

## 宇宙エレベーターにおけるケーブル変位抑制のためのクライマー運用方法の検討

○土井 日向, 山極 芳樹 (静岡大), 大塚 清敏, 石川 洋二 (大林組)

### 1. 序論

地球と宇宙をエレベーターで繋ぎ行き来するという宇宙エレベーターは、現行のロケットによる輸送に比べて低コストで環境への影響も少なく、人体への負担も少ない安全な輸送手段を提供し、究極の宇宙輸送システムであり、過去には Pearson 等の研究<sup>1)</sup> 等があるものの、成立する技術的要求は高く、実現には程遠いものであった。ところが、ここ数十年の間に、カーボンナノチューブに代表される新素材の発明や技術の発展により、技術的な可能性が高まり、研究が本格化してきている。Edward による宇宙エレベーターの概念設計<sup>2)</sup> に始まり、Lang<sup>3)</sup>、Williams<sup>4)</sup>、Cohen<sup>5)</sup> たちのケーブルの展開や、クライマーや風の影響についての学術的研究があるが、まだ初期的な検討に過ぎず、ケーブルの設計の大きく関わるクライマー運動のケーブルダイナミクスへの影響の詳細を検討したものはまだない。そこで、本研究では、宇宙エレベーターの運用を想定したシミュレーションを行い、クライマーの走行に伴うケーブルのダイナミクスへの影響について検討する。

ターではカウンターウェイトにより張力を調整し、全長を 100000km 程にすることが考えられている。

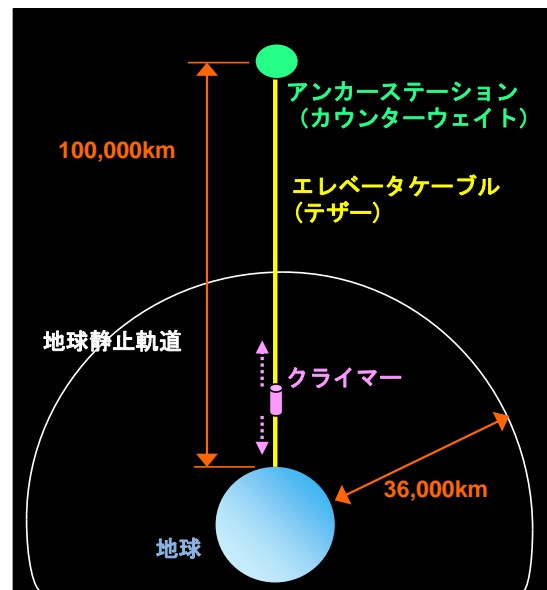


図1 宇宙エレベーターの概略

### 2. 宇宙エレベーターの原理・運動方程式

宇宙エレベーターは図1に示すように、主としてケーブル、ケーブルを昇降するクライマー、張力調整のためのカウンターウェイトで構成される。ケーブルは宇宙空間で万有引力と地球の自転による遠心力をうけるが、ケーブルを地上に固定し静止軌道高度以上の高度まで伸展させると、図2に示すような勾配をもつ重力場のために、静止軌道高度までは遠心力より万有引力の方が強いので地球方向の力を受けるが、静止軌道高度以上では遠心力の方が強くなるため宇宙方向の力を受ける。そのため静止軌道を境にケーブルに逆向きの力が作用するので、これによりケーブルに張力が発生する。次にケーブルの回転について考える。図2に示したような重力場でケーブルが安定して回転するためには、その重心が静止軌道上になければならない。これはつまりケーブルに作用する万有引力と遠心力が釣り合うことに等しい。この釣合からケーブルに必要な全長を求めることができ約 144000km になる。実際の宇宙エレベ

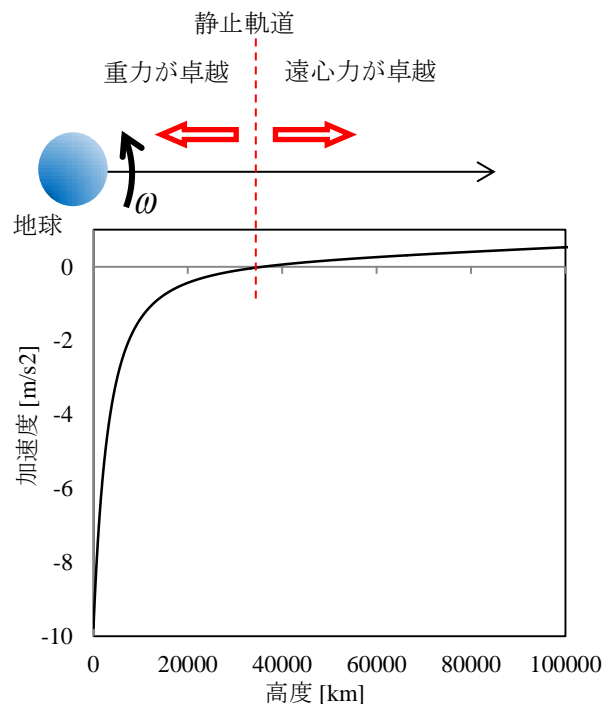


図2 万有引力・遠心力による加速度

エレベーターケーブルについては、ケーブルに生じる応力が一定となるように断面積を変化させテーパー形状とすることで同じ強度でもより小さい質量で伸展させることができる。その形状は各位置での張力を全体で積分することで得られ、地球中心からの距離  $r$  でのケーブル断面積  $A(r)$  は(1)式で与えられ、図3で示されるような曲線分布を取る。

$$A(r) = A_e \exp \left[ \frac{\rho}{\sigma} \left( \mu \left( \frac{1}{R_e} - \frac{1}{r} \right) - \frac{\omega^2}{2} (r^2 - R_e^2) \right) \right] \quad (1)$$

$A_e$ : 地上での断面積       $\rho$ : 密度  
 $\sigma$ : 応力                       $\mu$ : 重力定数  
 $R_e$ : 地球半径                 $\omega$ : 自転角速度

また、カウンターウェイト質量  $m_{cw}$  は(1)式より

$$m_{cw} = \rho A(R_{cw}) / (R_{cw} \omega^2 - \mu / R_{cw}^2) \quad (2)$$

として求めることができる。ここで  $R_{cw}$  はカウンターウェイトの地球中心からの距離である。

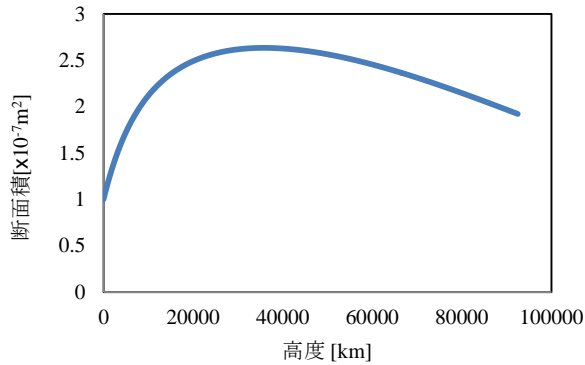


図3 応力一定の断面積

### 3. 宇宙エレベーターのモデル化

本研究では、ケーブルを 925 個の要素に分割して多質点系で近似し、個々の質点に対して運動方程式を解くことでケーブルの運動を解析する。また、クライマー、カウンターウェイトを質点とし、図 4.1 のような回転座標系を採用し、ケーブルに作用する力としては、万有引力、遠心力、コリオリ力のほか、ケーブルに生じる応力が非常に大きく変形を考慮する必要があるため、弾性力も考える。従って質点  $i$  ( $i=1,2,\dots,925$ ) の位置ベクトル  $\mathbf{r}_i$  に対する運動方程式は以下ようになる。なお、図 4.1 のような  $x$  方向は西向き、 $y$  方向は高度方向となる。

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = 2m_i \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + m_i \mathbf{r}_i \omega^2 - \frac{\mu m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i - k_{i-1} \frac{|\Delta \mathbf{r}_{i-1}| - l_0}{\Delta \mathbf{r}_{i-1}} \Delta \mathbf{r}_{i-1} + k_i \frac{|\Delta \mathbf{r}_i| - l_0}{\Delta \mathbf{r}_i} \Delta \mathbf{r}_i \quad (3)$$

$$m_i = \rho A_i l_0$$

$$A_i = A_e \exp \left[ \frac{\rho g R_E^2}{\sigma} \left( \frac{1}{R_E} + \frac{R_E^2}{2R_{GEO}^2} - \frac{1}{r_i} - \frac{r_i^2}{2R_{GEO}^2} \right) \right]$$

$k_i$ : 質点  $i, i+1$  の間の弾性定数

$$k_i = \frac{EA_i}{l_0}$$

$l_0$ : 質点間の自然長

$$\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i$$

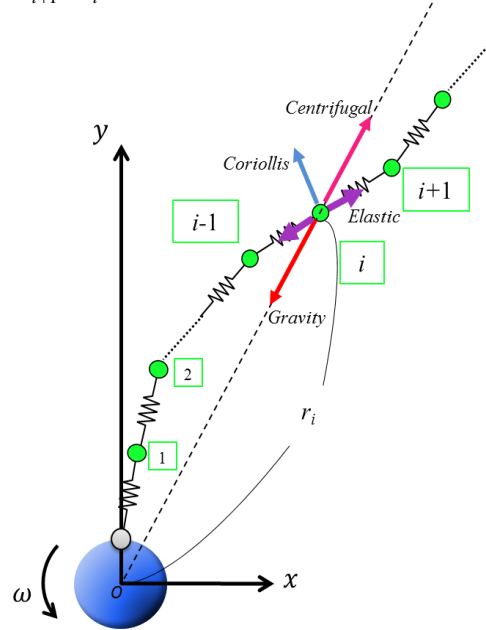


図 4.1 計算モデル

$i$  番目の質点について計算する際にクライマーが  $i-1, i+1$  番目の質点の間にある場合はクライマーからの力を考慮する。今図 5 のようにクライマーが第  $i$  質点と第  $i+1$  質点の間にあるときのことを考える。クライマーにはコリオリ力、遠心力、万有引力が作用し、ケーブルとの摩擦は無視する。クライマーの位置ベクトルを  $\mathbf{r}_{cl}$ 、質量を  $m_{cl}$ 、クライマー

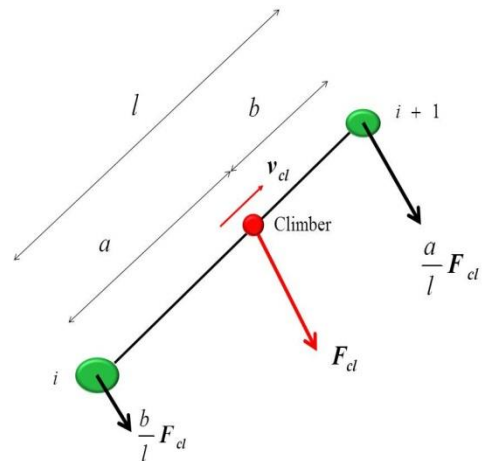


図 4.2 質点を受けるクライマーからの力

の速度を  $\mathbf{v}_{cl}$  とするときクライマーに働く力  $\mathbf{F}_{cl}$  は次式で表される。

$$\mathbf{v}_{cl} = v_{cl} \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|} \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_{cl} = m_{cl} \mathbf{r}_{cl} \omega^2 - \frac{\mu M_{cl}}{r_{cl}^3} \mathbf{r}_{cl} + 2m_{cl} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{cl} \quad (5)$$

図 4.2 で  $l = |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|$ ,  $a = |\mathbf{r}_{cl} - \mathbf{r}_i|$ ,  $b = |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_{cl}|$  であり第  $i$  質点, 第  $i+1$  質点にはたらくクライマーからの力は, 図 3 から質点間距離の加重平均によりそれぞれ  $\mathbf{F}_{cl} b/l$ ,  $\mathbf{F}_{cl} a/l$  とする。クライマーからの力を考慮するときはこれらの力を運動方程式に加えて解く。本研究では 4 次の Runge-Kutta 法を用いて計算を行い, 境界条件として, 地上の端点は固定, カウンターウェイト部は自由端とする。また, ケーブルの物性値は CNT (カーボンナノチューブ) を参考にした。計算条件を表 1 に示す。なお, クライマー質量は大林組建設構想<sup>6)</sup>の初期運用時のクライマーを想定した。

表 1 計算条件

質点数	925 質点間自然長:100km
ケーブル全長(自然長)	92500km
ケーブル地上部の断面積	$1 \times 10^{-7} \text{m}^2$
応力	65GPa
ケーブル密度	$1.3 \text{g/m}^3$
ヤング率	1000GPa
カウンターウェイト質量	27150ton
クライマー質量	0.5ton

## 4. 解析結果

### 4.1 平衡時の断面積分布の決定

表 1 の条件の下で, 万有引力, 遠心力, 弾性力の釣合状態を求めるために歪が無く静止した状態から計算を行った。図 5 は, ケーブルが初期状態から変位し, 十分時間が経過した後  $x$  方向の変位が 0 となった時のケーブル内部の応力の分布である。

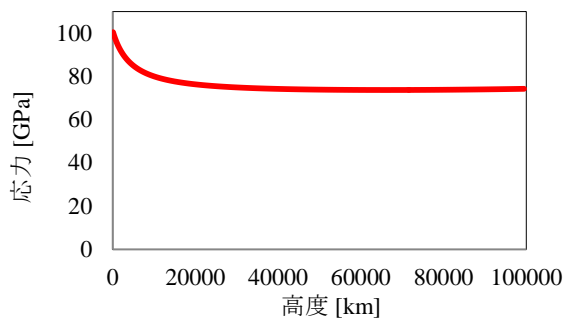


図 5 ケーブルの応力分布

約 20000km 以上では一定であるが, それ以下の地球

側では他の部分よりも応力が高い状態となっている。計算の結果, 上端, つまりカウンターウェイトの位置は 92500km から 99505km まで上昇し, これより平均歪は 0.076 となりこのケーブルの伸び変形により, ケーブルは初期状態よりも小さい断面積で張力を受けることになる。このため面積の勾配が著しい地球から静止軌道までの領域では応力が大きくなってしまふ。なお, 張力分布は図 6 のようになった。そこで応力が一定となるように, この図 6 の張力分布に

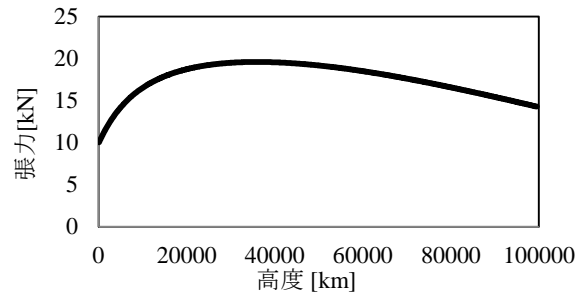


図 6 張力分布

合わせて断面積を再設定し, 再度平衡状態を求める計算を行い, 得られた応力が図 7 である。先の結果と比べ応力の一定性は改善され, 平均値は約 65GPa となった。張力は図 8 に示す。このように断面積を張力から定義することで応力をより一様にできるので, この操作を繰り返すことで一定応力の断面積を得ることが期待される。この操作を繰り返した得られた応力及び断面積分布をそれぞれ図 9, 10 に示す。

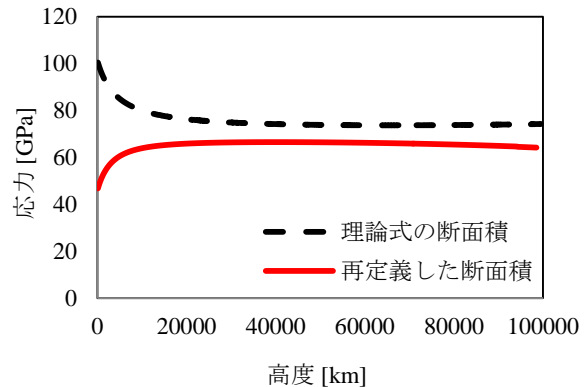


図 7 断面積変更後のケーブルの応力

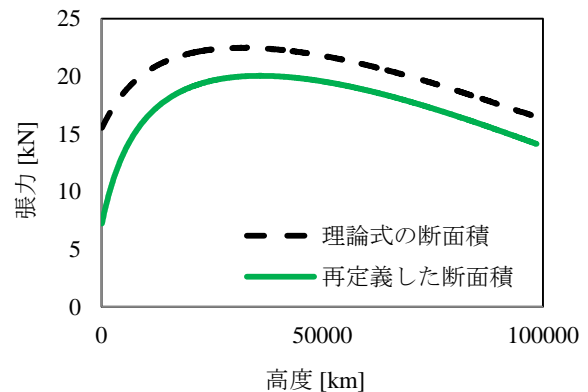


図 8 断面積調整後の張力

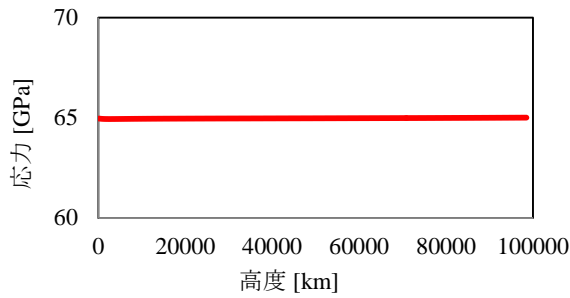


図9 繰返し平衡計算による応力分布

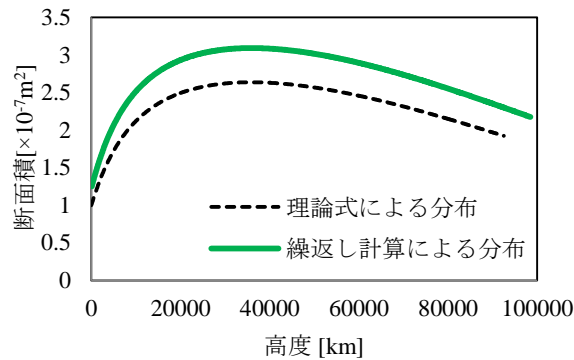


図10 一定応力時の断面積分布

以後の計算では初期状態として、これら応力分布、断面積分布を採用し、初速は0とする。つまり、初期状態ではケーブルは平衡状態にありy軸上に直立、x成分は0とする。

#### 4.2 クライマー走行の解析結果

(1)地上からカウンターウェイトまでの上昇  
クライマーは  $0.5\text{m/s}^2$  で  $300\text{km/h}$  まで加速し、その後  $300\text{km/h}$  で等速運動する。図11はケーブルの50000sec毎の位置とクライマーの軌跡を示している。ケーブルは始め-x方向(東向き)に変位し、その後+x方向(西

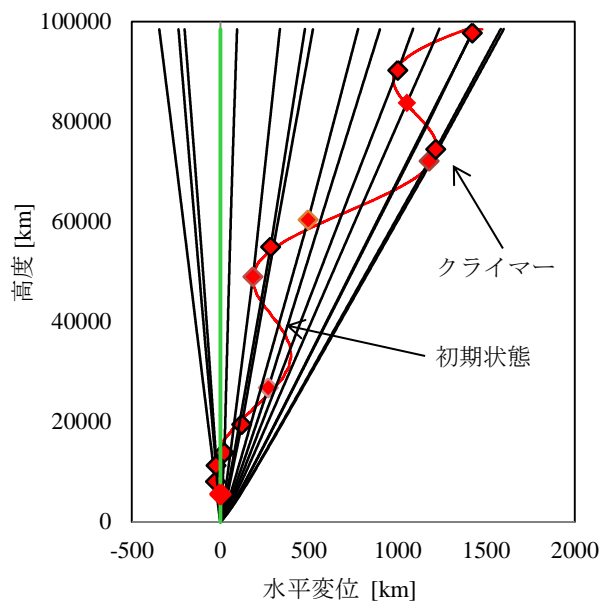


図11 クライマー上昇時のケーブル変位(50000秒ごとの描写)

向き)に変位している。この運動についてケーブルの応力とクライマーに作用する力から考える。図12a, 12b, 13がそれぞれ応力と(5)式で表される力の水平成分を表している。

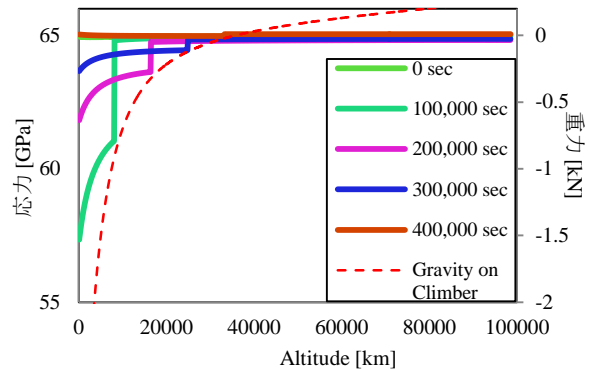


図12a 応力の変化(400,000secまで)

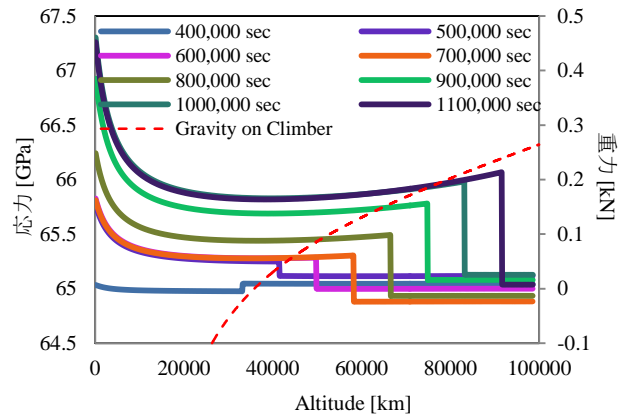


図12b 応力の変化(400,000sec以降)

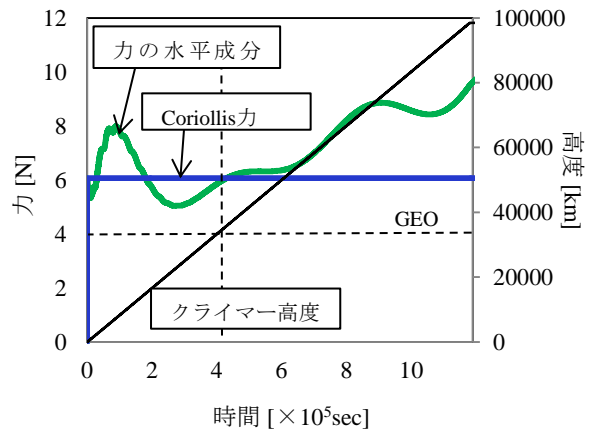


図13 クライマーに作用する力の水平成分と高度

まず応力の変化について、図12a, bは応力の100,000秒毎の変化を示している。初期状態において全長で65GPaの値をとっているが、図からは急激な変化が見られる。これはクライマーによるものであり、実際応力の変化量が図2で示した重力の分布に対応しておりクライマーが受ける重力傾斜力を反映した結果となっている。図12aはクライマーが静止軌道以下にあるときの応力変化を示しており、クライマーの位置から下方は応力が低下しているが、こ

これはクライマーに作用する重力が、クライマーより上にあるケーブルを引っ張り同時にクライマーより下のケーブルを緩ませるためである。したがって、クライマー位置より下にあるケーブルの応力は低下する。

一方、図 12b のように、クライマーが静止軌道以上にあるとき、クライマーは高度方向の力を受けるので、静止軌道以下にあるときと逆にクライマーは上方のケーブルを緩ませ、下方のケーブルを引っ張るが、クライマーより上方のケーブルは緩んでもカウンターウェイトが自由端なので応力は低下しない。また、下方のケーブルは、クライマーに宇宙方向へ引っ張られると初期状態より小さい断面積で地表の強い重力を受けるので、地表付近のケーブルの応力が増加することになる。

水平方向の変位について、変位は最大でおおよそ 1500km でケーブルの振れ角は  $0.9^\circ$  となった。そのため走行中ケーブルはほぼ直立していると思わせるので、クライマーの速度成分は y 方向のみと考えてよく、そのため図 13 のようにクライマーに作用するコリオリ力の水平成分は、初期の加速中を除き一定で、クライマーが上昇するにつれてクライマーからケーブルに作用する力はコリオリ力の影響が大きくなり、結果として西向きにケーブルを変位させる。

次にクライマー速度の影響について考える。図 14 はクライマー速度を 100, 200, 300, 400km/h と変化させて計算した時のクライマーの軌跡を示している。

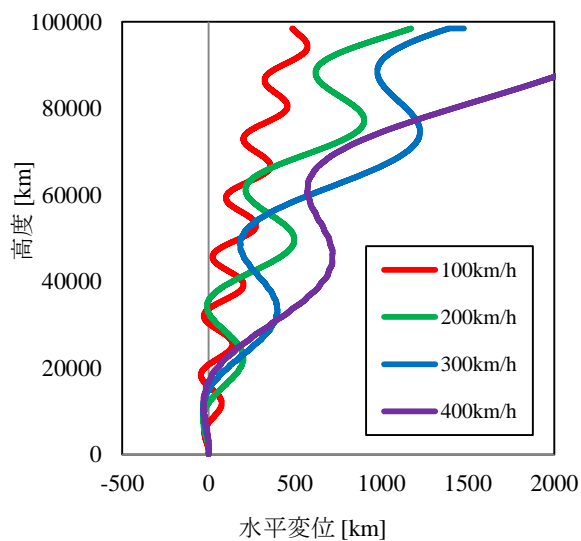


図 14 速度別のクライマーの軌跡

速度が大きいと変位が大きくなるのは、先述のように水平方向の変位がコリオリ力に起因するためである。ここで水平方向の振動についてみると、図 15a, b にあるようにそれぞれの速度で一定の周期で振動しているが、クライマーの速度によって振動数が若干変化している。ケーブルはクライマーとともに運動しているので、クライマーの単純な上昇がケーブルを強制振動させており、その振動数はクライマー速度に依存し、高速度なほど振動数が高くなる。

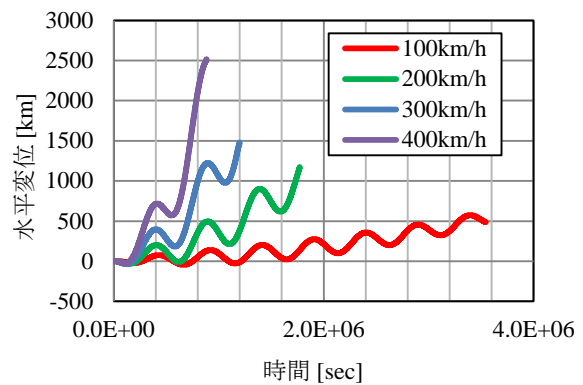


図 15a 水平方向の変位の時間変化

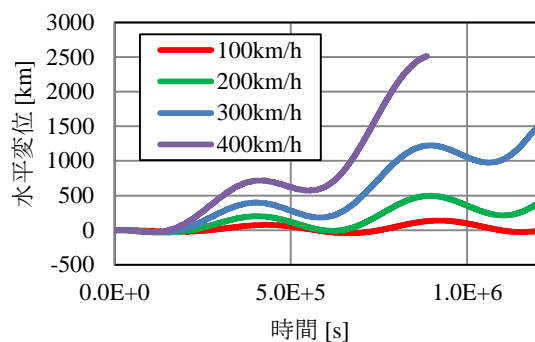


図 15b 水平方向の変位の時間変化(詳細)

図 9 はケーブルの 20000 秒ごとの変位を示している (2)カウンターウェイトから地上までの下降

(1)の場合と同様の加速条件で、300km/h で等速運動し、カウンターウェイトから地上まで下降する。この時のケーブルの挙動とクライマーの軌跡は図 16 に示してある。

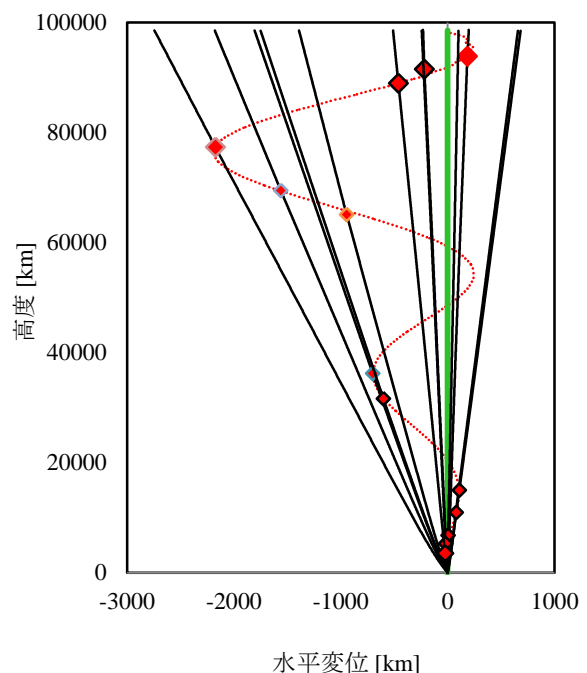


図 16 クライマー下降時のケーブル変位 (50000 秒ごとの描写)

下降の場合、上昇とはクライマーの進行方向が逆になるため、クライマーに作用するコリオリ力も上昇時とは逆向きになり、そのため変位の向きも反対になる。この結果では最大変位 3000km、揺れ角 1.7° となり、大きさは上昇の場合より大きくなった。

### (3)クライマー2 台の同時昇降

上昇と下降でクライマーの軌跡を見ると、クライマーの振動数はほぼ等しく変位方向が反対になっていることから、クライマーを同時に昇降させることで変位及び振動の抑制が期待できる。図 18 は 2 台のクライマーを、1 台は地上からカウンターウェイトまで、もう 1 台をカウンターウェイトから地上まで同時発進し 0.5m/s<sup>2</sup> で加速後 300km/h で等速走行するときのケーブルの挙動とクライマーの軌跡である。

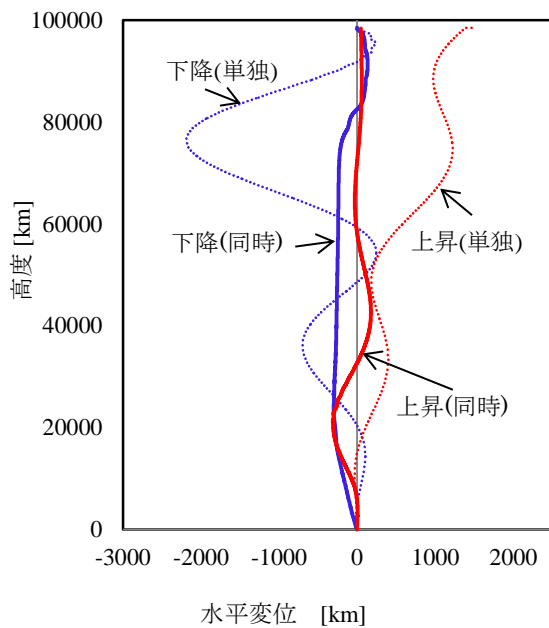


図 17 同時昇降のクライマーの軌跡

図 17 より上昇のみまたは下降のみの場合より、同時昇降のときの方がクライマーの変位が小さく振動も抑制されており、同時昇降の効果が得られ、1000km 以上あった変位が、上昇・下降ともに 500km 程度に抑えられている。

## 5. 結論

宇宙エレベーターの設計において重要なケーブルダイナミクスに与えるクライマー走行の影響について検討した。クライマーに作用する Coriolis 力によりケーブルは水平方向に変位し、またケーブルを振動させ、その振動数は走行速度が大きい程大きくなる。またケーブルの水平方向への変位の方向はクライマーの上昇と下降で逆になりその変位量は 1000km を超えるが、上昇と下降を同時に行うことで

変位が打ち消しあい、500km 以内の変位となり、クライマーの上昇・下降同時運用はケーブル変位抑制の手段の一つとして有効であると考えられる。

### 参考文献

- 1) Pearson, J, The Orbital Tower:a Spacecraft Launcher Using the Earth's Rotational Energy, Acta Astronautica, Vol.2,pp.785-799,1975
- 2) Edwards, B.C, Design and Deployment of a Space Elevator , Acta Astronautica, Vol.47, No.10, pp.735-744, 2007
- 3) Lang, D.D, Approximating Aerodynamic Response of the Space Elevator to Lower Atmospheric Wind, [http://home.comcast.net/~GTOSS/Aero\\_Paper.htm](http://home.comcast.net/~GTOSS/Aero_Paper.htm)
- 4) Williams, P, Dynamic Multibody Modeling for the Tethered Space Elevator, Acta Astronautica,Vol.65, pp.399-422, 2009
- 5) Cohen, S S,The Effect of Climber Transit on the Space Elevator, Acta Astronautica,Vol.64, pp.538-553,2009
- 6) 株式会社大林組, 季刊大林 No. 53, pp38-39, 2012