃焼
^	: 微小摂動量に対するラプラス変換量
$\text{Re}( )$	: 実部
	: 絶対値
$\langle \rangle$	: 時間平均

## 参考文献

- [1] 森田貴和, 福地亜宝郎, 小田島広明, 大野健: 平成 23 年度宇宙輸送シンポジウム, STCP-2011-010.
- [2] Karabeyoglu, M. A.: Transient Combustion in Hybrid Rockets, Ph.D. Dissertation, Stanford University, Department of Aeronautics and Astronautics, Aug. 1998.
- [3] 森田貴和, 臼井雄太郎, 藤松清人, 山本研吾, 福地亜宝郎: 平成 25 年度宇宙輸送シンポジウム, STCP-2013-058.

## 付録

### [A] 係数 $C_{M0}$ , $C_{M1}$ , $C_{M2}$ の空間平均

空間平均化する前の式(30)の係数が  $C_{M0}$ ,  $C_{M1}$ ,  $C_{M2}$  であり, 内孔断面積と内孔周囲長さが一定の固体ロケットモータでは以下のように表される. なお,  $C_{M0}$ ,  $C_{M1}$  には表面摩擦の効果を表す項が含まれている.

$$C_{M0} = \left( s + 2 \frac{d\bar{u}}{dx} + c_f \frac{\ell_c}{S_c} \bar{u} \right) C_s \quad (\text{A1})$$

$$C_{M1} = 2\bar{u}C_s + \frac{d}{dx}(\bar{u}^2) + \frac{1}{2}c_f \frac{\ell_c}{S_c} \bar{u}^2 = 2\bar{u} \left( C_s + \frac{d\bar{u}}{dx} \right) + \frac{1}{2}c_f \frac{\ell_c}{S_c} \bar{u}^2 \quad (\text{A2})$$

$$C_{M2} = \bar{a}^2 - \bar{u}^2 \quad (\text{A3})$$

$$C_s = s - \gamma R_p \frac{\bar{u}_e}{L} \quad (\text{A4})$$

$\bar{u} = \bar{u}_e \frac{x}{L}$  であるので,  $\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{\bar{u}_e}{L}$  となる. これより式(A1)は以下のように表される.

$$C_{M0} = \left( s + 2 \frac{\bar{u}_e}{L} + c_f \frac{\ell_c}{S_c} \frac{\bar{u}_e}{L} x \right) \left( s - \gamma R_p \frac{\bar{u}_e}{L} \right) \quad (\text{A5})$$

上式に対し空間平均の操作を施すと,  $\langle x \rangle = L/2$  であるので,

$$\langle C_{M0} \rangle = \left( s + 2 \frac{\bar{u}_e}{L} + \frac{1}{2} c_f \frac{\ell_c}{S_c} \bar{u}_e \right) \left( s - \gamma R_p \frac{\bar{u}_e}{L} \right) \quad (\text{A6})$$

となる. これと同様に  $C_{M1}$  についても  $C_s$  と  $\bar{u}$  を代入すると, 以下ようになる.

$$\begin{aligned} C_{M1} &= 2\bar{u} \left[ s + (1 - \gamma R_p) \frac{\bar{u}_e}{L} \right] + \frac{1}{2} c_f \frac{\ell_c}{S_c} \bar{u}^2 \\ &= \frac{2\bar{u}_e}{L} x \left[ s + (1 - \gamma R_p) \frac{\bar{u}_e}{L} \right] + \frac{1}{2} c_f \frac{\ell_c}{S_c} \frac{\bar{u}_e^2}{L^2} x^2 \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

上式に対しグレイン内孔上流端 ( $x=0$ ) からノズル入口断面 ( $x=L$ ) の間で平均化する.  $\langle x \rangle = L/2$ ,  $\langle x^2 \rangle = L^2/3$  より直ちに次式を得る.

$$\langle C_{M1} \rangle = \bar{u}_e \left[ s + (1 - \gamma R_p) \frac{\bar{u}_e}{L} \right] + \frac{1}{6} c_f \frac{\ell_c}{S_c} \bar{u}_e^2 \quad (\text{A8})$$

$C_{M2}$  に対しては,  $x$  を使って

$$C_{M2} = \bar{a}^2 - \frac{\bar{u}_e^2}{L^2} x^2 \quad (\text{A9})$$

と表されるので, これに  $\langle x^2 \rangle = L^2/3$  の関係を代入すると,

$$\langle C_{M2} \rangle = \gamma R \bar{T} - \frac{1}{3} \bar{u}_e^2 \quad (\text{A10})$$

となる.