

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

圧縮性Euler方程式の有限体積法計算における流れと格子の 斜交による影響について

A Discussion on the Effect of Computational Mesh Oblique to Stream

相曾 秀昭
Hideaki AISO

2018年3月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

圧縮性 Euler 方程式の有限体積法計算における流れと格子の斜交による影響について

相曾秀昭^{*1}

A Discussion on the Effect of Computational Mesh Oblique to Stream

by
Hideaki AISO^{*1}

ABSTRACT

The cartesian grid is widely used in practical CFD computation nowadays. A few of the reasons are the large cost of curvilinear grid that can properly fit the object of computation and fluid phenomena and the advantage of structured grid in computation performance. On the other hand, the disadvantage in quality of computational result is well known. It is inevitable that the numerical result is blunted when the fluid phenomena, i.e. stream and shock surface etc., occur positioned obliquely to the mesh system. While such blunting effect is explained the technical term “numerical viscosity”, the machinery of numerical behavior is not yet precisely analysed. We do not have to enough mathematical tools to analyse and it is still impossible to give a clear explanation of the effect. In this article we show trial of analysis to give some explanation to the numerical effect.

Keywords: Conservation Law, Compressible Euler Equations, Finite Volume Method, Numerical Viscosity, Computational Grid

概要

CFD 計算の大規模化や一般化に伴い直交構造格子が広く利用されるようになってきている。その理由としては計算対象の物体や流体現象に適合した格子の作成にかかる費用的・時間的コスト、計算実行時の計算速度における構造格子の優位さ等があげられる。しかし、直交構造格子の明らかな欠点として流れの方向や衝撃波面等の流体現象が格子との斜交により格子に適合しない場合には数値的な鈍化等の不都合が発生する事もよく知られる。これらの現象の説明として“数値粘性”というキーワードがよく用いられる。そのような説明でも現象論的にはある程度の説明ができ、不都合発生機構についてそれなりの理解を与える面はあるが、未だに数学的な道具が不十分な事もあり、十分に明快な説明には至っていない場合も多い。このような現状では、数値計算で生じる不都合のそれぞれについてその発生機構の数理的考察を試みることも十分に意味があると考えられる。ここでは、1つの試みとして、流れの方向が格子、より厳密に言えば有限体積間の境界面、に斜交する事によって数値的にはどのような効果が生じているのかを論ずる。

キーワード: 保存則、圧縮性 Euler 方程式、有限体積法、数値粘性、計算格子

doi: 10.20637/JAXA-RR-17-012/0001

^{*} 平成 30 年 2 月 6 日受付 (Received February 6, 2018)

^{*1} 航空技術部門 数値解析技術研究ユニット

(Numerical Simulation Research Unit, Aeronautical Technology Directorate)

1 はじめに

本稿では圧縮性 Euler 方程式の有限体積法数値計算において、流れ方向が計算格子に斜交する場合に数値計算結果の鈍化が生じる現象についての解析の試みを報告する。

現実の流体現象を扱う CFD においては、このような不都合のかなりの部分は流線や衝撃波面等の流体現象に適合した計算格子を用いることにより回避が可能であり、20 世紀半ばの CFD の萌芽の後に 1960 年代から始まる CFD の発展拡大（計算法の発展、計算対象の拡大）の時期においては本稿で論じる不都合への対処の手段は計算格子への現象の適合であって、不都合自体が数理的な解析の対象となる事は殆どなかったようである。実際、そのような観点からの議論を扱っている文献もあまり存在せず、そのような数値現象が議論に現れるのは、計算格子の比較という観点からであったと思われる。

しかし、個々の計算に適合した格子の作成には費用（労力）や時間が必要で、かつその品質確保には属人的なノウハウもしばしば必要とされる。21 世紀に入り顕著になっている、CFD の適用の一般化、解析の大規模化、計算件数の飛躍的増加という環境の中では、個々の数値計算に適合した格子が利用される割合は減少し、直交格子の利用の割合が増大している。このような状況下においては、流体現象が格子に適合していない場合の数値的な不都合（数値計算結果での鈍化や時には滑らかさの喪失）の生成機構の解析やその解決法の提案の重要性が増大している。

数値計算結果の鈍化の説明においては、一般的に数値粘性という用語が用いられ、現象論的また感覚的には比較的分かり易い説明を与え、また計算の改良においてもある程度は有益な概念である。（逆に言えば、このような理由で数値粘性なる用語が広く用いられてきたとも言える。）

しかしながら、数値粘性なる用語は常に一般的かつ厳密な定義を与えられているのではなく、定義なしに用いられることも多い。もちろん殆どの場合はある程度の議論が成立しているもので、過度に問題視する事はないと思われる。しかし数値計算での不都合の発生機構の究明には十分と言えない事も確かである。また、数値粘性（または数値粘性係数）に定義（議論により異なる定義が並立している）を与えての数学的な議論の大半は、Taylor 展開に基く打ち切り誤差解析を行いながらの Modified Equation（適当な次数までの誤差項も考慮した微分方程式）、線形保存則の数値計算法、もしくは従属変数がスカラーであるスカラー保存則の数値計算法での議論¹に関わるものであるか、または、スカラー保存則での議論を非線形保存則の系（従属変数が複数個）に線形的な議論で拡張する場合のものである。つまり、流体現象が格子への不適合により誤差が生じる機構を直接的に解析するような議論はあまり見当たらない。

圧縮性 Euler 方程式の有限体積法による計算で流れの方向が格子に適合しない事による数値的な効果を考察したい。「流れと格子が斜交」なる仮定はより厳密には流体の速度ベクトルと有限体積同士の境界面（検査面とも呼ばれる）とが斜交している（直交でも平行でもない）という事である。また、本稿の議論では有限体積法で各検査面での流束を定める方法について厳密 Riemann 解²に基く Godunov 法近似³[2] に限定するが、有限体積法の原理及び保存則の解の性質に鑑みてこの限定は妥当なものあり、議論の一般性を大きく失うものではないと考えられる。

次節ではこのような状況で、検査面における流束（有限体積法における数値流束）がどのように定められるかを観察する。なお、本稿では 2 次元の場合を考察するが、これらの考察は 3 次元の場合に容易に拡張される。

2 圧縮性 Euler 方程式の有限体積法

圧縮性 Euler 方程式は、任意体積 Ω 内の保存量である質量、運動量、全エネルギーそれぞれの総和のある時間内での変化がその時間内に各保存量の境界 $\partial\Omega$ を通じて出入りする量（各保存量の流束）に等しいという原理から導かれる。

時間変化は微分で記すことにすれば、単位体積当たりの質量 ρ 、運動量 $\rho\mathbf{V}$ （ \mathbf{V} は速度ベクトルとする）、

¹[4] 等がある。[1] も数値粘性と差分近似の関係を論じている。

²物理的な衝撃波管問題の厳密解は多くの流体力学の教科書にあるが、一般的なものとしては例えば [3] を参照のこと。

³Riemann 問題の厳密解を利用するのが Godunov 法であるが、近似解を利用する Godunov 的 (Godunov-like) 等と呼ばれる一群の数値計算法も合わせて参照するのであれば [5] 等もよい。

全エネルギー e について、それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho + \int_{\partial\Omega} (\rho \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{V}) + \int_{\partial\Omega} \{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})(\rho \mathbf{V}) + p \mathbf{n}\} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} e + \int_{\partial\Omega} (e + p)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

のようになる。 p は圧力、 \mathbf{n} は $\partial\Omega$ の各点における外向きの単位法線ベクトルである。有限体積法も (1) の考え方に由来するとも言える。よく知られるように微分方程式の形にも変形され、空間 2 次元の x, y - 直交座標系での保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G} = 0 \quad (2)$$

にもなる。ここで、 $\mathbf{U}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ は u, v をそれぞれ速度ベクトル \mathbf{V} の x, y - 成分として

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{bmatrix} \quad (3)$$

である。 \mathbf{F}, \mathbf{G} は保存則一般としては流束 (関数) と呼ばれる。また本稿では、 ρ, e, p の関係は比熱比を γ とする理想気体であることを仮定する。即ち、

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \quad (4)$$

有限体積法では、計算対象の空間を隙間なく有限体積に分割し、また計算対象の時間も十分に小さい区間に分割する。そして逐次の時間進行で各時間区間毎に隣接有限体積の境界面である検査面を通過する各保存量それぞれの流束を近似計算し、それを各有限体積の各保存量の当該時間区間での変化分に反映させる。有限体積への分割の際、各検査面は近似的には平らである (真っ直ぐで曲がってはいない) とする。

各検査面での流束は、各検査面両側の有限体積での保存量の近似値から得られる Riemann 問題を解き、検査面上での保存量の近似を定めそれを元に流束の値を計算する。具体的には、ある時刻まで計算結果が得られその時点からの時間発展を考えると、その時刻を初期値 $t = 0$ としておく。また、この初期 $t = 0$ で \mathbf{U} には各有限体積内では \mathbf{U} が定数である階段状の分布を仮定する。

ある検査面 S について、 S と直交する座標軸 ξ - 軸 (S との交点を原点とする)、 ξ - 軸に直交する η - 軸をとる。 S において隣接する 2 つの有限体積を D_-, D_+ で表すが、 ξ 座標が負である側を D_- 、正である側を D_+ とする。 $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\xi, t)$ の 1 次元 Riemann 問題を考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{F} = 0, \mathbf{U} = \begin{cases} \mathbf{U}_-, & \xi < 0 \\ \mathbf{U}_+, & \xi > 0 \end{cases} \quad (5)$$

ここで、ベクトル \mathbf{U}, \mathbf{F} の要素は (2) と同様に (3) のように定められ、初期値を与える $\mathbf{U}_-, \mathbf{U}_+$ については

$$\mathbf{U}_{\pm} = \begin{bmatrix} \rho_{\pm} \\ \rho_{\pm} u_{\pm} \\ \rho_{\pm} v_{\pm} \\ e_{\pm} \end{bmatrix} \quad (\text{複号同順}) \quad (6)$$

で与えるが、従属変数 u, v はそれぞれ速度ベクトル \mathbf{V} の ξ, η - 成分であり、 $\rho_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}, e_{\pm}$ はそれぞれ ρ, u, v, e の D_{\pm} の $t = 0$ 時点での近似値である。(複号同順)

(5) には ξ/t に依存する相似解がある事が知られるが、その厳密解もしくは近似解 $U = U(\xi/t)$ をとり、検査面は $\xi = 0$ に相当するので $\xi/t = 0$ に於ける U の値

$$U(0) = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{e} \end{bmatrix}$$

から計算した流束関数 F の値

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\ \bar{u}(\bar{e} + \bar{p}) \end{bmatrix} \quad (\text{ただし、} \bar{p} = (\gamma - 1) (\bar{e} - \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{u}^2))$$

を検査面における (単位面積あたりの) 数値流束 (数値計算で用いる流束の近似値) とする。

全ての検査面での数値流束が定まれば、ある有限体積 D における U の総和の $t = 0$ から $t = \Delta t$ までの変化量は、当該有限体積を囲む全ての検査面の数値流束 \bar{F} に検査面の面積と進行する時間 Δt を乗じたものの合計 (ただし \bar{F} を定めるための Riemann 問題 (5) で D が ξ -軸の負の側である場合は \bar{F} を -1 倍して用いる) となる。そこで、有限体積 D における U の近似値の増減は U の総和の増減分を D の体積 $|D|$ で除したものとなる。即ち、

$$(\text{D における } U \text{ の近似値の増減}) = \frac{1}{|D|} \cdot \Delta t \sum_{D \text{ を囲む全ての検査面}} (\text{適切な符号}) \times (\text{検査面の面積}) \times \bar{F}.$$

以上の様に圧縮性 Euler 方程式の有限体積法による近似計算が与えられる。本稿では Riemann 問題 (5) の厳密解を利用する Godunov 法で考察を進める。

次節では検査面が速度ベクトルと斜交する場合の数値流束を観察する。

3 速度ベクトルが検査面に斜交する場合の数値流束 (その 1)

検査面 S がありその両側で速度ベクトルの方向は同一であると仮定する。 S の法線ベクトルと速度ベクトルのなす角度を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。(図 1 参照)

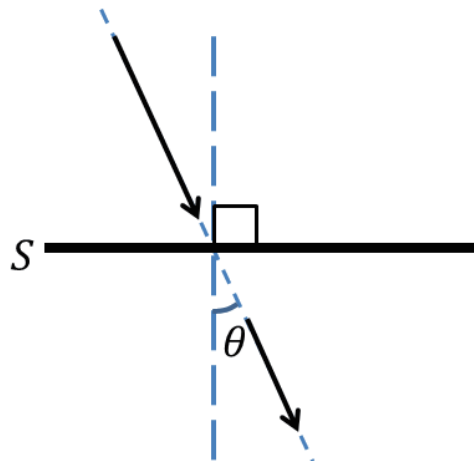


図 1: 検査面に斜交する流れ

すると、数値流束を定めるための Riemann 問題 (5) の初期条件 (6) において

$$u_- : v_- = u_+ : v_+ = \cos \theta : \sin \theta$$

が仮定されるが、この仮定の下でも一般的には ξ - 軸方向と η - 軸方向の運動量の流束 (\bar{F} の第 2、第 3 要素) の比が $\cos \theta : \sin \theta$ であるとは限らない。つまり、一般には検査面における運動量流束により両側の速度ベクトル (運動量ベクトル) の方向を変えてしまう。

実際には有限体積を囲む検査面全てにおける流束による差引を考えなければならない。図 2 のような直交正方格子の場合を考えると、ある有限体積 D_C と隣接する有限体積 D_N, D_W, D_S, D_E それぞれでの U の近似値 U_C, U_N, U_W, U_D, U_E について速度ベクトル (運動量ベクトル) の方向が同一であっても、一般的には各 D_* における速度ベクトルの方向は時間発展で変化する。

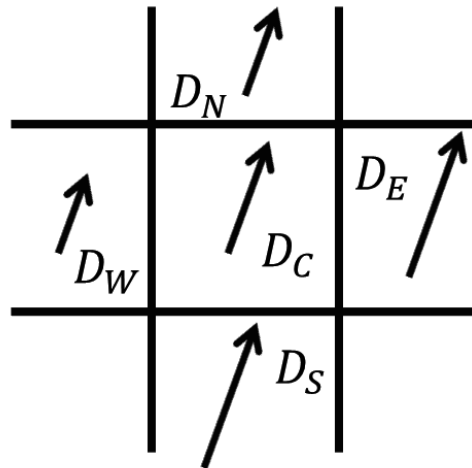


図 2: 有限体積の検査面と流れの斜交

しかし、図 3 のように直交正方格子で U_C, U_N, U_W, U_S, U_E の速度ベクトル (運動量ベクトル) の方向が全て同一で正方形の対角線方向であり、 $U_W = U_S, U_N = U_E$ である場合には、 U_C の速度ベクトル (運動量ベクトル) の方向は変化しない。

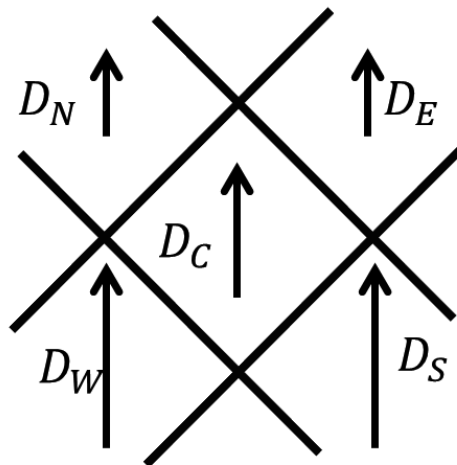


図 3: 特別な場合の例

つまり、図 3 のように正方形 D_C の流れの方向が対角線の一つに平行し、隣接有限体積の状況もその対角線について対象になっている場合には D_C の速度ベクトルは変化しない。

そこで特別な場合にはなるが、全有限体積で流れの方向が同一でその方向は正方形の対角線の 1 つに平行、かつそのような対角線の任意のものについて状況が対称になっている、という場合を考える。このよう

な場合には、流れの方向は時間が経過しても変化しない。実は、この時流体现象としては2次元性を失い1次元的な現象になってしまっている。しかし、その一方で検査面での流束の決定過程が解析し易い事が期待される。そこで次節においては、これを拡張した状況で解析を進める。

4 速度ベクトルが検査面に斜交する場合の数値流束（その2）

x, y -平面を

$$x \cos \theta + y \sin \theta = (2N + 1) \cos \theta, N \text{ は整数}, \quad (7)$$

$$x \cos \theta - y \sin \theta = (2N + 1) \cos \theta, N \text{ は整数}, \quad (8)$$

の2群の等間隔平行線群により合同な菱形に分割する。(図4)ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

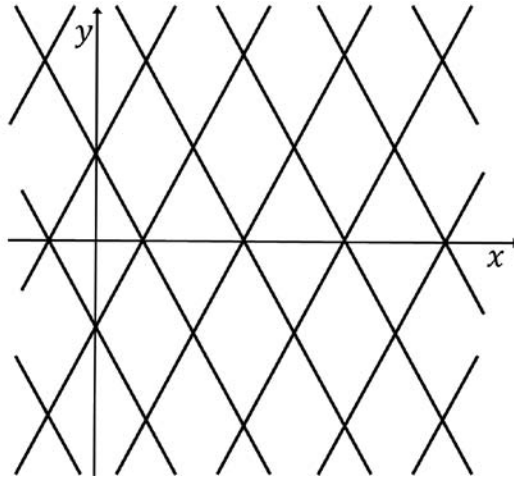


図4: 菱形での有限体積分割

各菱形の2本の対角線は x -軸または y -軸に平行であり、 x -軸に平行な対角線の長さは2、 y -軸に平行な対角線の長さは $2/\tan \theta$ となる。また、各菱形の中心(対角線の交点)の座標は $(m, n/\tan \theta)$ (但し m, n は偶奇の一致する2つの整数)となるので、各菱形(有限体積)を $D_{m,n}$ で表すことにする。これら、各菱形を有限体積として有限体積近似を考える。

この有限体積近似を用いて、流体の物理量が空間的には x -座標にのみ依存して y -座標には依存せず、かつ、流体の速度ベクトルが至る所で x -軸に平行であるような問題を解く。つまり速度ベクトル(運動量ベクトル)は x -軸方向の成分のみになるので、流体の状態を表す物理量は保存変数であれば、「密度 ρ 、 x -軸方向の単位体積あたり運動量 ρV 、単位体積あたり全エネルギー e 」の3個でよく、また保存変数のベク

トル $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho V \\ e \end{bmatrix}$ $D_{m,n}$ での \mathbf{U} の近似値は n には依存せず m にのみ依存するとしてよい。そこで $D_{m,n}$

(n は任意) での \mathbf{U} の近似値を

$$\mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} \rho_m \\ \rho_m V_m \\ e_m \end{bmatrix}$$

と書くことにする。

次に、上記の有限体積計算で有限体積 $D_{m,n}$ に左側に隣接する2つの有限体積 $D_{m-1, n \pm 1}$ から流入する数値流束について考える。各有限体積での速度ベクトル(運動量ベクトル)は x -軸成分のみを持つので1次元量として考えているが、これらの検査面は x -軸に斜交するので、検査面で数値流束を定めるための Riemann 問題は2次元的に考える必要がある。

$D_{m-1,n-1}$ と $D_{m,n}$ の境界の検査面で (5) に相当する Riemann 問題を設定すると、局所的な ξ, η -座標の ξ -軸（検査面に垂直）と η -軸（検査面に平行）は図5のようにとってよい。

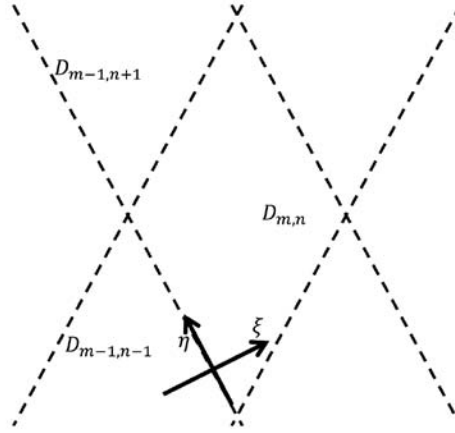


図 5: $D_{m,n}$ 面周辺の図

Riemann 問題から検査面上での U の値が定まれば、検査面上での流束

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\ \bar{u}(\bar{e} + \bar{p}) \end{bmatrix}$$

が定まる。 $D_{m-1,n+1}$ と $D_{m,n}$ の境界の検査面でも対称性による反転はあるが同様の状況になる。

2次元の状況においても、スカラー量（質量と全エネルギー）に関する流束（ $\bar{\mathbf{F}}$ の第1,4成分）は $D_{m-1,n-1}$ からのものと $D_{m-1,n+1}$ からのものを単純に足せばよい。

しかし、ベクトル量に関する流束（ $\bar{\mathbf{F}}$ の第2,3成分）はベクトル量としての和をとる必要がある。第2,3成分は $\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p}, \bar{\rho}\bar{u}\bar{v}$ のように与えられるが、これらはそれぞれ ξ, η -方向の運動量の流束である。これと対称になっている $D_{m-1,n+1}$ と $D_{m,n}$ の境界における状況を考えれば、双方の流束 $\bar{\mathbf{F}}$ の第2成分に由来する運動量の流束の和は x -軸方向のみの成分を有しその成分は $2(\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p}) \cos \theta$ となり、第3成分に由来する運動量の流束の和も x -成分 $2\bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \sin \theta$ だけになる。

つまり、 $D_{m-1,n\pm 1}$ から $D_{m,n}$ に流入する流束は

$$\begin{bmatrix} 2\bar{\rho}\bar{u} \\ 2(\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p}) \cos \theta + 2\bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \sin \theta \\ 2\bar{u}(\bar{e} + \bar{p}) \end{bmatrix}$$

と書ける。検査面の大きさを乗じ有限体積の大きさを除すことで標準化すると

$$\frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \bar{\rho}\bar{u} \\ (\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p}) \cos \theta + \bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \sin \theta \\ \bar{u}(\bar{e} + \bar{p}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

のようになる。

$\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{e}, \bar{p}$ を定める上の Riemann 問題では初期値 (5) が

$$U_- = \begin{bmatrix} \rho_{m-1} \\ \rho_{m-1} V_{m-1} \cos \theta \\ \rho_{m-1} V_{m-1} \sin \theta \\ e_{m-1} \end{bmatrix}, \quad U_+ = \begin{bmatrix} \rho_m \\ \rho_m V_m \cos \theta \\ \rho_m V_m \sin \theta \\ e_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

で与えられることを改めて確認しておく。

同様に $D_{m,n}$ から $D_{m-1,n+1}$ に流出する流束も Riemann 問題 (5) の初期値の U_{\pm} を

$$U_- = \begin{bmatrix} \rho_m \\ \rho_m V_m \cos \theta \\ \rho_m V_m \sin \theta \\ e_m \end{bmatrix}, \quad U_+ = \begin{bmatrix} \rho_{m+1} \\ \rho_{m+1} V_{m+1} \cos \theta \\ \rho_{m+1} V_{m+1} \sin \theta \\ e_{m+1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

としたものから与えられる事が容易に分かる。

5 1次元計算との比較

前節で扱った問題は1次元的な問題であるから、通常の1次元計算も可能である。その場合、有限体積を

$$I_m = \left(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right), m \text{ は整数} \quad (12)$$

として、 I_m での保存量 U の近似を

$$\mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} \rho_m \\ \rho_m V_m \\ e_m \end{bmatrix}$$

で定めると、 $x = m + \frac{1}{2}$ における Godunov 法による流束は1次元圧縮性 Euler 方程式の Riemann 問題から容易に与えられる。

そこで同じ1次元的問題を、

- (A) 上記の様に Godunov 法で1次元の数値計算を行う場合
- (B) 前節の様に2次元で流れに斜交する格子を用いて Godunov 法で2次元計算する場合

について比較することで、流れが格子に斜交する事による数値計算への影響を考察する。

(A) では、 I_m と I_{m+1} の間の数値流束 $\hat{\mathbf{F}}_{m+\frac{1}{2}}$ を Riemann 問題

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e+p) \end{bmatrix}, p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \\ & \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_m \\ \rho_m V_m \\ e_m \end{bmatrix}, x < 0, \quad \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{m+1} \\ \rho_{m+1} V_{m+1} \\ e_{m+1} \end{bmatrix}, x > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

の解の $x/t = 0$ における ρ, u, e, p の値を $\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{e}, \hat{p}$ として

$$\hat{\mathbf{F}}_{m+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \hat{\rho} \hat{u} \\ \hat{\rho} \hat{u}^2 + \hat{p} \\ \hat{u}(\hat{e} + \hat{p}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

と定める。

(B) では $D_{m,*}$ と $D_{m+1,*}$ の間の数値流束 $\bar{F}_{m+\frac{1}{2}}$ を Riemann 問題

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{bmatrix}, p = (\gamma - 1) \left\{ e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right\} \\ \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_m \\ \rho_m V_m \cos \theta \\ \rho_m V_m \sin \theta \\ e_m \end{bmatrix}, x < 0, \quad \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{m+1} \\ \rho_{m+1} V_{m+1} \cos \theta \\ \rho_{m+1} V_{m+1} \sin \theta \\ e_{m+1} \end{bmatrix}, x > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

の解の $x/t = 0$ における ρ, u, v, e, p の値を $\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{e}, \bar{p}$ として

$$\frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \bar{\rho} \bar{u} \\ (\bar{\rho} \bar{u}^2 + \bar{p}) \cos \theta + \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \sin \theta \\ \bar{u}(\bar{e} + \bar{p}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

と定める。

(B) に出現する Riemann 問題は空間 2 次元であるが、 v を抜いた従属変数 ρ, u, p は Riemann 問題におけるそれらの初期値である ρ_-, u_-, p_- ($x < 0$ での初期値) と ρ_+, u_+, p_+ ($x > 0$ での初期値) から、1 次元の圧縮性 Euler 方程式の Riemann 問題と全く同じように解を得る。 v については ρ, u, p のみで解かれた Riemann 問題の解の接触不連続波を考え

$$\begin{cases} \cdot \text{その左側 } (x \text{ が小さい側}) \text{ では初期値の } x < 0 \text{ での } v \text{ の値,} \\ \cdot \text{その右側 } (x \text{ が大きい側}) \text{ では初期値の } x > 0 \text{ での } v \text{ の値,} \end{cases}$$

となる。

(14) と (16) の 2 つの数値流束を比較する。

まず、解が滑らかな部分で格子が十分に細かくなっている場合は (ρ_m, V_m, e_m) と $(\rho_{m+1}, V_{m+1}, e_{m+1})$ は十分に近いとしてよいので、考察の為、 $\rho_m = \rho_{m+1}, V_m = V_{m+1}, e_m = e_{m+1}$ としてみると、

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = \bar{\rho} = \rho_m \\ \hat{u} = V_m, \bar{u} = V_m \cos \theta, \bar{v} = V_m \sin \theta \\ \hat{e} = \bar{e} = e_m, \hat{p} = \bar{p} = (\gamma - 1) \left(e_m - \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \end{aligned}$$

となるので、(14)、(16) のどちらも数値流束も同じものになる。また、どちらの数値流束とも $\rho_m, \rho_{m+1}, V_m, V_{m+1}, e_m, e_{m+1}$ に滑らかに依存していることも通常の Godunov 法の数値流束と同様に確かめられる。これらは解が滑らかである部分で十分に格子を細かくすれば、どちらの数値流束を用いても十分に近い計算結果が得られる事を示している。

(ρ_m, V_m, e_m) と $(\rho_{m+1}, V_{m+1}, e_{m+1})$ が十分に近くない場合には、Riemann 問題が本質的に意味を持つ事になる。

2 次元計算では流れが検査面に斜交し速度ベクトルが検査面の法線と θ の角をなすため、2 つの Riemann 問題 (13)(15) は、記述が 1 次元的か 2 次元的かだけの違いではなくなってしまう。(15) においても変数を ρ, u, p のみ考察すれば、上に述べたように問題は 1 次元的になるが、そのような見方をしても、Riemann 問題を規定する初期値の左右の状態 (ここでは密度、速度、圧力で表す) が、 $p_m = (\gamma - 1) \left(e_m - \frac{1}{2} \rho_m (V_m)^2 \right)$ 、 $p_{m+1} = (\gamma - 1) \left(e_{m+1} - \frac{1}{2} \rho_{m+1} (V_{m+1})^2 \right)$ として、(13) においては

$$\begin{array}{c|c} \rho_m & \rho_{m+1} \\ V_m & V_{m+1} \\ p_m & p_{m+1} \end{array}$$

であり、(15)においては

$$\begin{array}{c|c} \rho_m & \rho_{m+1} \\ V_m \cos \theta & V_{m+1} \cos \theta \\ p_m & p_{m+1} \end{array}$$

であるから、(15)では速度に $\cos \theta$ が乗せられる分だけ (13) とは異なるものになる。

例えば、速度が超音速であっても音速の $1/\cos \theta$ 倍を超えない場合には、(15)(16) で数値流束を与える場合、速度が $\cos \theta$ 倍された事で超音速に由来する現象の上流性（情報の伝播は流れを遡らない）を喪失してしまう事は容易に想像できる。亜音速の場合も、元の1次元的な問題に比べて流れと逆の方向に伝わる情報が増加する事は一般的に理解できる。これは、計算結果に鈍化をもたらす事が多い。

また、Riemann 問題 (15) の第3成分の等式中の v に関しては、圧縮性 Euler 方程式の3つの特性速度 $u-c, u, u+c$ (u は流体の速度、 c は音速) のうち、非線形現象（衝撃波、膨張波）に係る $u \pm c$ には全く関連せず、特性速度によるスイッチングは接触不連続に係る u によって生じるのみである。しかし、この第3成分で計算された \bar{v} も (16) の与える数値流束に影響を及ぼしているため、その点でも通常の1次元計算の数値流束に比べ、物理からの乖離を生じる可能性がある。

現状のこの程度までの解析でも今まで明確でなかった次のような数値現象についての説明を与えることができる。

格子が流れや衝撃波に適合していない場合、特に定常問題での静止衝撃波では適合している格子に比べて衝撃波が鈍って捕獲される事は知られているが、いわゆる粘性項を付加したような場合と異なり、衝撃波の超音速側はそれほど鈍らない事も多い。これについては、Riemann 問題 (15) の段階で速度が $\cos \theta$ 倍されてしまっても十分に音速を超えていれば、超音速に由来する現象の上流性は失われない、つまり、超音速側では流れが十分に速ければ格子が適合してなくても上流性が保たれ数値計算の鈍化は生じにくい、という事がいえる。逆に亜音速側では、上で説明したように流れと逆の方向に過剰に情報が伝わるために計算が鈍化し易い、という事になる。

格子が適合していない場合に、衝撃波が比較的くっきりと（上の議論からこのくっきりと見える部分は超音速側であろうことも理解できる）なる場合といかにも鈍ってしまう場合があることも経験的に知られるが、これは、Riemann 問題 (15) で速度が $\cos \theta$ 倍された際に上流側で十分に音速を超えているか否かによると言える。

以上の説明について、静止衝撃波の計算例を実際に見てみよう。

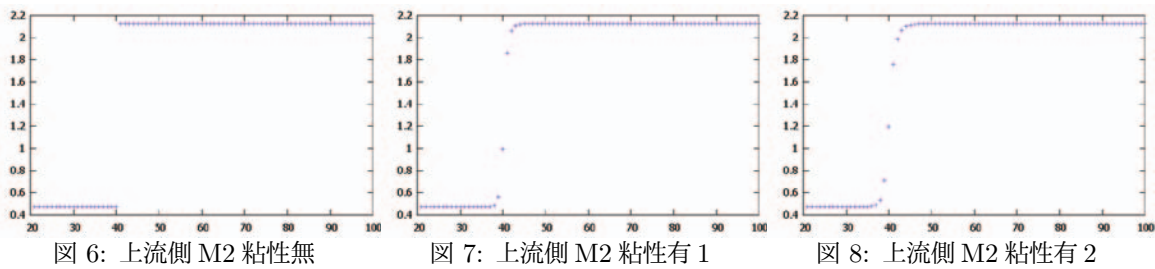


図 6: 上流側 M2 粘性無

図 7: 上流側 M2 粘性有 1

図 8: 上流側 M2 粘性有 2

図 6 は静止衝撃波を Godunov 法で 1 次元計算した結果である。上流（超音速）側のマッハ数は 2 である。数値的鈍化は殆どない。

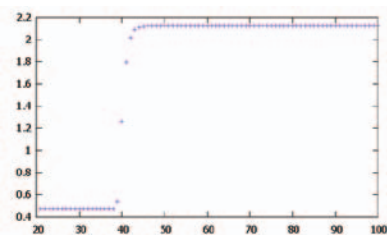


図 9: 上流側 M2, $\theta = 45^\circ$

2 次元計算を行った結果を示す前に数値的な鈍化を比較する為、図 6 と同条件の Godunov 法 1 次元計算に数値粘性を付加したものを示す。（図 7、図 8）数値粘性は Lax-Friedrichs 差分の数値粘性に相当するものの 10%（図 7）及び 20%（図 8）である。上流側も下流側もほぼ同様に鈍っている。図 9 が図 4 の格子で $\theta = 45^\circ$ として 2 次元計算を行った結果である。 $\theta = 45^\circ$ なので、正方直交格子で流れの速度ベクトルが対角線方向になって

いる状況である。格子が流れに斜交したことで計算結果が鈍化しているが、衝撃波の超音速側を見ると速度が $\cos 45^\circ$ 倍されても依然超音速性を保つため、鈍りはほとんどない。つまり、流れと格子が斜交する事による数値計算の鈍化の機構は通常の数値粘性によるものとは異なる事が分かる。

次に衝撃波上流超音速側のマッハ数を 1.35 として計算してみよう。

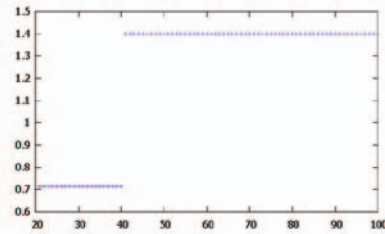


図 10: 上流側 M1.35 粘性無

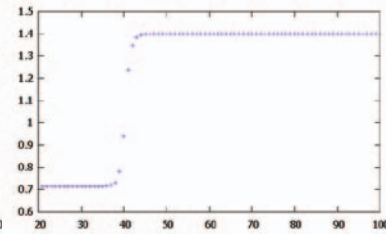


図 11: 上流側 M1.35 粘性有

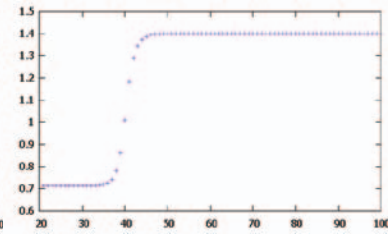


図 12: 上流側 M1.35, $\theta = 45^\circ$

図 10 は粘性なし 1 次元計算、図 11 はそれに Lax-Friedrichs 差分相当の数値粘性の 10% を加えたもの（同じ程度の数値粘性でも衝撃波の強度が弱くなると鈍りは大きくなる）、

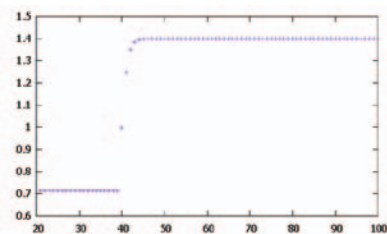


図 13: 上流側 M1.35, $\theta = 30^\circ$

そして図 12 は 2 次元計算で $\theta = 45^\circ$ としたものである。数値計算の中（数値流束を定めるための検査面における Riemann 問題）では超音速性が失われてしまい、衝撃波の超音速側も大きく鈍ってしまう事が観察される。これは、実際の現象の超音速性ではなく、数値計算の中で超音速性が保たれるか否かの問題であるので、 $\theta = 30^\circ$ とした場合の結果である図 13 では、数値計算の中での超音速性が保たれて図 9 と同じような様相を示している。

6 まとめ

CFD において流体现象に格子が適合しなければ計算品質が低下する事実は当然の事として認識されているが、その品質の低下がどのような機構で生じるのかは未だに解明されていないことが多い。発生機構が明らかになれば、事前に品質低下の起こりやすい状況を回避することや、計算結果の解釈における留意事項として有益である。勿論、品質低下の機構を解明することで将来的にはそうした欠点の取り除かれた数値計算法を提案できる事が望ましい。

数値計算法を考える際に 1 次元での計算法の改良を行いそれを多次元に拡張するという方法論が通常であり、ある意味それは当然のことであるのだが、多次元ゆえに生じる問題を拡張の際に考慮し難いという事も事実であろう。本稿では原始的な方法ではありながら、従来経験的に知られた計算品質低下の現象に数理的な説明を与えることができた。数値挙動の数学的な解析法の発展と数値計算の方法論の改良という 2 つの発展の方向に向けて今後も考察を進展させたい。

参考文献

- [1] H. Aiso. Admissibility of difference approximation for scalar conservation laws. *Hiroshima Math. J.*, Vol. 23, No. 1, pp. 15–61, 1993.
- [2] S. K. Godunov. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics (in Russian). *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 47, pp. 251–306, 1959.
- [3] J. Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] E. Tadmor. Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes. *Math. Comp.*, Vol. 43, pp. 369–382, 1984.

- [5] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 2005.

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-17-012
JAXA Research and Development Report

圧縮性Euler 方程式の有限体積法計算における流れと格子の斜交による
影響について

A Discussion on the Effect of Computational Mesh Oblique to Stream

発行 国立研究開発法人 宇宙航空研究開発機構 (JAXA)
〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1
URL: <http://www.jaxa.jp/>

発行日 平成30年3月9日
電子出版制作 松枝印刷株式会社

©2018 JAXA

※本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。
Unauthorized copying, replication and storage digital media of the contents of this publication, text and images are strictly prohibited. All Rights Reserved.

