

## STEP-2013-053

# 双曲型方程式系による電子流体計算を用いたホールスラストの Hybrid PIC シミュレーション

川嶋嶺<sup>1</sup>, 小紫公也<sup>2</sup>, 小泉宏之<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

<sup>2</sup> 東京大学大学院新領域創成科学研究科先端エネルギー工学専攻

<sup>3</sup> 東京大学大学院先端科学技術研究センター

---

Hybrid PIC 法によるプラズマ計算において, 準中性プラズマ中電子流体の方程式に現れる交差拡散項が, 計算の安定性を著しく損ねるといった問題があった. 著者らは擬似時間発展項を用いて楕円型及び放物型方程式を双曲型方程式系に分解することで, 交差拡散の問題を回避する新しいアプローチを提案した. 本発表ではこのアプローチによる電子流体の計算手法を説明し, Hybrid PIC 法によるホールスラストの計算結果について議論する.

---

## 1. 背景

ホールスラスト等の多くの実用上のプラズマでは準中性仮定が妥当である. 準中性仮定下ではさらにプラズマ近似を用いることにより, 空間電位はガウスの法則を通してではなく, 電子流体方程式を通して求められる. このとき, 従来手法では電荷保存式と運動量保存式を連立して楕円型方程式を導出し, この楕円方程式が境界値問題として電位を求めるために用いられていた<sup>1)</sup>. しかし, この電子流体方程式は磁場の影響のため異方性を持ち, 磁力線が計算格子と角度を持って交わる場合楕円型方程式は交差拡散項を含む. 交差拡散項を持つ楕円型方程式はSOR法等の反復法では安定的に解くことが難しい. さらにエネルギー方程式は非線形方程式であるため, 直接法により電子流体方程式を解くことも難しい. このため, 磁場に沿った計算格子を取るという対処法が提案されたが<sup>2)</sup>, この方法も複雑な磁場形状には対応が困難である.

このため著者らは双曲型方程式を用いて楕円型方程式を解く手法を提案した<sup>3)</sup>. この手法では拡散方程式は複数の一階の微分方程式系に分解される. 結果として得られる双曲型方程式系は交差拡散を含まず, 風上差分を適用することで安定的に解くことが可能である.

ホールスラストの解析手法としては, イオン・中性粒子を粒子として扱い, 電子を流体として解く Hybrid モデルが最も一般的である<sup>4,5)</sup>. 計算対象として主な関心がある

のは, 中性粒子・イオンの時間スケールであるため, Hybrid モデルでは各タイムステップにおいて, 電子流体は通常定常状態まで解かれる. すなわち Hybrid PIC 法においては, 各タイムステップにおける電子流体方程式をいかに速く解くかが重要である. 本稿では, 双曲型方程式系による電子流体方程式を Hybrid PIC 法に適用した場合の実現可能性について議論する.

## 2. 双曲型方程式系による電子流体計算

### 2.1 電荷保存式

準中性仮定下では, 電子密度はイオン電荷密度に等しいとして与えられ, 電子の時間スケールでは電子密度は時間変化しないと考える. ゆえに, 以下の電荷保存式が成り立つ.

$$\nabla \cdot (\vec{j}_i + \vec{j}_e) = 0 \quad (1)$$

$$\iff \nabla \cdot (n_e \vec{u}_e) = \frac{1}{e} \nabla \cdot \vec{j}_i \quad (2)$$

$\vec{j}_i$  はイオン電流密度であり, イオンに関する粒子法計算により求められる. 準中性仮定のため (2) 式に電子密度の時間微分項は現れず, 準中性プラズマ中電子流体は非圧縮性流体のような特徴を持っている.

プラズマ近似を用いた場合, 電位を電子の流体方程式系から求めなければならないため, (2) 式に電位の擬似時間発展項を導入する.

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot (n_e \vec{u}_e) = -\frac{1}{e} \nabla \cdot \vec{j}_i \quad (3)$$

$a$  は  $[\text{Vm}^3]$  の単位を持つ任意の加速係数である.

### 2.2 運動量保存式

電子の運動量保存式においては, 電子慣性を無視し, 流体要素に働く力が釣り合っているとして以下の式が成り立つ.

$$0 = -\nabla \cdot (en_e T_e) + en_e \nabla \phi - en_e \vec{u}_e \times \vec{B} - m_e n_e \nu_{col} \vec{u}_e \quad (4)$$

ここで  $\nu_{col}$  は電子の衝突周波数であり  $-m_e n_e \nu_{col} \vec{u}_e$  は電子の中性粒子との衝突による抵抗力を表す. この式をさらに変形し, 電子流速を電子移動度を用いて表すと,

$$n_e u_e = n_e [\mu] \nabla \phi - [\mu] \nabla (n_e T_e) \quad (5)$$

$[\mu]$  は電子移動度のテンソルであり, 以下のように磁場に平行方向と垂直方向の移動度を座標系に沿う様に回転行列により回転したものである.

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_x & \mu_c \\ \mu_c & \mu_y \end{bmatrix} = \Theta^{-1} \begin{bmatrix} \mu_{\parallel} & \\ & \mu_{\perp} \end{bmatrix} \Theta \quad (6)$$

磁力線に垂直方向の電子移動度にはボーム拡散が用いられる．時間発展型の双曲型方程式系を利用するために，流速を変数から消去せず，各方向運動量保存式に運動量に関する擬似時間発展項を導入する．

$$\begin{bmatrix} b_1 \nu_{col} & \\ & b_2 \nu_{col} \end{bmatrix}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} (n_e \vec{u}_e) + n_e \vec{u}_e = n_e [\mu] \nabla \phi - [\mu] \nabla (n_e T_e) \quad (7)$$

ここで  $b_1$  及び  $b_2$  は無次元の任意の加速係数であり， $1/\nu_{col}$  を参照時間として用いている．

双曲型方程式系は一階の微分方程式系となっており，交差拡散項は現れない．この点が双曲型方程式系によるアプローチの最大の利点である．このアプローチは非圧縮性流体における擬似圧縮性解法に類似しており，効率的な圧縮性流体の解法が適用できる，対流項に関する境界条件のみを取り扱えば良い，などの擬似圧縮性解法の利点も持ち合わせている．しかし，付加された電位と運動量の擬似時間発展項は物理的な意味を持たないため，擬似時間発展項は反復法で解く際に 0 に収束させる必要がある．

### 2.3 エネルギー保存式

電子のエネルギー保存を考える際には，電子の質量が十分小さいとして，内部エネルギー保存を考える．

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} n_e T_e \right) + \nabla \cdot \left( \frac{5}{2} n_e \vec{u}_e T_e - \frac{5}{2} n_e T_e [\mu] \nabla T_e \right) = n_e \vec{u}_e \cdot \nabla \phi - \alpha \varepsilon_{ion} n_e \nu_{ion} \quad (8)$$

ここで， $\alpha$  は電離・励起・放射によるエネルギー損失をひとまとめにして考えるための係数であり，様々なガス種に対して実験的に電子温度の関数として求められている<sup>6)</sup>．(8) 式は移流拡散方程式であるが，交差拡散を含んでいるため反復法により安定的に解くことが困難である．

エネルギー保存式についても，擬似時間発展項を導入することにより一階の微分方程式系に分解することができる．変数の取り方には任意性があるが，ここでは拡散フラックスを表す  $\vec{g}$  を新たな変数として導入する．

$$\vec{g} = -\frac{5}{2} n_e T_e [\mu] \nabla T_e \quad (9)$$

$\vec{g}$  を用いて，(8) 式は以下の拡散項を含まない一階の微分方程式となる．

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} n_e T_e \right) + \nabla \cdot \left( \frac{5}{2} n_e \vec{u}_e T_e + \vec{g} \right) = n_e \vec{u}_e \cdot \nabla \phi - \alpha \varepsilon_{ion} n_e \nu_{ion} \quad (10)$$

(9) 式についても時間発展の方程式として解くために，擬似時間発展項を導入する．

$$\begin{bmatrix} c_1 \nu_{col} & \\ & c_2 \nu_{col} \end{bmatrix}^{-1} \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{g} = \frac{5}{2} n_e T_e [\mu] \nabla T_e \quad (11)$$

ここで  $c_1, c_2$  は任意の加速係数である．ここで導入した  $\vec{g}$  の擬似時間発展項は物理的な

意味を持たないため 0 に収束させる必要があるが, (10) 式の内部エネルギー保存式の時間微分項は擬似的なものでないことに注意が必要である. (10) 式を時間発展問題として解く場合には擬似時間発展項を用いた解法は厳密には妥当性を失う. その場合には (11) 式における擬似時間発展項は誤差として扱うことになる.

### 3. 計算手法及び計算対象

#### 3.1 双曲型方程式系の計算手法

電子流体計算では, (12) 式を変数にとって (13) - (16) 式の 6 本の方程式を解く.

$$(\phi, s_x, s_y, i, g_x, g_y) = \left( \phi, n_e u_x, n_e u_y, \frac{3}{2} e n_e T_e, g_x, g_y \right) \quad (12)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{s} = -\frac{1}{e} \nabla \cdot \vec{j}_i \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \nu_{col} & \\ & b_2 \nu_{col} \end{bmatrix}^{-1} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} - n_e [\mu] \nabla \phi + [\mu] \nabla (n_e T_e) = -\vec{s} \quad (14)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{5}{2} e n_e \vec{u} T_e + \vec{g} \right) - e \vec{s} \cdot \nabla \phi = -\alpha \varepsilon_{ion} n_e \nu_{ion} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \nu_{col} & \\ & c_2 \nu_{col} \end{bmatrix}^{-1} \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \frac{5}{2} e n_e T_e [\mu] \nabla T_e = -\vec{g} \quad (16)$$

今回の計算では (13), (14) 式の方程式系から  $\phi$  と  $\vec{s}$  を, (15), (16) 式の方程式系から  $i$  と  $\vec{g}$  を別々に解き, 二つの方程式系を反復することにより収束解を求めた. それぞれの方程式系について Steger-Warming の流束ベクトル分離法を適用し, 一次精度線形風上差分を用いた. 今回の計算ではさらに差分式を  $\Delta$  型陰解法の表式に変形し, LU-ADI 法を用いて陰解法とした. CFL 数は 30 に設定した.

#### 3.2 Hybrid PIC 法の計算手法

Hybrid PIC 法ではイオン・中性粒子は PIC 法で, 電子は流体近似を用いて解かれる. 中性粒子については無衝突の自由運動とし, チャネル壁に衝突した場合には乱反射させている. またイオンの運動は以下の運動方程式により解かれる.

$$M \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = e \left( \vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B} \right) \quad (17)$$

この式を 4 次のルンゲクッタ法を用いて解いた. イオンが壁面に衝突した際には中性粒子に転化して乱反射される. また以下の式に基づいてイオン生成を行う.

$$q_{ion} = n_e n_n \langle \sigma_{en} \nu_{ion} \rangle \quad (18)$$

$\sigma_{en}$  は電子-中性粒子間の衝突断面積,  $\nu_{ion}$  は電離衝突の衝突周波数であり, 共に電子温度の関数として与えられる. 中性粒子・イオン共に, 1セルあたりのマクロパーティクル数が 50 - 200 個程度になるようにマクロパーティクルのサイズが決定される. Hybrid PIC 法の計算フローとしては, 中性粒子 PIC 計算, イオン PIC 計算, 双曲型方程式系による電子流体計算の順に行われ, 1 タイムステップが経過する.

### 3.3 計算対象

まず双曲型方程式系による電子流体計算の検証を行う. 一様中性粒子密度・イオン密度を仮定し, 電子部分のみで計算を行う. 1 mT の磁場を, 従来の楕円型方程式による解法では交差拡散の影響が最も大きくなる  $45^\circ$  の角度で印加した. ディリクレ条件として与えた境界条件は Fig. 1 の通りである.

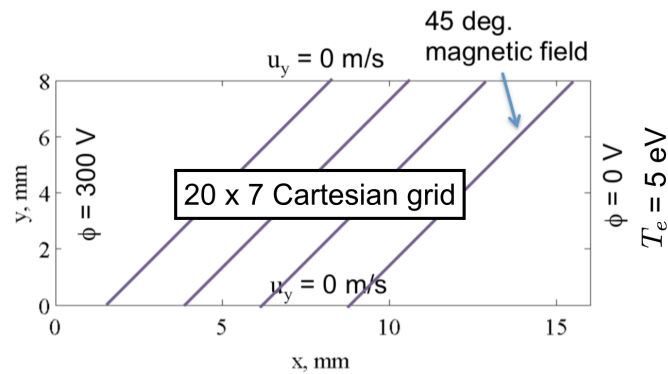


Fig. 1. 双曲型方程式系による電子流体計算の検証に用いた計算領域と境界条件.

次に実際にホールスラストを模擬した計算条件, 磁場形状で計算を行った. Fig. 2 に示すように, 主なイオン生成領域, イオン加速領域となるチャンネル出口付近に計算領域を取っている. チャンネル壁は絶縁体であるため, チャンネル壁に流れる電子流束はイオン流束に等しいとして電子流体計算の境界条件を与えている. 計算に用いた磁場形状は Fig. 3 に示すもので, プラズマレンズ効果を期待して磁力線を湾曲させている<sup>7)</sup>.

## 4. 結果と考察

### 4.1 双曲型方程式系による電子流体計算の検証

Fig. 1 の計算条件を用いて電子流体計算の検証を行った. 計算により得られた空間電位分布, 流束のベクトル図, 電子温度分布を Fig. 4 に示す. 空間電位, 電子温度分布は傾斜した磁場を反映したものとなっている. また上下の境界で境界に向かう流速が 0 になっており, 計算結果は境界条件を反映している. また双曲型方程式系による電子流体計算では擬似時間発展項を用いているため, これら項が 0 に収束している必要がある.

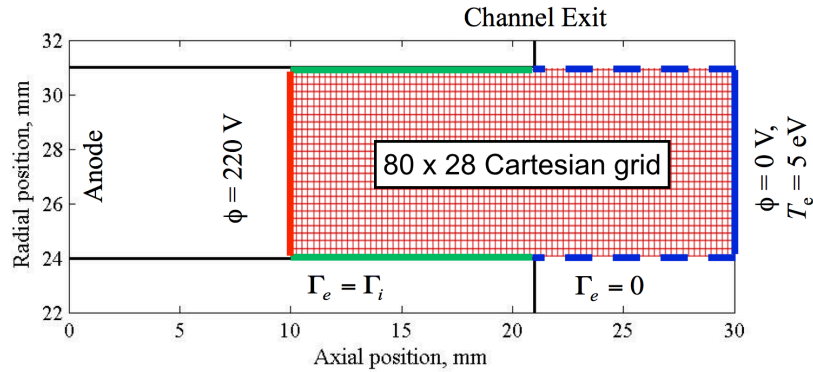


Fig. 2. Hybrid PIC 法により計算されたホールスラスタを模擬した計算条件。

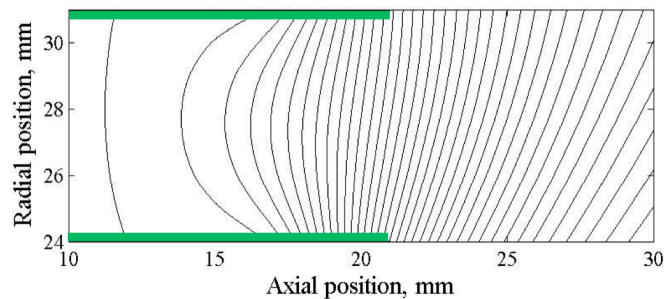


Fig. 3. 計算に用いた磁場形状．太線はチャンネル壁の位置を表す．

二つの方程式系における各変数の収束性を Fig. 5 に示す．いずれの変数の変化量も計算機誤差程度まで 0 に収束している事がわかる．このことから，擬似時間発展項は 0 に収束し，双曲型方程式系による電子流体計算が妥当であることが分かる．

#### 4.2 Hybrid PIC 法によるホールスラスタ計算

Hybrid PIC 法によるホールスラスタを模擬した計算条件で得られた空間電位分布と電子温度分布を Fig. 6 に示す．磁場に沿った電子温度分布や，磁力線と壁面シーブ効果を反映した空間電位分布が得られていることが分かる．しかしながら，これらの計算結果は未だ収束に至っていない．電子流体の計算にかかる時間が依然として大きく，Hybrid PIC 計算全体で収束させるには数週間程度の計算時間が必要であることが分かった．ゆえに更に電子流体計算にかかる計算時間を短縮する必要がある．現在 Fig. 5 の通り，収束に至るまで 10000 ステップ程度の反復回数が必要である．この収束性を改善させるために全ての保存式，すなわち (13) - (16) 式を一つの双曲型方程式系に統合して計算することで，収束性改善が期待される．この点が今後の課題である．

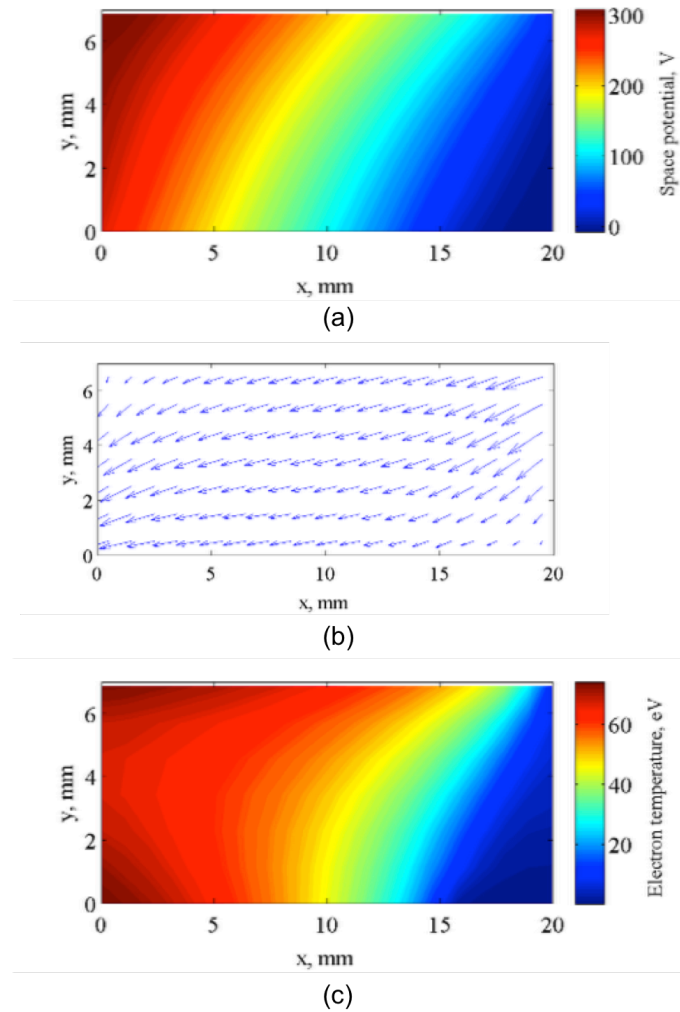


Fig. 4. 電子流体計算の検証計算における計算結果．(a) 空間電位分布，(b) 流速のベクトル図，(c) 電子温度分布．

## 5. 結論

磁場印加下での準中性プラズマ中電子流体に対し双曲型方程式系によるアプローチを適用した場合，直交格子を用いても風上差分を適用することで安定的に解くことができる．本稿では電荷保存式と運動量保存式からなる方程式系とエネルギー方程式とを連成させて解く手法を提案した．ホールスラストと同等の境界条件において，交差拡散の影響が極大となる，直交格子に対し  $45^\circ$  の傾斜をもつ磁場を印加した場合，空間電位，流速，電子温度を安定的に解けることを確認した．しかしながら，実際にホールスラストの Hybrid PIC 法によるプラズマ計算に使用した場合，電子流体計算にかかる計算コストが非常に大きい．双曲型方程式系による電子流体計算において，全ての保存式を一つの方程式系に統合し，さらに収束を速めることが今後の課題である．

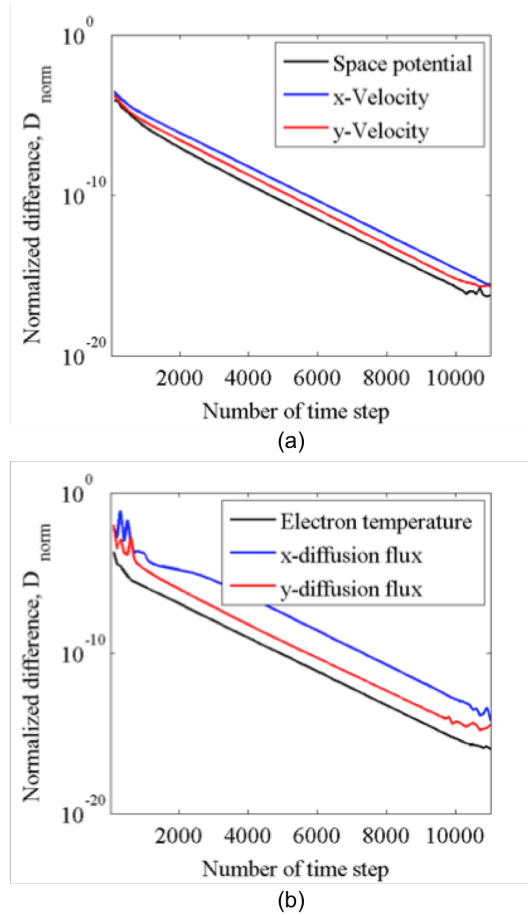


Fig. 5. 二つの方程式系における変数の収束性．(a) 電位及び流速の収束性．(b) 電子温度及び拡散フラックスの収束性．いずれの変数の変化量も無視できるほど小さく収束している．

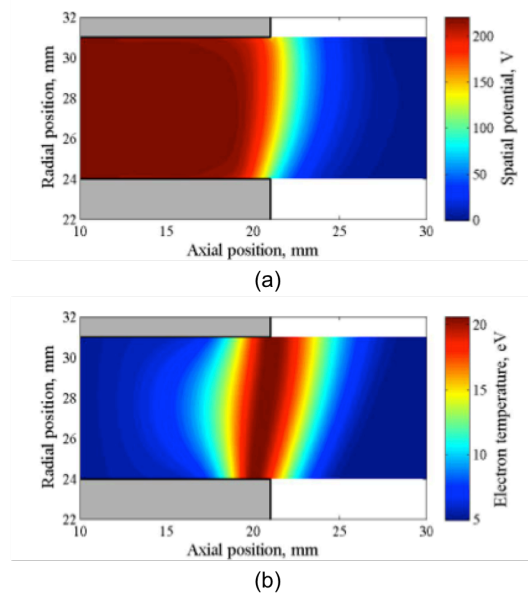


Fig. 6. Hybrid PIC 法によるホールスラスタを模擬した計算条件での計算結果．(a) 空間電位分布．(b) 電子温度分布．



## 参考文献

- 1) T. D. Rognlien, J. L. Milovich, M. E. Rensink, and G. D. Porter, "A fully implicit, time dependent 2-D fluid code for modeling tokamak edge plasmas," *Journal of Nuclear Materials*, 196-198, pp.347-351, 1992.
- 2) I. G. Mikellides, I. Katz, R. R. Hofer, D. M. Goebel, K. de Grys, and A. Mathers, "Magnetic shielding of the channel walls in a Hall plasma accelerator," *Physics of Plasmas*, 18, 033501, 2011.
- 3) 川嶋嶺, 小泉宏之, 小紫公也, "準中性プラズマ中電子流体の擬似時間発展解法," 第27回 数値流体力学シンポジウム, 名古屋大学, D04-3, 2013.
- 4) F. I. Parra, E. Ahedo, J. M. Fife, and M. Martinez-Sanchez, "A two-dimensional hybrid model of the Hall thruster discharge," *Journal of Applied Physics*, 100, 023304, 2006.
- 5) R. Kawashima, R. Kaneko, S. Cho, K. Komurasaki, H. Koizumi, Y. Arakawa, "Effect of Thruster Scaling on Pre-Sheath and Ion-Loss Region in Hall Thrusters," *IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference*, Seoul, Korea, 2012.
- 6) J. V. Dugan and R. J. Sovie, "Volume Ion Production Costs in Tenuous Plasmas: A General Atom Theory and Detailed Results for Helium, Argon and Cesium," NASA TN D-4150.
- 7) R. R. Hofer, P. Y. Peterson, A. D. Gallimore, "A High Specific Impulse Two-Stage Hall Thruster with Plasma Lens Focusing," *27th International Electric Propulsion Conference*, IEPC-01-036, 2001.